



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:


- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

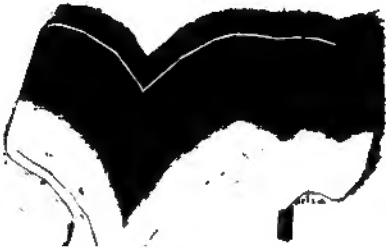
Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>







RADCLIFFE  
OBSERVATORY  
OXFORD.



S. J. Thigand  
May 10. 1837

QA  
803.

. A1  
1760



*NEWTONI*  
**PRINCIPIA**  
**PHILOSOPHIÆ,**  
*CUM COMMENTARIO PERPETUO.*

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

PHYSICS DEPARTMENT

CHICAGO, ILLINOIS

PHILOSOPHIÆ  
NATURALIS  
PRINCIPIA  
MATHEMATICA;

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, EQ. AURATO;

*Perpetuis Commentariis illustrata, communi studio*

PP. THOMÆ LE SEUR & FRANCISCI JACQUIER,

*Ex Gallicanâ Minimorum Familiâ,*

*Matheseos Professorum.*

Editio altera longè accuratior & emendatior.

TOMUS PRIMUS.

COLONIÆ ALLOBROGUM,

Sumptibus CL. & ANT. PHILIBERT Bibliop.

---

M D C C L X.

7-1-1941

7-1-1941



70#400b.



Pen. lib.  
bills  
P. Wilson, H. Butto  
10-14-1935  
v. 1-4  
add. 2d.

v

R E R U M  
MATHEMATICARUM  
STUDIOSIS,  
PHILOSOPHIÆ NEWTONIANÆ  
INTERPRETES.

Q Uam recondita sint simul & utilia *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, norunt ii omnes qui vel ipsum Clarissimi Authoris nomen audierunt. Tanta est rerum dignitas atque sublimitas, tanta sermonis plusquam Geometrica brevitates, ut præstantissimum illud opus paucissimis duntaxat Geometris factum videatur. Eas ob causas viris Matheseos cultiorisque Physices studiosis gratissimam fore putavimus, eo modo comparatam interpretationem, ut omnes tam utilis Philosophiæ propositiones, corollaria omnia atque scholia inoffenso pede possint decurrere, qui vel ipsis Geometriæ & vulgaris Algebrae ele-  
3 men-

mentis probè imbuti sunt. Quod ut præstaremus, Mechanices & Calculi infinitorum principia, quantum instituti nostri ratio postulat, NEWTONI vestigiis insistentes demonstravimus; perbreve, sed theorematum sæcunditate plenum nostris Commentariis inferuimus tractatum Sectionum Conicarum; Quæ vel minimùm, nimia obscuritate Lectori negotium parere possent, ea omnia exponere & in bono lumine collocare conati sumus; quæ in scholiis, corollariis, propositionumque serie, prætermisâ demonstratione, pronuntiat NEWTONUS, præmissis vel interjectis Lemmatibus scrupulosè demonstrata invenient, qui in sola doctissimi Authoris verba jurare nolunt; eximia quæ in NEWTONI propositionibus latent inventa, deteximus atque evolvimus; tandem cum præstantissima illa summi viri principia non solum intelligere, sed & illam quam sibi aperuit ad inventionem viam explorare plurimùm delectationis habeat & utilitatis, dispersa huc & illuc generalia quædam problema.

blemata Lector reperiet. Hæc sunt quæ facere volumus: quo exitu, penès benevolum Lectorem esto iudicium. Ex brevi illo commentariorum nostrorum prospectu satis patet quos nobis lectores postulemus; nec præstantissimis Mathematicis nec imperito Philosophorum vulgo nos scribere profitemur; ad hujusce operis lectionem eos duntaxat admittimus qui ea quæ jam diximus elementa in promptu habent, & tali insuper pollent mentis acie, ut longioris demonstrationis vim atque seriem studiosè persequi & animo comprehendere possint.

De nostris Commentariis hæc satis dicta sint. Verùm naturalis æquitas & mathematicus candor postulant, ut nos plurimùm debere fateamur Doctissimis Viris, DAVIDI GREGORIO, VARIGNONIO, JACOBO HERMANNO, JOANNI KEILLIO, aliisque multis, qui varias *Newtonianæ Philosophiæ* partes luculentis scriptis illustrarunt. Eâdem æquitatis atque ingenuitatis lege à nobis religiosè factum est,  
ut

ut eos omnes quorum spoliis aliquandò ditescimus, in Commentariorum nostrorum decursu honoris causâ nominemus. Publicum quoque grati animi testimonium deesse nolumus Clariss. D<sup>no</sup>. J. L. CALANDRINO in Academiâ Genevensi Professore in rebus Mathematicis versatissimo, qui hanc nostram NEWTONI principiorum editionem adornari curavit ad normam elegantissimæ illius editionis, quæ additionibus multis locupletata *Londini* prodit anno 1726. Deindè id sibi laboris assumpsit vir doctissimus non solum ut schemata incidi, suis locis disponi, typographica menda corrigi sedulò invigilaret, sed etiam ea quæ jam laudavimus Sectionum Conicarum elementa composuit, & quæ à nobis non satis perspicuè videbantur exposita propriis notis aliquandò illustravit.

Hoc nostro labore fruantur rerum mathematicarum Cultores.

ROME in Regio Conventu SSæ. Trinitatis;  
An. 1739.

IL:

ILLUSTRISSIMÆ  
SOCIETATI REGALI

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II.

AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ,

ET

AUSPICIIS

SERENISSIMI REGIS

GEORGII

FLORENTI

TRACTATUM HUNC D.D.D.

IS. NEWTON.



x

A U C T O R I S  
P R Æ F A T I O  
A D  
L E C T O R E M.

**C**UM veteres mechanicam ( uti auctor est Pappus ) in rerum naturalium investigatione maximi fecerint ; & recentiores , missis formis substantialibus & qualitatibus occultis , phenomena naturæ ad leges mathematicas revocare aggressi sint ; Visum est in hoc tractatu mathesim excolere , quatenus ea ad philosophiam spectat. Mechanicam verò duplicem veteres constituerunt : rationalem , quæ per demonstrationes accuratè procedit , & practicam. Ad practicam spectant artes omnes manuales , à quibus utique mechanica nomen mutuata est. Cum autem artifices parùm accuratè operari soleant , fit ut mechanica omnis à geometriâ ita distinguatur , ut quicquid accuratum sit ad geometriam referatur , quicquid minus accuratum ad mechanicam. Attamen errores non sunt artis , sed artificum. Qui minus accuratè operatur , imperfectior est mechanicus , & si quis accuratissimè operari posset , hic foret mechanicus omnium perfectissimus. Nam & linearum rectorum & circulorum descriptiones , in quibus geometria fundatur , ad mechanicam pertineant. Has lineas describere geometria non docet , sed postulat. Postulat enim ut tyro easdem accuratè describere prius didicerit , quàm limen attingat geometriæ ; dein quomodo per has operationes problemata solvantur , docet ; rectoras & circulos describere problemata sunt , sed non geometrica. Ex mechanica postulatur horum solutio , in geometria docetur solutorum usus. Ac gloriatur geometria quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præstet. Fundatur igitur geometria in praxi mechanica , & nihil aliud est quàm mechanicæ universalis pars illa , quæ artem mensurandi accuratè

\* \* 2

curatè



curatè proponit ac demonstrat. Cum autem artes manuales in corporibus movendis præcipuè versentur, sit ut geometria ad magnitudinem, mechanica ad motum vulgo referatur. Quo sensu mechanica rationalis erit scientia motuum, qui ex viribus quibuscunque resultant, & virium quæ ad motus quoscunque requiruntur, accuratè propozita ac demonstrata. Pars hæc mechanicæ à veteribus in potentiis quinque ad artes manuales spectantibus exculta fuit; qui gravitatem (cùm potentia manualis non sit) vix aliter quàm in ponderibus per potentias illas movendis considerarunt. Nos autem non artibus sed philosophiæ consulentes, deque potentiis non manualibus sed naturalibus scribentes, ea maximè tractamus, quæ ad gravitatem, levitatem, vim elasticam, resilièntiam fluidorum & ejusmodi vires seu attractivas seu impulsivas spectant: Hæc propter, hæc nostra tanquam philosophiæ principia mathematica proponimus. Omnis enim philosophiæ difficultas in eo versari videtur, ut à phænomenis motuum inveſtigemus vires naturæ, deinde ab his viribus demonstramus phænomena reliqua. Et hac spectant propositiones generales, quas libro primo & secundo pertractavimus. In libro autem tertio exemplum hujus rei proposuimus per explicationem systematis mundi. Ibi enim, ex phænomenis cælestibus, per propositiones in libris prioribus mathematicè demonstratas, derivantur vires gravitatis, quibus corpora ad solem & planetas singulos tendunt. Deinde ex his viribus per propositiones etiam mathematicas, deducuntur motus planetarum, cometarum, lunæ & maris. Utinam cætera naturæ phænomena ex principiis mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent, ut nonnihil suspicer ea omnia ex viribus quibusdam pendere posse, quibus corporum particule per causas nondum cognitæ vel in se mutuò impelluntur & secundum figuras regulares coherant, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, philosophi hæcenus naturam frustra tentarunt. Spero autem quod vel huic philosophandi modo, vel veriori alicui, principia hic posita lucem aliquam præbebant.

In his edendis, vir acutissimus & in omni literarum genere eruditissimus Edmundus Halleius operam navavit, nec solum typothetarum sphalmata correxit & schemata incidi curavit, sed etiam auctor fuit, ut horum editionem aggredere. Quippe cùm demonstratam à  
me

me figuram orbium caelestium impetraverat, rogare non desistit; ut eandem cum Societate Regali communicarem, quæ deinde hortatibus & benignis suis auspiciis effecit, ut de eadem in lucem emittendâ cogitare inciperem. At postquam motuum lunarium inæqualitates aggressus essem, deinde etiam alia tentare cœpisssem, quæ ad leges & mensuras gravitatis & aliarum virium, & figuras à corporibus secundum datas quascanque leges attractis describendas, ad motus corporum plurium inter se, ad motus corporum in mediis resistentibus, ad vires, densitates & motus mediorum, ad orbes cometarum & similia spectant, editionem in aliud tempus differendam esse putavi, ut cætera rimarer & unâ in publicum darem. Quæ ad motus lunares spectant (imperfecta cum sint) in corollariis propositionis LXVI. simul complexus sum, ne singula methodo prolixiore quàm propriæ dignitatæ proponere, & figillatim demonstrare tenerer, & feriem reliquarum propositionum interrumpere. Nonnulla serò inventa locis minus idoneis inserere malui, quàm numerum propositionum & citationes mutare. Ut omnia candidè legantur & defectus in materiâ tam difficili non tam reprehendantur, quàm novis lectorum conatibus investigentur, & benignè suppleantur, enixe rogo.

• *Dabam Cantabrigiæ, & Collegio  
S. Trinitatis, Maii 2. 1686.*

IS. NEWTON.

## AUCTORIS PRÆFATIO

I N

## EDITIONEM SECUNDAM.

**I**N hæc secundâ Principiorum editione multa sparsim emendantur, & nonnulla adjiciuntur. In libri primi sectione II. inventio virium, quibus corpora in orbibus datis revolvî possint, facilius redditur & amplior. In libri secundi sectione VII. theoria resistentiæ fluidorum accuratius investigatur, & novis experimentis confirmatur. In libro tertio theoria lunæ & præcessio æquinoctiorum ex principiis suis plenius deducuntur, & theoria cometarum pluribus & accuratius computatis orbium exemplis confirmatur.

Dabam Londini,  
Mar. 28. 1713.

IS. NEWTON.

EDI-

# EDITORIS PRÆFATIO

I N

## EDITIONEM SECUNDAM.

**N**EWTONIANÆ philosophiæ novam tibi, lector benevole, diuque desideratam editionem, plurimum nunc emendatam atque auctiorem exhibemus. Quæ potissimum contineantur in hoc opere celeberrimo, intelligere potes ex indicibus adjectis: quæ vel addantur vel immutentur, ipsa te ferè docebit auctoris præfatio. Reliquum est, ut adjiciantur nonnulla de methodo hujus philosophiæ.

Qui physicam tractandam susceperunt, ad tres ferè classes revocari possunt. Exiuerunt enim, qui singulis rerum speciebus qualitates específicas & occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum singulorum operationes, ignotâ quâdam ratione, pendere voluerunt. In hoc posita est summa doctrinæ scholasticæ, ab *Aristotele* & *Peripateticis* derivatæ: Affirmant utique singulos effectus ex corporum singularibus naturis oriri; at unde sint illæ naturæ non docent; nihil itaque docent. Cumque toti sint in rerum nominibus, non in ipsis rebus; sermonem quendam philosophicum censendi sunt adinvenisse, philosophiam tradidisse non sunt censendi.

Alii ergo melioris diligentiae laudem consequi sperarunt rejectâ vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque materiam universam homogeneam esse, omnem verò formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particularum componentium simplicissimis quibusdam & intellectu facillimis affectionibus oriri. Et rectè quidem progressio instituitur à simplicioribus ad magis composita, si particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quàm quos ipsa tribuit natura. Verùm ubi licentiam sibi assumunt, ponendi quasunque libet ignotas partium figuras & magnitudines, incertosque situs & motus; quin & fingendi fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrimè permeent, omnipotente prædi-

ta

ta subtilitate, motibusque occultis agitata; jam ad somnia delabuntur, neglectâ rerum constitutione verâ: quæ sanè frustra petenda est ex fallacibus conjecturis, cum vix etiam per certissimas observationes investigari possit. Qui speculationum suarum fundamentum desumunt ab hypothesebus; etiamsi deinde secundum leges mechanicas accuratissimè procedant; fabulam quidem elegantem fortè & venustam, fabulam tamen concinnare dicendi sunt.

Relinquitur adeo tertium genus, qui philosophiam scilicet experimentalem profitentur. Hi quidem ex simplicissimis quibus possunt principiis rerum omnium causas derivandas esse volunt: nihil autem principii loco assumunt, quod nondum ex phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheses non comminiscuntur, neque in physicam recipiunt, nisi ut quæstiones de quarum veritate disputetur. Duplici itaque methodo incedunt, analyticâ & syntheticâ. Naturæ vires legesque virium simpliciores ex selectis quibusdam phænomenis per analysin deducunt, ex quibus deinde per synthesein reliquorum constitutionem tradunt. Hæc illa est philosophandi ratio longè optima, quam præ cæteris meritò amplectendum censuit celeberrimus auctor noster. Hanc solam utique dignam judicavit, in quâ excolendâ atque adornandâ operam suam collocaret. Hujus igitur illustrissimum dedit exemplum, mundani nempe systematis explicationem è theoriâ gravitatis felicissimè deductam. Gravitatis virtutem universis corporibus inesse, suspicari sunt vel finxerunt alii: primus ille & solus ex apparentiis demonstrare potuit, & speculationibus egregiis firmissimum ponere fundamentum.

Scio equidem nonnullos magni etiam nominis viros, præjudiciis quibusdam plus æquo occupatos, huic novo principio ægrè assentiri potuisse, & certis incerta identidem prætulisse. Horum famam vellicare non est animus: tibi potius, benevole lector, illa paucis exponere lubet, ex quibus tute ipse judicium non iniquum feras.

Igitur ut argumenti sumatur exordium à simplicissimis & proximis; dispiciamus paulisper qualis sit in terrestribus natura gravitatis, ut deinde tutius progrediamur ubi ad corpora cælestia, longissimè à sedibus nostris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes philosophos, corpora universa circumterrestria gravitare interram. Nulla dari corpora verè levia, jamdudum confirmavit experientia

rientia multiplex. Quæ dicitur levitas relativa, non est vera levitas, sed apparens solummodo; & oritur à præpollente gravitate corporum contiguorum.

Porro, ut corpora universa gravitent in terram, ita terra vicissim in corpora æqualiter gravitat; gravitatis enim actionem esse mutuam & utrinque æqualem, sic ostenditur. Distinguatür terræ totius moles in binas quascunque partes, vel æquales vel utcunque inæquales: jam si pondera partium non essent in se mutuò æqualia, cederet pondus minus majori, & partes conjunctæ pergerent rectà moveri ad infinitum, versus plagam in quam tendit pondus majus: omninò contra experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio esse constituta: hoc est, gravitatis actionem esse mutuam & utrinque æqualem.

Pondera corporum, æqualiter à centro terræ distantium, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æquali acceleratione corporum omnium, è quiete per ponderum vires cadentium: nam vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent esse proportionales quantitibus materiæ movendæ. Jam verò corpora universa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quod in vacuo *Boyliano* temporibus æqualibus æqualia spatia cadendo describunt, sublata scilicet aëris resistentiâ: accuratius autem comprobatur per experimenta pendulorum.\*

Vires attractivæ corporum, in æqualibus distantis, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cum corpora in terram & terra vicissim in corpora momentis æqualibus gravitent; terræ pondus in unumquodque corpus, seu vis quâ corpus terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejusdem in terram. Hoc autem pondus crit ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis quâ corpus unumquodque terram attrahit, sive corporis vis absoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo & componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: siquidem auctâ vel diminutâ mole materiæ, ostensum est, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque telluris ex conjunctis partium actionibus consulari censenda erit; atque adeò corpora omnia terrestria se mutuò trahere oportet viribus absolutis, quæ sint in ratione materiæ tra-

\* \* \*

hens

hensis. Hæc est natura gravitatis apud terram: videamus jam qualis sit in cœlis.

Corpus omne perseverare in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus à viribus impressis cogitur statum illum mutare; naturæ lex est ab omnibus recepta philosophis. Inde verò sequitur, corpora quæ in curvis moventur, atque adeò de lineis rectis orbitas suas tangentibus jugiter abeunt, vi aliquâ perpetuò agente retineri in itinere curvilineo. Planetis igitur in orbitis curvis revolventibus necessariò aderit vis aliqua, per cujus actiones repetitas indefinenter à tangentibus deflectantur.

Jam illud concedi æquum est, quod mathematicis rationibus colligitur & certissimè demonstratur; corpora nempe omnia, quæ moventur in lineâ aliquâ curvâ in plano descriptâ, quæque radio ducto ad punctum vel quiescens vel utcumque motum describunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri à viribus quæ ad idem punctum tendent. Cum igitur in confesso sit apud astronomos, planetas primarios circum solem, secundarios verò circum suos primarios, areas describere temporibus proportionales; consequens est ut vis illa, quâ perpetuò detorqueantur à tangentibus rectilineis & in orbitis curvilineis revolvi coguntur, versus corpora dirigatur quæ sita sunt in orbitarum centris. Hæc itaque vis non ineptè vocari potest, respectu quidem corporis revolventis, centripeta; respectu autem corporis centralis, attractiva; à quâcunque demùm causâ oriri fingatur.

Quin & hæc quoque concedenda sunt, & mathematicè demonstrantur: Si corpora plura motu æquabili revolvantur in circulis concentricis, & quadrata temporum periodicorum sint ut cubi distantiarum à centro communi; vires centripetas revolventium fore reciproçè ut quadrata distantiarum. Vel, si corpora revolvantur in orbitis quæ sunt circulis finitimæ, & quiescant orbitarum apsidæ; vires centripetas revolventium fore reciproçè ut quadrata distantiarum. Obtinere casum alterutrum in planetis universis consentiunt astronomi. Itaque vires centripetæ planetarum omnium sunt reciproçè ut quadrata distantiarum ab orbium centris. Si quis objiciat planetarum, & lunæ præsertim, apsidæ non penitus quiescere; sed motu quodam lento ferri in consequentia: responderi potest,



põtest, etiã si concedamus hunc motum tardissimũ exinde profectum esse quod vis centripetæ proportio aberret aliquantũ à duplicata; aberrationem illam per computum mathematicum inveniri posse & planè insensibilem esse. Ipsa enim ratio vis centripetæ lunaris, quæ omnium maximè turbari debet, paululum quidem duplicatam superabit; ad hanc verò sexaginta ferè vicibus propius accedet quàm ad triplicatam. Sed varior erit responsio, si dicamus hanc apsidum progressionem, non ex aberratione à duplicatâ proportionem, sed ex aliâ prorsus diversâ causâ oriri, quemadmodum egregiè commonstratur in hac philosophia. Restat ergo ut vires centripetæ, quibus planetæ primarii tendunt versùs solem & secundarii versùs primarios suos, sint accuratè ut quadrata distantiarum reciproce.

Ex iis quæ hætenus dicta sunt, constat planetas in orbitis suis retineri per vim aliquam in ipsos perpetuò agentem: constat vim illam dirigi semper versùs orbitarum centra: constat hujus efficaciam augeri in accessu ad centrum, diminui in recessu ab eodem: & augeri quidem in eadem proportionem qua diminuitur quadratum distantia, diminui in eadem proportionem quâ distantia quadratum augetur. Videamus jam, comparatione institutâ inter planetarum vires centripetas & vim gravitatis, annon ejusdem fortè sint generis. Ejusdem verò generis erunt, si deprehendantur hinc & inde leges eadem, eademque affectiones. Primò itaque lunæ, quæ nobis proxima est, vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ à corporibus è quiete demissis, dato tempore sub ipso motus initio describuntur, ubi à viribus quibuscunque urgentur, proportionalia sunt ipsis viribus: hoc utique consequitur ex ratiociniis mathematicis. Erit igitur vis centripeta lunæ in orbitâ suâ revolventis, ad vim gravitatis in superficie terræ, ut spatium quod tempore quàm minimo describeret luna descendendo per vim centripetam versùs terram, si circulari omni motu privari fingeretur ad spatium quod eodem tempore quàm minimo describit grave corpus in vicinia terræ, per vim gravitatis suæ cadendo. Horum spatiorum prius æquale est arcus à luna per idem tempus descripti sinu verso, quippe qui lunæ translationem de tangente, factam à vi centripeta, metitur; atque adeò computari potest ex datis tum lunæ tempore periodico, tum distantia ejus à centro terræ, Spatium poste-

rius invenitur per experimenta pendulorum, quemadmodum docuit *Hugenius*. Inito itaque calculo, spatium prius ad spatium posterius, seu vis centripeta lunæ in orbita sua revolventis ad vim gravitatis in superficie terræ, erit ut quadratum semidiametri terræ ad orbitæ semidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ superius ostenduntur, vis centripeta lunæ in orbita sua revolventis ad vim lunæ centripetam propè terræ superficiem. Vis itaque centripeta propè terræ superficiem æqualis est vi gravitatis. Non ergo diversæ sunt vires, sed una atque eadem; si enim diversæ essent, corpora viribus conjunctis duplò celerius in terram caderent quàm ex vi solâ gravitatis. Constat igitur vim illam centripetam, quâ luna perpetuò de tangente vel trahitur vel impellitur & in orbita retinetur, ipsam esse vim gravitatis terrestres ad lunam usque pertingentem. Et rationi quidem consentaneum est ut ad ingentes distantias illa sese virtus extendat, cum nullam ejus sensibilem imminutionem, vel in altissimis montium cacuminibus, observare licet. Gravitat itaque luna in terram: quin & actione mutua, terra vicissim in lunam æqualiter gravitat: id quod abundè quidem confirmatur in hac philosophiâ, ubi agitur de maris æstu & æquinoctiorum præcessione, ab actione tum lunæ tum solis in terram oriundis. Hinc & illud tandem edocemur, quâ nimirum lege vis gravitatis decreseat in majoribus à tellure distantis. Nam cum gravitas non diversa sit à vi centripeta lunari, hæc verò sit reciproce proportionalis quadrato distantie; diminuetur & gravitas in eadem ratione.

Progrediamur jam ad planetas reliquos. Quoniam revolutiones primariorum circa solem & secundariorum circa jovem & saturnum sunt phænomena generis ejusdem ac revolutio lunæ circa terram, quoniam porro demonstratum est vires centripetas primariorum dirigi versùs centrum solis, secundariorum versùs centra jovis & saturni, quemadmodum lunæ vis centripeta versùs terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires sunt reciproce ut quadrata distantiarum à centris, quemadmodum vis lunæ est ut quadratum distantie à terra: concludendum erit eandem esse naturam universis. Itaque ut luna gravitat in terram, & terra vicissim in lunam; sic etiam gravitabunt omnes secundarii in primarios suos, & primarii vicissim in secundarios; sic & omnes primarii in solem, & sol vicissim in primarios,

Igitur sol in planetas universos gravitat & universi in solem. Nam secundarii dum primarios suos comitantur, revolvuntur interea circum solem unà cum primariis. Eodem itaque argumento, utriusque generis planetæ gravitant in solem, & sol in ipsos. Secundarios verò planetas in solem gravitare abundè insuper constat ex inæqualitatibus lunaribus; quarum accuratissimam theoriam, admirandâ sagacitate patefactam, in tertio hujus operis libro expositam habemus.

Solis virtutem attractivam quoquo versum propagari ad ingentes usque distantias, & sese diffundere ad singulas circumjecti spatii partes, apertissimè colligi potest ex motu cometarum; qui ab immensis intervallis profecti feruntur in viciniam solis, & nonnunquam adeò ad ipsum proximè accedunt, ut globum ejus, in periheliis suis versantes, tantum non contingere videantur. Horum theoriam ab astronomis antehac frustra quæsitam, nostro tandem sæculo faciliter inventam & per observationes certissimè demonstratam, præstantissimo nostro auctori debemus. Patet igitur cometas in sectionibus conicis umbilicos in centro solis habentibus moveri, & radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales describere. Ex hisce verò phænomenis manifestum est & mathematicè comprobatur, vires illas, quibus cometæ retinentur in orbitis suis, respicere solem & esse reciprocè ut quadrata distantiarum ab ipsius centro. Gravitant itaque cometæ in solem: atque adeò solis vis attractiva non tantum ad corpora planetarum in datis distantis & in eodem ferè plano collocata, sed etiam ad cometas in diversissimis cœlorum regionibus & in diversissimis distantis positos pertingit. Hæc igitur est natura cœporum gravitantium, ut vires suas edant ad omnes distantias in omnia corpora gravitantia. Inde verò sequitur, planetas & cometas universos se mutuò trahere, & in se mutuò graves esse: quod etiam confirmatur ex perturbatione jovis & saturni, astronomis non incognitâ, & ab actionibus horum planetarum in se invicem oriundâ; quin & ex motu illo lentissimo apsidum, qui supra memoratus est, quique à causâ consimili proficiscitur.

Eo demum pervenimus ut dicendum sit, & terram & solem & corpora omnia cœlestia, quæ solem comitantur, se mutuò attrahere. Singulorum ergo particulæ, quæque minimæ, vires suas attractivas habebunt, pro quantitate materiæ pollentes; quemadmodum su-

prà de terrestribus ostensum est. In diversis autem distantis; erunt & harum vires in duplicata ratione distantiarum reciproce: nam ex particulis hac lege trahentibus componi debere globos eadem lege trahentes, mathematicè demonstratur.

Conclusiones præcedentes huic innituntur Axiomati, quod à nullis non recipitur philosophis; effectuum scilicet ejusdem generis, quorum nempe quæ cognoscuntur proprietates eadem sunt, easdem esse causas & easdem esse proprietates quæ nondum cognoscuntur. Quis enim dubitat, si gravitas sit causa descensus lapidis in *Europa*, quin eadem sit causa descensus in *America*? Si gravitas mutua fuerit inter lapidem & terram in *Europa*, quis negabit mutuam esse in *America*? Si vis attractiva lapidis & terræ componatur, in *Europa*, ex viribus attractivis partium, quis negabit similem esse compositionem in *America*? Si attractio terræ ad omnia corporum genera & ad omnes distantias propagetur in *Europa*, quidni pariter propagari dicamus in *America*? In hac regula fundatur omnis philosophia: quippe quâ sublatâ nihil affirmare possimus de universis. Constitutio rerum singularum innotescit per observationes & experimenta: inde verò non nisi per hanc regulam de rerum universarum naturâ judicamus.

Jam cum gravia sint omnia corpora, quæ apud terram vel in cœlis reperiuntur, de quibus experimenta vel observationes institui licet; omnino dicendum erit, gravitatem corporibus universis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non sint extensa, mobilia & impenetrabilia; ita nulla concipi debere, quæ non sint gravia. Corporum extensio, mobilitas, & impenetrabilitas non nisi per experimenta, innotescunt; eodem planè modo gravitas innotescit. Corpora omnia de quibus observationes habemus, extensa sunt & mobilia & impenetrabilia: & inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus observationes non habemus, extensa esse & mobilia & impenetrabilia. Ita corpora omnia sunt gravia, de quibus observationes habemus: & inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus observationes non habemus, gravia esse. Si quis dicat corpora stellarum inerrantium non esse gravia, quandoquidem eorum gravitas nondum est observata; eodem argumento dicere licebit neque extensa esse, nec mobilia, nec impenetrabilia.

pēnetrabilia ; cum hæ fixarum affectiones nondum sint observatæ. Quid opus est verbis ? inter primarias qualitates corporum universorum vel gravitas habebit locum ; vel extensio ; mobilitas , & impenetrabilitas non habebunt. Et natura rerum vel rectè explicabitur per corporum gravitatem , vel non rectè explicabitur per corporum extensionem , mobilitatem , & impenetrabilitatem.

Audio nonnullos hanc improbare conclusionem , & de occultis qualitatibus nescio quid musitare. Gravitatem scilicet occultam esse quid , perpetuò argutari solent ; occultas verò causas procul esse ablegandas à philosophiâ. His autem facilè respondetur ; occultas esse causas , non illas quidem quarum existentia per observationes clarissimè demonstratur , sed has solum quarum occulta est & ficta existentia , nondum verò comprobata. Gravitatio ergo non erit occulta causa motuum cœlestium ; siquidem ex phænomenis ostensum est , hanc virtutem reverà existere. Hi potius ad occultas confugiunt causas , qui nescio quos vortices , materiæ cujusdam prorsus fictitiæ & sensibus omnino ignotæ , motibus iisdem regendis præficiunt.

Ideone autem gravitas occulta causa dicetur , eoque nomine rejicietur è philosophiâ , quod causa ipsius gravitatis occulta est & nondum inventa ? Qui sic statuunt , videant nequid statuunt absurdum , unde totius tandem philosophiæ fundamenta convellantur. Etenim causæ continuo nexu procedere solent à compositis ad simpliciora : ubi ad causam simplicissimam perveneris , jam non licebit ulterius progredi. Causæ igitur simplicissimæ nulla dari potest mechanica explicatio : si daretur enim , causa nondum esset simplicissima. Has tu proinde causas simplicissimas appellabis occultas , & exulare jubebis ? Simul verò exulabunt & ab his proximè pendentes & quæ ab illis porro pendent , usque dum à causis omnibus vacua fuerit & probè purgata philosophia.

Sunt qui gravitatem præter naturam esse dicunt , & miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam esse volunt , cum in physicâ præternaturales causæ locum non habeant. Huic ineptæ profus objectioni diluendæ , quæ & ipsa philosophiam subruit universam , vix operæ pretium est immorari. Vel enim gravitatem corporibus omnibus inditam esse negabunt : quod tamen dici non potest : vel

eo nomine præter naturam esse affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus atque ideò ex causis mechanicis originem non habeat. Dantur certè primariæ corporum affectiones; quæ quoniam sunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon & hæ omnes sint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint verò qualis sit deinde futura philosophia.

Nonnulli sunt quibus hæc tota physica cœlestis vel ideò minùs placet, quòd cum *Cartesii* dogmatibus pugnare & vix conciliari posse videatur. His suà licebit opinione frui; ex æquò autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem quam sibi concedi postulant. *NEWTONIANAM* itaque philosophiam, quæ nobis verior habetur, retinere & amplecti licebit, & causas sequi per phænomena comprobatas, potiùs quàm fictas & nondum comprobatas. Ad veram philosophiam pertinet, rerum naturas ex causis verè existentibus derivare: eas verò leges quærere, quibus voluit summus opifex hunc mundi pulcherrimum ordinem stabilire; non eas quibus potuit, si ita visum fuisset. Rationi enim consonum est, ut à pluribus causis, ab invicem nonnihil diversis, idem possit effectus proficisci: hæc autem vera erit causa, ex qua verè atque actu proficiscitur; reliquæ locum non habent in philosophiâ verâ. In horologiis automatis idem indicis horarii motus vel ab appenso pondere vel ab intus concluso elatere oriri potest. Quod si oblatum horologium reverà sit instructum pondere; ridebitur qui finget elaterem, & ex hypothesi sic præproperè confictâ motum indicis explicare suscipiet: oportuit enim internam machinæ fabricam penitiùs perscrutari, ut ita motûs propositi principium verum exploratum habere posset. Idem vel non absimile feretur iudicium de philosophis illis, qui materiâ quâdam subtilissimâ cœlos esse repletos, hanc autem in vortices indefinenter agi voluerunt. Nam à phænomenis vel accuratissimè satisfacere possent ex hypothesibus suis; veram tamen philosophiam tradidisse, & veras causas motuum cælestium invenisse nondum dicendi sunt; nisi vel has reverà existere, vel saltem alias non existere demonstraverint. Igitur si ostensum fuerit, universorum corporum attractionem habere verum locum in rerum naturâ; quinetiam ostensum fuerit, quâ ratione motus omnes cælestes abinde solutionem recipiant; vana fuerit & merito deridenda objectio,

objectio, si quis dixerit eosdem motus per vortices explicari debere, etiamsi id fieri posse vel maximè concesserimus. Non autem concedimus: nequeunt enim illo pacto phænomena per vortices explicari; quod ab auctore nostro abundè quidem & clarissimis rationibus evincitur; ut somnis plùs æquò indulgeant oporteat, qui ineptissimo figmento refarciendo, novisque porrò commentis ornando infelicem operam addicunt.

Si corpora planetarum & cometarum circa solem deferantur è vorticibus, oportet corpora delata & vorticum partes proximè ambientes eadem velocitate eademque cursûs determinatione moveri, & eandem habere densitatem vel eandem vim inertiae pro mole materiae. Constat verò planetas & cometas, dùm versantur in iisdem regionibus cœlorum, velocitatibus variis variâque cursûs determinatione moveri. Necessariò itaque sequitur, ut fluidi cœlestis partes illæ, quæ sunt ad easdem distantias à sole, revolvantur eodem tempore in plagas diversas cum diversis velocitatibus: etenim aliâ opus erit directione & velocitate, ut transire possint planetæ; aliâ, ut transire possint cometæ. Quod cùm explicari nequeat; vel fatendum erit, ~~universa~~ corpora cœlestia non deferri à materia vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos esse non ab uno eodemque vortice, sed à pluribus qui ab invicem diverfi sint, idemque spatium soli circumjectum pervadant.

Si plures vortices in eodem spatio contineri, & sese mutuò penetrare motibusque diversis revolvi ponantur; quoniam hi motus debent esse conformes delatorum corporum motibus, qui sunt summe regulares, & peraguntur in sectionibus conicis nunc valdè eccentricis, nunc ad circularum proximè formam accedentibus; jure quærendum erit, quâ fieri possit, ut iidem integri conserventur, nec ab actionibus materiae occurrentis per tot sæcula quicquam perturbentur. Sanè si motus hi fictitii sunt magis compositi & difficilius explicantur, quàm veri illi motus planetarum & cometarum; frustra mihi videntur in philosophiam recipi: omnis enim causa debet esse effectû suo simplicior. Concessa fabularum licentia, affirmaverit aliquis planetas omnes & cometas circumcingi atmosphæris, ad instar telluris nostræ; quæ quidem hypothesis rationi magis consentanea

\*\*\*\*

y ide.



videbitur quàm hypothesis vorticum. Affirmaverit deinde hias atmosphæras, ex naturâ suâ, circa solem moveri & sectiones conicas describere; qui sanè motus multò faciliùs concipi potest, quàm con- similis motus vorticum se invicem permeantium. Denique planetas ipsos & cometas circa solem deferri ab atmosphæris suis credendum esse statuat, & ob repertas motuum cœlestium causas triumphum agat. Quisquis autem hanc fabulam rejiciendam esse putet, idem & alteram fabulam rejiciet: nam ovum non est ovo similis, quàm hypothesis atmosphærarum hypothesi vorticum.

Docuit *Galileus*, lapidis projecti & in parabolâ moti deflectionem à cursu rectilineo oriri à gravitate lapidis in terram, ab occulta scilicet qualitate. Fieri tamen potest ut alius aliquis, nasi acutioris philosophus, causam aliam comminiscatur. Finget igitur illè materiam quandam subtilem, quæ nec visu, nec tactu, neque ullò sensu percipitur, versari in regionibus quæ proximè contingunt telluris superficiem. Hinc autem materiam, in diversas plagas, variis & plerumque contrariis motibus ferri, & lineas parabolicas describere contendet. Deinde vero lapidis deflectionem pulchrè sic expediet, & vulgi plausum merebitur. Lapis, inquit, in fluido illo subtili natat, & cursui ejus obsequendo, non potest non eandem unâ semitam describere. Fluidum verò movetur in lineis parabolicis; ergo lapidem in parabolâ moveri necesse est. Quis nunc non mirabitur acutissimum hujusce philosophi ingenium, ex causis mechanicis, materiâ scilicet & motu, phænomena naturæ ad vulgi etiam captum præclare deducens? Quis verò non subsannabit bonum illum *Galileum*, qui magno molimine mathematico qualitates occultas, è philosophia feliciter exclusas, denuò revocare sustinuerit? Sed pudet nugis diutius immorari.

Summa rei huc tandem redit: cometarum ingens est numerus; motus eorum sunt summè regulares, & easdem leges cum planetarum motibus observant. Moventur in orbibus conicis, hi orbis sunt valde admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes cœlorum partes, & planetarum regiones liberrimè pertranseunt, & sæpè contra signorum ordinem incedunt. Hæc phænomena certissimè confirmantur ex observationibus astronomicis: & per vortices nequeunt explicari. Imò, ne quidem cum vorticibus planetarum consistere possunt. Co-  
metarum.

cometarum motibus omninò locus non erit; nisi materia illa fictitia penitus è cœlis amoveatur.

Si enim planetæ circum solem à vorticibus devehuntur; vorticum partes, quæ proximè ambiunt unumquemque planetam, ejusdem densitatis erunt ac planeta; uti suprà dictum est. Itaque materia illa omnis quæ contigua est orbis magni perimetro, parèm habebit ac tellus densitatem: quæ verò jacet intrà orbem magnum atque orbem saturni, vel parèm vel majorem habebit. Nam ut constitutio vorticis permanere possit, debent partes minùs densæ centrum occupare, magis densæ longiùs à centro abire. Cum enim planetarum tempora periodica sint in ratione sesquuplicata distantiarum à sole, oportet partium vorticis periodos eandem rationem servare. Inde verò sequitur, vires centrifugas harum partium fore reciprocè ut quadrata distantiarum. Quæ igitur majore intervallo distant à centro, nituntur ab eodem recedere minore vi: unde si minùs densæ fuerint, necesse est ut cedant vi majori, quâ partes centro propiores ascendere conantur. Ascendent ergo densiores, descendant minus densæ, & locorum fiet invicem permutatio; donec ita fuerit disposita atque ordinata materia fluida totius vorticis, ut conquiescere jam possit in æquilibrio constituta. Si binæ fluida, quorum diversa est densitas, in eodem vase continentur; utique futurum est ut fluidum, cujus major est densitas, majore vi gravitatis infimum petat locum: & ratione non absimili omninò dicendum est, densiores vorticis partes majore vi centrifugâ petere supremum locum. Tota igitur illa & multò maxima pars vorticis, quæ jacet extrà telluris orbem, densitatem habebit atque adeò vim inertię pro mole materiæ, quæ non minor erit quàm densitas & vis inertię telluris: inde verò cometis trajectis orietur ingens resistentia, & valde admodum sensibilis; ne dicam, quæ motum eorundem penitus sistere atque absorbere posse meritò videatur. Constat autem ex motu cometarum prorsùs regulari, nullam ipsos resistentiam pati quæ vel minimùm sentiri potest; atque adeò neutiquam in materiam ullam incurfare, cujus aliqua sit vis resistendi, vel proinde cujus aliqua sit densitas seu vis inertię. Nam resistentia mediorum oritur vel ab inertia materiæ fluidæ, vel à defectu lubricitatis. Quæ oritur à defectu lubricitatis, admodum exigua est; & sanè vix observari potest in fluidis vulgò notis, nisi valdè

tenacia fuerint ad instar olei & mellis. Resistentia quæ sentitur in aëre, aqua, hydrargyro, & hujusmodi fluidis non tenacibus, ferè tota est prioris generis, & minui non potest per ulteriorem quemcunque gradum subtilitatis, manente fluidi densitate vel vi inertiae, cui semper proportionalis est hæc resistentia; quemadmodum clarissimè demonstratum est ab auctore nostro in peregregiâ resistentiarum theoriâ, quæ paulò nunc accuratiùs exponitur, hac secundâ vice, & per experimenta corporum cadentium plenius confirmatur.

Corpora progrediendo motum suum fluido ambienti paulatim communicant, & communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Est itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus verò communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, est ut fluidi densitas; ergo retardatio seu resistentia erit ut eadem fluidi densitas; neque ullo pacto tolli potest, nisi à fluido ad partes corporis posticas recurrente restituatur motus amissus. Hoc autem dici non poterit, nisi impressio fluidi in corpus ad partes posticas æqualis fuerit impressioni corporis in fluidum ad partes anticas; hoc est, nisi velocitas relativa quâ fluidum irruit in corpus à tergo, æqualis fuerit velocitati quâ corpus irruit in fluidum, id est, nisi velocitas absoluta fluidi recurrentis duplo major fuerit quàm velocitas absoluta fluidi propulsi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli potest fluidorum resistentia, quæ oritur ab eorundem densitate & vi inertiae. Itaque concludendum erit, fluidi coelestis nullam esse vim inertiae, cum nulla sit vis resistendi: nullam esse vim quâ motus communicetur, cum nulla sit vis inertiae: nullam esse vim quâ mutatio quælibet vel corporibus singulis, vel pluribus inducatur, cum nulla sit vis quâ motus communicetur; nullam esse omninò efficaciam, cum nulla sit facultas mutationem quælibet inducendi. Quidni ergo hanc hypothesin, quæ fundamento planè destituitur, quæque naturæ rerum explicandæ ne minimùm quidem inservit, ineptissimam vocare liceat & philosopho prorsus indignam. Qui coelos materiâ fluidâ repletos esse volunt, hanc verò non inertem esse statuunt; hi verbis tollunt vacuum, re ponunt. Nam cum hujusmodi materia fluida ratione nullâ secerni possit ab inani spatio; disputatio tota fit de rerum nominibus, non de naturis. Quod si aliqui sint adeò usque dediti materiæ, ut spatium à corporibus vacuum nullo pacto admittendum

dum credere velint; videamus quo tandem oporteat illo pervenire.

Vel enim dicent hanc, quam confingunt, mundi per omnia pleni constitutionem ex voluntate Dei profectam esse, propter eum finem, ut operationibus naturæ subsidium præsens haberi posset ab æthere subtilissimo cuncta permeante & implente; quod tamen dici non potest, siquidem jam ostensum est ex cometarum phænomenis, nullam esse hujus ætheris efficaciam: vel dicent ex voluntate Dei profectam esse, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, siquidem diversa mundi constitutio eodem argumento pariter stabiliri posset: vel denique non dicent ex voluntate Dei profectam esse, sed ex necessitate quâdam naturæ. Tandem igitur delabi oportet in fæces sordidas gregis impurissimi. Hi sunt qui somniant fato universa regi, non providentiâ; materiam ex necessitate suâ semper & ubique extitisse, infinitam esse & æternam. Quibus positis; erit etiam undiquaque uniformis: nam varietas formarum cum necessitate omnino pugnat. Erit etiam immota: nam si necessariò moveatur in plagam aliquam determinatam, cum determinata aliqua velocitate, pari necessitate movebitur in plagam diversam cum diversa velocitate; in plagas autem diversas, cum diversis velocitatibus, moveri non potest; oportet igitur immotam esse. Neutiquam profectò potuit oriri mundus, pulcherrimâ formarum & motuum varietate distinctus, nisi ex liberrimâ voluntate cuncta providentis & gubernantis Dei.

Ex hoc igitur fonte promanarunt illæ omnes quæ dicuntur naturæ leges: in quibus multa sanè sapientissimi consilii, nulla necessitatis apparent vestigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, sed observando atque experiendo addiscere debemus. Qui veræ physicæ principia legesque rerum, sola mentis vi & interno rationis lumine fretum, invenire se posse confidit; hunc oportet vel statuere mundum ex necessitate fuisse, legesque propositas ex eadem necessitate sequi; vel si per voluntatem Dei constitutus sit ordo naturæ, se tamen, homuncionem misellum, quid optimum factu sit perspectum habere. Sana omnis & vera Philosophia fundatur in phænomenis rerum: quæ si nos vel invitos & reluctantes ad hujusmodi principia deducunt, in quibus clarissimè cernuntur consilium optimum & dominium summum sapientissimi & potentissimi entis; non erunt hæc ideo non admittenda principia, quod quibusdam forsan hominibus minus grata sunt fu-

tura. His vel miracula vel qualitates occultæ dicantur, quæ displicent : verum nomina malitiosè indita non sunt ipsis rebus vitio vertenda ; nisi illud fateri tandem velint, utique debere philosophiam in atheismo fundari. Horum hominum gratiâ non erit labefactanda philosophia, siquidem rerum ordo non vult immutari.

Obtinebit igitur apud probos & æquos iudices præstantissima philosophandi ratio, quæ fundatur in experimentis & observationibus. Huic verò, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas, ab hoc opere præclaro illustrissimi nostri auctoris ; cujus eximiam ingenii felicitatem, difficillima quæque problemata enodantis, & ad ea porro pertingentis ad quæ nec spes erat humanam mentem asurgere potuisse, meritiò admirantur & suspiciunt quicumque paulò profundius in hisce rebus versati sunt. Clausis ergo reſeratis, aditum nobis aperuit ad pulcherrima rerum mysteria. Systematis mundani compagem elegantissimam ita tandem patefecit & penitus perspectandam dedit, ut nec ipse, si nunc revivisceret, rex *Alphonſus* vel simplicitatem vel harmoniæ gratiam in ea desideraret. Itaque naturæ majestatem propius jam licet intueri, & dulcissima contemplatione frui, conditorem verò ac dominum universorum impensius colere & venerari, qui fructus est philosophiæ multò uberimus. Cæcum esse oportet, qui ex optimis & sapientissimis rerum structuris non statim videat fabricatoris omnipotentis infinitam sapientiam & bonitatem : insanum, qui profiteri nolit.

Extabit igitur eximium *NEWTONI* opus adversus atheorum impetus munitissimum præsidium : neque enim alicundè felicitis, quàm ex hac pharetra, contra impiam catervam tela deprompseris. Hoc sensit pridem, & in pereruditis concionibus anglicè latinèque editis, primus egregiè demonstravit vir in omni literarum genere præclarus, idemque bonarum artium fautor eximius *RICHARDUS BENTLEYUS*, seculi sui & Academiae nostræ magnum ornamentum, Collegii nostri *S. Trinitatis* magister dignissimus & integerrimus. Huic ego me pluribus nominibus obstrictum fateri debeo : huic & tuas quæ debentur gratias, lector benevole, non denegabis. Is enim, cum à longo tempore celeberrimi auctoris amicitia intimâ frueretur, ( qua etiam apud posteros censeretur non minoris æstimâ, quàm propriis scriptis, quæ literato orbi in deliciis sunt, inclarescere ) ami-

q̄ simul famæ & scientiarum incremento consuluit. Itaque cum exemplaria prioris editionis rarissima admodum & immani pretio coëmenda superessent; suavit ille crebris efflagitationibus, & tantum non objurgando perpulit denique virum præstantissimum, nec modestiâ minùs quàm eruditione summâ insignem; ut novam hanc operis editionem, per omnia eliminatam denuò & egregiis insuper accessionibus ditatam, suis sumptibus & auspiciis prodire pateretur: mihi verò, pro jure suo, pensum non ingratum demandavit, ut quam posset emendatè id fieri curarem.

*Cantabrigiæ,*  
M<sup>aii</sup>. 12. 1713.

ROGERUS COTES Collegii *S. Trinitatis* socius,  
astronomiæ & philosophiæ experimentalis  
professor. *Plumianus*.

## AUCTORIS PRÆFATIO

I N

## EDITIONEM TERTIAM.

**I**N editione hacce tertiâ, quam Henricus Pemberton M. D. vir harum rerum peritissimus curavit, nonnulla in libro secundo de resistentia mediorum paulò fusiùs explicantur quàm antea, & adduntur experimenta nova de resistentia gravium quæ cadunt in aëre. In libro tertio argumentum quo lunam in orbe suo per gravitatem retineri probatur, paulò fusiùs exponitur: & novæ adduntur observationes de proportionem diametrorum Jovis ad invicem à D. Poundio factæ. Adduntur etiam observationes aliquot cometæ illius qui anno 1680. apparuit, à D. Kirk mense Novembri in Germania habitæ, quæ nuper ad manus nostras venerunt, & quarum ope constet quàm propè orbes parabolici motibus cometarum respondent. Et orbita cometæ illius, computante Halleio, paulò accuratiùs determinatur quàm antea, idque in ellipsi. Et ostenditur cometam in hac orbita elliptica, per novem cælorum signa, non minùs accuratè cursum peregrisse, quàm solent planetæ in orbitis ellipticis per astronomiam definitis moveri. Orbis etiam cometæ qui anno 1723. apparuit, à D. Bradleio Astronomiæ apud Oxonienses Professore computatus adjicitur.

IS. NEWTON.

Dabam Londini  
Jan. 12. 1725 - 6

# PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA. DEFINITIONES.

## DEFINITIO I. (\*)

*Quantitas Materiæ est mensura ejusdem orta ex illius Densitate & Magnitudine conjunctim.*



*Tom. I.*

*A*

*tionem*

ER, densitate duplicata, in spatio etiam duplicato fit quadruplus; in triplicato sextuplus. Idem intellige de Nive & Pulveribus per compressionem vel liquesfac-

*Licet primæ definitiones NEWTONIANÆ vix aliquam postulare videantur explicatorem; in ipso tamen operis nostri limine, nonnulla levioris momenti præmittenda judicamus, quæ ad majora viam sternunt. Prima quæ in posterum sæpius recurrent Mechanicæ principia inserere non abs re erit, tum ut Lectorum laborem pariamus, tum ut magis continua seruetur nostrarum demonstrationum series.*

(\*) 1. Materia est substantia trina divisible, mobilis, divisibilis. Spatium præmentione prædicta, solida seu impenetrabile, est illa immensa, penetrabilis, sui



**DEFINITIONES.** tionem condensatis. Et par est ratio corporum omnium, quæ per causas quasçunque diversimodè condensantur. Medii interea, si quod fuerit; interstitia partium liberè pervadentis, hîc nullam rationem habeo. Hanc autem Quantitatem sub nomine Corporis vel Massæ in sequentibus passim intelligo. Innotescit ea per corporis cujusque Pondus. Nam (<sup>b</sup>). Pondus proportionalem esse reperi per experimenta Pendulorum accuratissimè instituta, uti posthac docebitur.

D E-

ubique similis, immobilis extensio, in quâ corpora omnia liberrimè moveri intelligimus. In corpore dato materiæ quantitatem seu massam, à corporis magnitudine, aut volumine seu mole distinguere oportet. Materiæ quantitas est aggregatum, seu summa omnium materiæ particularum quibus compositum est corpus. Volumen, seu Magnitudo, est tota trina dimensio sub exteriori corporis superficie contenta. Porro inter solidas seu impenetrabiles corporis particulas sive elementa, plura esse possunt disseminata foramina seu pori, vel omni materiâ vacui, vel quos aliena materia liberè pervadat; sic ær subtilior spongiæ poros permeat, & ad spongiæ materiam non pertinet. Si nulla sint inter solidas corporis partes admixta foramina, Massa & volumen non differunt; at si poris pertusum sit corpus, Massam volumen superat.

2. Densitas est ratio massæ corporis ad illius volumen; adeò ut sub æqualibus voluminibus, densitates sint in ratione directâ massarum; & eadem seu æquali manente in diversis corporibus massâ, densitates sint in ratione voluminum reciproca. Itaque si densitas dicatur  $D$ ; massa  $M$ , volumen  $V$ ; erit  $D = M : V$ ; seu densitas exponi potest per massam ad volumen applicatam, sive, quod idem est, densitas erit ut massa per volumen divisa. Si itaque  $D$  &  $M : V$ , per  $V$  multiplicentur, erit  $DV = M$ , seu massa aut quantitas materiæ est ut densitas in volumen ducta; Massa igitur exponi potest per factum ex densitate in volumen. Quare si  $DV$  &  $M$ , per  $D$  dividantur, erit  $V = M : D$ , seu volumen est ut massa ad densitatem applicata, sive vo-

lumen est in ratione compositâ ex directâ ratione massæ & inversâ densitatis. Si densitates fuerint æquales, seu si  $m : v = M : V$ , patet massas esse inter se ut volumina directè. His positis, facillè intelligitur massam æris, densitate duplicatâ, in spatio etiam duplicato fieri quadruplam, nam ob duplicatam densitatem in eodem spatio dupla est massa; ergò duplicato etiam spatio massa rursus duplicatur & fit quadrupla.

(<sup>b</sup>) 3. Massam esse pondus proportionalem, ob frequentissimum hujusce veritatis usum, hîc breviter ostendimus. Gravia omnia, ut notissimis constat experimentis, per lineas ad terræ superficiem perpendiculares ac proinde ad sensum parallelas descendunt, & in tubis ære vacuis plumbum levissimaque pluma eadem celeritate cadunt, seu æqualia spatia, æqualibus temporibus cadendo percurreunt. Nec successu caret experimentum, etiam si coarctatis ac diductis poris vel superficiebus, corporis figura mutetur; dummodò eadem remaneat massa, idem semper servatur pondus; ex quo sequitur gravitatem non solum exterioribus corporis partibus, sed & interioribus æque inesse; alioquin ejusdem corporis sub diversis superficiebus, idem non remaneret pondus, nec eadem foret sub diversis figuris celeritas; mutata enim superficie, partes quæ antè interiores erant, exteriores fiunt & viceversa; æqualia igitur massæ elementa æquali urgentur vi gravitatis, seu æqualis sunt ponderis; crescit ergò totius massæ pondus ut elementorum æqualium numerus, seu crescit pondus ut massa, sive massa est pondus proportionalis.

## DEFINITIO II. (°)

*Quantitas Motus est mensura ejusdem orta ex Velocitate & Quantitate Materiæ conjunctim.*

Motus totius est summa motuum in partibus singulis ; ideo-

A 2

que

(°) 4. *Locus corporis est pars spatii, quam corpus occupat. Motus est continua loci mutatio. Tria in motu consideranda sunt, corpus quod movetur seu mobile, spatium quod percurritur, & tempus quo percurritur. Spatium percursum est linea quam mobile instar puncti consideratum describere intelligitur. Directio motus est linea recta quam mobile describit aut describere nititur. Motus conspirantes sunt quorum directiones congruunt, aut saltem sunt parallelæ & ad eandem partes tendunt. Motus contrarii seu directè oppositi dicuntur quorum directiones congruunt quidem, aut saltem sunt parallelæ, sed in oppositas partes vergunt. Motus æqualis seu uniformis est, quo mobile æqualia spatia æqualibus temporibus percurrit. Motus acceleratus, quo mobile majora continuò spatia æqualibus temporibus describit. Motus retardatus quo mobile per minora continuò spatia æqualibus temporibus fertur.*

5. *Celeritas seu velocitas, est ea corporis moti affectio quæ aptum redditur, datum spatium dato tempore æqualiter percurrendi. Est igitur celeritatis mensura in motu æquali querenda, seu, ut habeatur quantitas velocitati proportionalis, querendum est spatium quod corpus dato tempore percurreret, si illius motus constans atque æqualis permaneret. Porro manifestum est celeritatem esse duplam, triplam, si temporibus æqualibus duplum, vel triplum percurratur spatium; & contrà celeritatem esse subduplam, subtriplam, si æqualia spatia, duplo, triplo tempore percurrantur; ergò manentibus temporibus, celeritates sunt ut spatia; & manentibus spatiis, celeritates sunt inversè ut tempora; quare variantibus temporibus atque spatiis, celeritates semper sunt in ratione composita ex directâ spa-*

*tiorum & reciproca temporum; seu si celeritas dicatur C, spatium S, tempus T; erit C ut S : T, five  $C = S : T$ , seu celeritas exponi potest per spatium ad tempus applicatum, & multiplicando utrinque per T, erit  $CT = S$ , seu spatium est ut celeritas in tempus ducta, & dividendo utrinque per C, erit  $T = S : C$ , seu tempus est ut spatium ad celeritatem applicatum. Si duorum mobilium celeritates C, c, seu S : T; s : r, fuerint æquales, id est  $S : T = s : r$ , erit  $S : s = T : r$ , seu spatia sunt ut tempora.*

6. *Jam verò cum in motu nihil nisi corpus, spatium percursum & tempus considerentur, & ratio spatii ad tempus celeritatem exponat (5), satis evidens est ad totum corporis motum seu quantitatem motus inveniendam, solius massæ & celeritatis habendam esse rationem. Cum autem motus totius corporis sit æqualis summæ motuum singularum Massæ partium, seu elementorum, patet manente celeritate, motum totius massæ crescere prout crescit numerus elementorum massæ æqualium, seu quantitatem motus esse proportionalem massæ; manente verò massâ, quantitas motus est ut velocitas; nam si corpus idem duplum spatium eodem tempore percurrit, duplus est illius motus, si triplum, triplus &c. Siquidem manentibus tempore & massâ, nulla est alia quam spatiorum varietas, & motus sunt ut spatia; sed spatia temporibus æqualibus percursâ sunt ut celeritates (5), ergo quantitates motus sunt etiam ut celeritates. Quare variantibus massis atque celeritatibus, motus quantitas est semper ut massa in celeritatem ducta, seu in ratione compositâ massæ & celeritatis; si itaque motus quantitas dicatur Q; Massa M, celeritas C; erit Q ut M C, quod ita exponimus  $Q = M C$ , dividendo utrinque*

DEFINITIONES. que in corpore duplo majore æquali cum velocitate duplus est, & duplâ cum velocitate quadruplus.

## DEFINITIO III. (d)

*Materiæ vis insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.*

Hæc semper proportionalis est suo corpori, neque differt quicquam ab inertia massæ, nisi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ, fit ut corpus omne de statu suo vel quiescendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis insita nomine significantissimo vis Inertiæ dici possit. Exercet verò corpus hanc vim solummodo in mutatione status sui per vim aliam in se impressam facta; estque exercitium illud sub diverso respectu & Resistentiæ & Impetus: resistentiæ, quatenus corpus ad conservandum statum suum reluctatur vi impressæ; impetus, quatenus corpus idem, vi resistentis obstaculi difficul-

que per  $M$ , & deinde per  $C$ , erit  $C = Q : M$ ; &  $M = Q : C$ ; Seu celeritas est ut quantitas motus ad massam applicata, & massa vicissim, ut quantitas motus per celeritatem divisa. Si quantitates motus  $Q$ ,  $q$ , seu  $MC$ ,  $mc$ , fuerint æquales, erit  $MC = mc$ , &  $M : m = c : C$ , seu massæ sunt reciprocè ut celeritates; & viceversâ si  $M : m = c : C$ , erit  $MC = mc$ , seu si massæ sunt in ratione velocitatum reciprocâ, quantitates motus sunt æquales. Præterea cum, (5), sit  $C = S : T$ , erit etiam  $Q = MS : T$ , seu quantitates motus sunt in ratione compositâ ex directis rationibus massæ & spatii & inversâ temporis; invenietur etiam  $QT = MS$ ,  $M = QT : S$ ;  $S = QT : M$ ,  $T = MS : Q$ .

Pari facilitate demonstrari possunt cætera theoremata quæ de motuum comparatione, apud scriptores mechanicos fusi reperiuntur.

(d) 7. Vis duplex est, activa & passiva; Activa est potentia motum efficiendi;

Passiva est potentia motum recipiendi vel amittendi; vis activa subdividi solet in vim vivam quæ cum motu actuali conjuncta est, & in vim mortuam quæ est tantum conatus seu sollicitatio ad motum, & ex quâ motus actualis non producitur, nisi vis mortuæ actio aliquandiu in corpore continuata fuerit. Sic vis gravitatis in globo qui ex filo pendet vel plano horizontali incumbit, est vis mortua, quâ quidem actu non movetur globus, sed conatur moveri filumque tendit, aut planum premit. Si filum abruptatur, vel planum sustentans auferatur, tunc continuâ gravitatis actione globus motu accelerato cadit. Vis quâ corpus in circuli peripheriâ motum, filum centro alligatum tendit, & quâ proinde conatur à centro recedere est quoque vis mortua.

8. Inest omni materiæ vis insita passiva, seu inertia, ex quâ nullus motus, nullaue tendentia ad motum resultat, sed quæ consistit in renixu quo corpus quodlibet, cuilibet vi externæ mutationem

# PRINCIPIA MATHEMATICA.

5

ficulter cedendo, conatur statum obstaculi illius mutare. Vul-  
gus resistantiam quiescentibus & impetum moventibus tribuit :  
sed motus & quies, uti vulgo concipiuntur, respectu solo dis-  
tinguuntur ab invicem; neque semper verè quiescunt quæ vul-  
go tanquam quiescentia spectantur.

DEFINI-  
TIONES.

## DEFINITIO IV. (c)

*Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum. ejus statum  
vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.*

Consistit hæc vis in actione sola, neque post actionem per-  
manet in corpore. Perseverat enim corpus in statu omni no-  
vo per solam vim inertię. Est autem vis impressa diversarum  
originum, ut ex Ictu, ex Pressione, ex vi Centripetâ.

## DEFINITIO V.

*Vis Centripeta est, quâ corpora versus punctum aliquod tanquam  
ad Centrum undique trahuntur, impelluntur,  
vel utcumque tendunt.*

Hujus generis est Gravitas, quâ corpora tendunt ad cen-  
trum

A 3

nem statûs, id est, motûs vel quietis in-  
ducere conanti resistit. Etenim nulla po-  
test esse actio corporis in corpus, quin  
luctatio quædam, ut loquitur Clar. Her-  
manus in *Phoronomiâ*, fiat inter corpus  
agens & patiens, dum alterum alteri re-  
sistit; alicui corpus motum posset sine  
motûs proprii detrimento, aliud quod-  
cumque movere. Vis illa inertię eadem  
est in corporibus motis & quiescentibus;  
tam enim resistunt corpora actioni quâ à  
quiete ad motum concitantur, quàm ac-  
tioni quâ à motu ad quietem reducuntur.  
Eadem quippè vis requiritur ad motum  
datum producendum & ad eundem extin-  
guendum. Quia autem vis illa inertię ea-  
dem in omnibus æqualibus materiæ par-  
tibus reperitur, consequens est ut sit ma-  
terię proportionalis; dupla in massâ dupli-  
catâ, tripla in triplicatâ. Majoribus etiam

mutationibus corpora magis resistunt quam  
minoribus, estque resistantia actualis mag-  
nitudini mutationis proportionalis.

(c) 9. Nihil fit sine causâ; undè om-  
ne corpus ut potè iners & passivum (8)  
in suo quocumque statu perseverat, nisi  
causâ aliquâ, seu vi externâ, statum suum  
mutare cogatur; cum igitur vis aliqua  
in corpus actu agit; vis impressa seu ac-  
tio mutat quidem corporis statum, sed  
cessante illius vis actione corpus in  
novo statu per illam actionem recep-  
to perseverat solâ vi inertię passivâ, quâ  
fit ut sine novâ vi externâ statum suum  
mutare nullâ ratione possit; adeoque si  
semel movetur, sibi relictum, perpetuò  
atque æquabiliter per lineam rectam mo-  
vebitur, seu secundum directionem quâ  
impulsus fuerit & quâ movebatur, dum  
actio vis externę cessavit.



Quo minor fuerit ejus gravitas pro quantitate materiæ, vel major velocitas quâcum projicitur, eo minus deviat a cursu rectilineo & longius perget. Si Globus plumbeus, data cum velocitate secundum lineam horizontalem a montis alicujus vertice vi pulveris tormentarii projectus, pergeret in linea curva ad distantiam duorum milliarum, priusquam in terram decideret: hic dupla cum velocitate quasi duplo longius pergeret, & decupla cum velocitate quasi decuplo longius: si modo aeris resistentia tolleretur. Et augendo velocitatem augeri posset pro lubitu distantia in quam projiceretur, & minui curvatura lineæ quam describeret, ita ut tandem caderet ad distantiam graduum decem vel triginta vel nonaginta; vel etiam ut terram totam circumiret, vel denique ut in cœlos abiret & motu abeundi pergeret in infinitum. Et eadem ratione, quâ Projectile vi gravitatis in orbem flecti posset & terram totam circumire, potest & Luna vel vi gravitatis, si modo gravis sit, vel aliâ quâcumque vi, quâ in terram urgeatur, retrahi semper a cursu rectilineo terram versus, & in orbem suum flecti: & sine tali vi

DEFINITIONES.

Luna

curvam retrahitur, eò minus a tangente deviat corpus, adeoque curva quam motu suo describit, ad tangentem seu rectam lineam propius accedit. Econtrâ decrescente vi aut celeritate secundum directionem tangentis, aut crescente vi alterâ quæ a tangente deflectit, corpus a motu rectilineo magis retrahitur, & major fit lineæ curvatura. Nam effectus sunt causis suis proportionales; est autem motus per tangentem rectilineus, effectus vis secundum directionem tangentis, & deviatio a tangente, effectus vis illius quæ a tangente retrahit.

11. Sit terræ circumferentia  $DQC$ , illiusque centrum  $T$ , ex quo vim ad centrum trahentem per totum circumquaque spatium propagari fingamus, aut, si magis placuerit, supponamus esse vim per totum spatium diffusam, quâ corpora omnia secundum directionem radiorum,  $ET$ ,  $AT$ , ad centrum  $T$  urgeantur, & ex vertice  $E$  montis  $ED$  projiciatur corpus juxta directionem rectæ  $EF$  ad

$E$   $T$ , normalis; corpus illud hæc solâ vi impressâ æquabiliter per rectam  $EF$  moveretur (9); at vi centripetâ seu vi tendente ad centrum  $T$  ab illâ rectâ perpetuò retrahitur & cogitur incedere in curvâ aliquâ  $EQ$  quam tangit in  $E$  recta  $EF$  (10); augendo vim impressam secundum directionem tangentis,  $EF$ , curva  $EQ$ , ad tangentem  $EF$ , propius accedit, adeò ut corpus variis & successivè crescentibus celeritatibus projectum, terram tardius semper attingat; deinde circa eam revolvatur, tandemque in infinitum abeat. Ut igitur corpus per rectam  $EF$ , datâ velocitate projectum, curvam datam  $EQ$  describat, certa ac determinata vis centripeta requiritur; & viceversâ datâ velocitate secundum rectam  $E$  seu  $EF$ , & vi centripetâ etiam datâ, corpus nonnisi certam ac determinatam curvam  $EQ$  potest describere; & mathematicorum est ex datis velocitate per tangentem  $EF$  & curvâ  $EQ$  quam corpus describit, invenire vim centri-

tri-

## 8 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DEFINITIONES. Luna in orbe suo retineri non potest. Hæc vis, si justo minor esset, non satis flecteret Lunam de cursu rectilineo: si justo major, plus satis flecteret, ac de orbe suo terram versus deduceret. Requiritur quippe, ut sit justæ magnitudinis: & Mathematicorum est invenire Vim, quâ corpus in dato quovis orbe datâ cum velocitate accuratè retineri possit; & vicissim invenire viam curvilineam, in quam corpus è dato quovis loco datâ cum velocitate egressum a datâ vi flectatur. Est autem vis hujus centripetæ Quantitas trium generum, Absoluta, Acceleratrix, & Motrix.

### DEFINITIO VI. (8)

*Vis centripetæ Quantitas Absoluta est mensura ejusdem major vel minor pro Efficacia causæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.*

Ut vis Magnetica pro mole magnetis vel intensiōe virtutis major in uno magnete, minor in alio.

### DEFI-

tripetam; quâ a tangente retrahitur & in orbitâ suâ retinetur, & reciprocè ex datâ velocitate per tangentem & vi centripetâ, curvam invenire; quæ duo NEWTONUS mirâ sagacitate & elegantia perfecit.

(8) 12. In centro T existere supponatur corpus, ex quo per omne spatium diffundatur vis, quæ juxta directionem radiorum AT, ET, HT, versùs centrum, aut a centro versùs spatia circumposita, juxta directionem radiorum TA, TE, TH, agat; in 1<sup>o</sup>. casu vis illa centripeta, in 2<sup>o</sup>. vis centrifuga, in utroque vis centralis dicitur.

Hæc vis in centro considerata duplici præsertim ratione variare potest; Si enim corpus quod centrum occupat, & cui vis

inest, in sua æqualia elementa divisum intelligatur, & vis sit singulis elementis æqualis ejusdemque constanter intensiōis; vis totius corporis centralis, seu vis centralis quantitas absoluta, erit massæ seu summæ elementorum proportionalis. At si manente eadem corporis centralis massâ, vis temper manens æqualis in singulis elementis æqualibus intensivè crescat vel decrescat, vis tota corporis centralis seu vis centralis quantitas absoluta, erit proportionalis intensiōi vis in singulis elementis existentis; quare variantibus massâ & vi singulorum elementorum, vis centralis quantitas absoluta erit in ratione compositâ massæ & intensiōis vis in singulis elementis æqualibus.

*Vis centripetæ Quantitas Acceleratrix est ipsius mensura Velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.*

Uti Virtus magnetis ejusdem major in minori distantia, minor in majori: vel vis Gravitans major in vallibus, minor in cacuminibus altorum montium, atque adhuc minor (ut posthac patebit) in majoribus distantis à globo terræ; in æqualibus autem distantis eadem undique, propterea quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) sublata Aeris resistentia, æqualiter accelerat.

Tom. I.

B

DE-

(<sup>h</sup>) 13. Si vis centralis non amplius in centro, sed in quacunque à centro distantia consideretur, possumus in variis illis à centro distantis superficies sphericas fingere, quarum commune centrum sit T, & vis centralis in illis distantis seu superficiebus sphericis considerata, dicitur vis acceleratrix. Illius autem quantitas erit proportionalis celeritati quam dato seu constante tempore in singulis materię elementis à centro æquidistantibus producat; nam si supponamus vim illam constantem in elementa materię continuò agere, eo major erit quo major erit velocitas dato tempore genita, ita ut si tempore æquali dupla generetur velocitas, dupla quoque fit vis, cum velocitas illa fit illius vis effectus plenus. Si constans maneat celeritas à vi acceleratrice genita, erit vis in ratione inversa temporis quo celeritas illa producit, nam si eadem celeritas tempore subduplo producat, vis duplicatur. Quare si manente vi constante, celeritas & tempus variant, erit vis acceleratrix in ratione composita ex directa celeritatis genitæ & reciproca temporis. Si igitur vis acceleratrix dicatur, G; celeritas producta C; tempus quo producit, T, erit  $G = C: T$ , &  $G T = C$ , &  $T = C: G$ . Licet autem variet vis acceleratrix, eadem tamen est illius mensura, modò celeritas nascens seu initio motus tempore quam minimo producta con-

sideretur, tunc enim vis agit uniformiter.

14. Si vis aliqua per radios divergentes in medio non resistente diffundatur, vis acceleratrix decrescit in ratione duplicata distantiarum à centro; nam quia vis illa, ex hyp., in medio non resistente propagatur, nullus intercipitur radius, nec vis singulorum minuitur, adeoque radii qui in distantia T L, per hemisphærium à semicirculo D L C descriptum diffundebantur, in distantia, T K per hemisphærium E K H propagantur; est autem vis acceleratrix ut radiorum densitas, & radiorum densitas est reciprocè ut superficies hemisphæriorum à semicirculis descriptorum; nam radiorum densitas est ut summa seu numerus radiorum per superficiem quam occupant divisi; hinc enim summa radiorum est ut massa, superficies verò cui insunt, ut volumen. Verum cum per hyp., idem numerus radiorum superficies singulorum hemisphæriorum occupet, erit densitas radiorum in ratione inversa illarum superficierum in quavis à centro distantia descriptarum; illæ autem superficies sunt in ratione duplicata distantiarum à centro; ergò & vis acceleratrix est in ratione duplicata distantiarum à centro reciprocè. Egregium illud theorema, ut ex demonstratione patet, omnem excludit mediū resistentiam; quare ut in physicis valeat, mediū resistentia in

com-



## DEFINITIO VIII. (1)

*Vis centripeta Quantitas Motrix est ipſus meſura proportionalis Motui, quem dato tempore generat.*

Uti Pondus majus in majore corpore, minus in minore; & in corpore eodem majus prope terram, minus in cœlis. Hæc Quantitas est corporis totius centripetentia seu propensio in centrum, & (ut ita dicam) Pondus; & innotescit semper per vim ipsi contrariam & æqualem, quâ descensus corporis impediri potest.

Hæc virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires motrices, acceleratrices, & absolutas; & distinctionis gratia referre ad Corpora, centrum petentia, ad corporum Loca, & ad Centrum virium: nimirum vim motricem ad Corpus, tanquam conatum totius in centrum ex conatibus omnium partium compositum; & vim acceleratricem ad Locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca singula in circuitu diffusam, ad movenda corpora quæ in ipsis sunt; vim autem absolutam ad Centrum, tanquam causa ali-

quæ

computum venire debet. Hæc autem virium seu qualitatum è centro emanantium theoria ad majorem universalitatem reduci potest, si vis in singulis radiis variè propagari supponatur, aut etiam si per lineas curvas diffundi singatur. Sed hæc fusiùs prosequi præſentis non est instituti.

(1) 15. Si vis centripeta in corpore ad centrum propulſo conſideretur; ut totus illius corporis in centrum conatus seu vis centripetæ quantitas motrix habeatur, ducenda est massa in vim acceleratricem; nam vis motrix totius corporis componitur ex omnibus viribus, quibus singula æqualia elementa urgentur, adeoque ex vi acceleratrice toties sumptâ quot sunt in corpore æqualia materiæ elementa, sive ex vi acceleratrice in massam ductâ. Supponimus enim singula elementa æqualia, æquali vi acceleratrice urgeri. Sed vis acceleratrix est ut celeritas dato tempo-

re genita, (13), ergo vis centripetæ quantitas motrix est ut massa in illam celeritatem ducta, seu ut quantitas motûs, dato tempore producta. Si igitur vis acceleratrix dicatur,  $G$ ; massa,  $M$ , vis motrix,  $p$ , erit  $p$ , ut  $MG$ , &  $M$ , ut  $p : G$ , &  $G$ , ut  $p : M$ , seu massa est ut vis motrix per vim acceleratricem divisa, & vis acceleratrix, ut vis motrix per massam divisa. Si duæ fuerint vires motrices  $P$  &  $p$ , seu  $MG$ , &  $mg$ , æquales, erit  $M : m = g : G$ , seu massæ sunt ut vires acceleratrices reciproce; & viceversâ, si  $M : m = g : G$ , erit  $mg = MG$ , seu si massæ sunt reciprocè ut vires acceleratrices, vires motrices sunt æquales. Porro cum vires acceleratrices sint ut celeritates dato tempore genitæ (13), in superioribus proportionibus loco virium acceleratricium celeritates illæ substitui possunt.

## PRINCIPIA MATHEMATICA. II

quæ præditum, sine quâ vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; sive causa illa sit corpus aliquod centrale (quale est Magnes in centro vis magneticæ, vel Terra in centro vis gravitantis) sive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus duntaxat est hic conceptus. Nam virium causas & sedes Physicas jam non expendo. DEFINITIONES.

Est igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate & ex quantitate materiæ, & vis motrix ex vi acceleratrice & ex quantitate ejusdem materiæ conjunctim. Nam summa actionum vis acceleratricis in singulas corporis particulas est vis motrix totius. Unde juxta superficiem Terræ, ubi gravitas acceleratrix seu vis gravitans in corporibus universis eadem est, gravitas motrix seu pondus est ut corpus: at si in regiones ascendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritque semper ut corpus & gravitas acceleratrix conjunctim. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor est, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel sextuplo minus.

Porro attractiones & impulsus eodem sensu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem Attractionis, Impulsus, vel Propensionis cujuscunque in centrum, indifferenter & pro se mutuò promiscuè usurpo; has vires non Physicè, sed Mathematicè tantum considerando. Unde caveat lector, ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis causamve aut rationem Physicam alicubi definire, vel centris (quæ sunt puncta Mathematica) vires verè & Physicè tribuere; si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixerò.

### *Scholium.*

Hactenus voces minus notas, quo sensu in sequentibus accipiendæ sint, explicare visum est. Tempus, Spatium, Locum & Motum, ut omnibus notissima, non definio. Notandum tamen, quod vulgus quantitates hasce non aliter quam

## 12 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

**DEFINITIONES.** ex relatione ad sensibilia concipiat. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit easdem in absolutas & relativas, veras & apparentes, mathematicas & vulgares distinguere.

(<sup>1</sup>) I. Tempus Absolutum, verum, & mathematicum, in se & naturâ suâ sine relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioque nomine dicitur Duratio: Relativum, apprens, & vulgare est sensibile & externa quævis Durationis per motum mensura (seu accurata seu inæquabilis) quâ vulgus vice veri temporis utitur; ut Hora, Dies, Mensis, Annus.

II. Spatium Absolutum, naturâ suâ sine relatione ad externum quodvis, semper manet simile & immobile: Relativum est spatii hujus mensura seu dimensio quælibet mobilis, quæ à sensibus nostris per situm suum ad corpora definitur, & à vulgo pro spatio immobili usurpatur: uti dimensio spatii subterranei, aeris vel cœlestis definita per situm suum ad Terram. Idem sunt spatium absolutum & relativum, specie & magnitudine; sed non permanent idem semper numero. Nam si Terra, verbi gratia, moveatur; spatium Aeris nostri, quod relativè & respectu Terræ semper manet idem, nunc erit una pars spatii absoluti in quam Aer transit, nunc alia pars ejus; & sic absolutè mutabitur perpetuò.

III. Locus est pars spatii quam corpus occupat, estque pro ratione spatii vel Absolutus vel Relativus. Pars, inquam, spatii; non Situs corporis, vel Superficies ambiens. Nam solidorum æqualium æquales semper sunt loci; Superficies autem ob dissimilitudinem figurarum ut plurimum inæquales sunt; Situs vero propriè loquendo quantitatem non habent, ne-

(<sup>1</sup>) 16. Quemadmodum Geometræ lineam fluxu puncti generari fingunt, ita tempus absolutum mathematicè considerare possumus, tanquam æquabilem unius instantis seu puncti temporis fluxum. Quapropter si corpus aliquod æquabili celeritate moveretur, illud eodem modo ac temporis punctum fluere, spatiaque ab eo descripta forent temporibus proportio-

nalia (5); eo igitur motu tanquam accuratâ durationis mensurâ uti possemus. Verum corporum cœlestium & horologiorum motus, quos ad temporis mensuram adhibemus, licet vulgò supponantur æquabiles, variis tamen ex causis accelerantur vel retardantur, sicque mensuræ illæ vulgares non sunt temporis absoluto proportionales.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 13

neque tam sunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem est cum summa motuum partium, hoc est, translatio totius de suo loco eadem est cum summa translationum partium de locis suis; ideoque locus totius idem est cum summa locorum partium, & propterea internus & in corpore toto.

DEFINITIONES.

IV. Motus Absolutus est translatio corporis de loco absoluto in locum absolutum, Relativus de relativo in relativum. Sic in navi quæ velis passis fertur, relativus corporis Locus est navigii regio illa in quâ corpus versatur, seu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæque adeo movetur unâ cum navi: & Quies relativa est permanſio corporis in eâdem illâ navis regione vel parte cavitatis. At quies vera est permanſio corporis in eâdem parte spatii illius immoti in quâ navis ipsa unâ cum cavitate suâ & contentis universis movetur. Unde si Terra verè quiescat, corpus quod relativè quiescit in navi, movebitur verè & absolutè eâ cum velocitate quâ navis movetur in Terrâ. Sin Terra etiam moveatur, oriatur verus & absolutus corporis motus, partim ex Terræ motu vero in spatio immoto, partim ex navis motu relativo in Terrâ: & si corpus etiam moveatur relativè in navi, oriatur verus ejus motus, partim ex vero motu Terræ in spatio immoto, partim ex relativis motibus tum navis in Terrâ, tum corporis in navi; & ex his motibus relativis oriatur corporis motus relativus in Terrâ. Ut si Terræ pars illa, ubi navis versatur, moveatur verè in orientem cum velocitate partium 10010; & velis ventoque feratur navis in occidentem cum velocitate partium decem; Nauta autem ambulet in navi orientem versus cum velocitatis parte unâ: movebitur Nauta verè & absolutè in spatio immoto cum velocitatis partibus 10001 in orientem, & relativè in terrâ occidentem versus cum velocitatis partibus novem.

(<sup>1</sup>) Tempus Absolutum a relativo distinguitur in Astronomiâ

B 3

per

(<sup>1</sup>) 17. Æquatio temporis dicitur differentia quæ inter tempus absolutum & tempus relativum, (h. e. tempus per solis revolutionem mensuratum) intercedit; quæ

proinde tempori relativo juncta, vel ab eo subducta conficit tempus absolutum & vice versâ.

## 14 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

**DEFINITIONES.** per Æquationem temporis vulgi. Inæquales enim sunt dies naturales, qui vulgo tanquam æquales pro mensura temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Astronomi, ut ex veriore tempore mensurent motus cœlestes. Possibile est, ut nullus sit motus æquabilis quo Tempus accuratè mensuretur. Accelerari & retardari possunt motus omnes, sed fluxus temporis absoluti mutari nequit. Eadem est duratio seu perseverantia existentiae rerum; siue motus sint celeres, siue tardi, siue nulli: proinde hæc a mensuris suis sensibilibus meritò distinguitur, & ex iisdem colligitur per Æquationem Astronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis Phænomenis necessitas, tum per experimentum Horologii Oscillatorii, tum etiam per eclipses Satellitum Jovis evincitur.

Ut ordo partium Temporis est immutabilis, sic etiam ordo partium Spatii. Moveantur hæc de locis suis, & movebuntur (ut ita dicam) de seipsis. Nam tempora & spatia sunt sui ipsorum & rerum omnium quasi Loca. In Tempore quoad ordinem successionis; in Spatio quoad ordinem situs locantur universa. De illorum essentia est ut sint Loca: & loca primaria moveri absurdum est. Hæc sunt igitur absoluta Loca; & solæ translationes de his locis sunt absoluti Motus.

Verum quoniam hæc Spatii partes videri nequeunt, & ab invicem per sensus nostros distingui; earum vice adhibemus mensuras sensibiles. Ex positionibus enim & distantis rerum à corpore aliquo, quod spectamus ut immobile, definimus loca universa: deinde etiam & omnes motus æstimamus cum respectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iisdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum absolutorum relativis utimur, nec incommodè in rebus humanis: in Philosophicis autem abstrahendum est a sensibus. Fieri etenim potest, ut nullum revera quiescat corpus, ad quod loca motusque referantur.

Distinguuntur autem Quies & Motus absoluti & relativi ab invicem per Proprietates suas & Causas & Effectus. Quietis proprietas est, quod corpora verè quiescentia quiescunt inter se. Ideoque cum possibile sit, ut corpus aliquod in regionibus

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 15

bus Fixarum, aut longè ultra, quiescat absolutè; sciri autem non possit ex situ corporum ad invicem in regionibus nostris, horumne aliquod ad longinquum illum datam positionem servet necne, quies vera ex horum situ inter se definiri nequit. DEFINITIONES.

Motus proprietas est, quod partes, quæ datas servant positiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam Gyranthum partes <sup>(m)</sup> omnes conantur recedere ab axe motus, & Progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium singularum. Motus igitur corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relativè quiescunt. Et propterea motus verus & absolutus definiri nequit per translationem è viciniâ corporum, quæ tanquam quiescentia spectantur. Debent enim corpora externa non solum tanquam quiescentia spectari, sed etiam verè quiescere. Alioquin inclusa omnia, præter translationem è viciniâ ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros; & sublatâ illâ translatione non verè quiescent, sed tanquam quiescentia solummodo spectabuntur. Sunt enim ambientia ad inclusa, ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, sine translatione de viciniâ corticis, ceu pars totius movetur.

Præcedenti proprietati affinis est, quod moto Loco moveatur unâ Locatum: ideoque corpus, quod de loco moto moveatur, participat etiam loci sui motum. <sup>(n)</sup> Motus igitur omnes, qui de locis motis fiunt, sunt partes solummodo motuum integrorum & absolutorum: & motus omnis integer componitur

ex.

(m) 18. Gyranthum corporum partes singulæ in orbitis curvilineis moventur, adeoque (10) per tangentes orbitarum progredi, atque ita ab axe motus recedere nituntur; ut si trochus vel sphaera circa axem rotatur, singulæ illorum corporum partes circulos describunt, & ab illorum centris per tangentes effugere conantur, cùmque omnia illa centra sint in axe motus posita, singulæ partes ab axe recedere nituntur.

(n) 19. Si nauta in navi deambulare supponatur, motusque navis & nautæ conspirent, integra & absoluta nautæ celeritas componitur ex celeritate nautæ respectu loci sui primi in navi, ex celeritate loci illius, id est, navis respectu maris, seu respectu loci secundi, & ex celeritate maris respectu spatii immoti. Si autem motus nautæ, motui navis foret directè oppositus, absoluta nautæ velocitas æqua-

**DEFINITIONES.** ex motu corporis de loco suo primo, & motu loci hujus de loco suo, & sic deinceps; usque dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo Nautæ supra memorato. Unde motus integri & absoluti non nisi per loca immota definiri possunt: & propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia supra retuli. Loca autem immota non sunt, nisi quæ omnia ab infinito in infinitum datas servant positiones ad invicem; atque adeo semper manent immota, spatiumque constituunt quod Immobile appello.

Causæ, quibus motus veri & relativi distinguuntur ab invicem, sunt Vires in corpora impressæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur, nisi per vires in ipsum corpus motum impressas: at motus relativus generari & mutari potest sine viribus impressis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimatur in alia solum corpora ad quæ fit relatio, ut iis cedentibus mutetur relatio illa in quâ hujus quies vel motus relativus consistit. Rursum motus verus à viribus in corpus motum impressis semper mutatur; at motus relativus ab his viribus non mutatur necessario. Nam si eadem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, sic imprimantur ut situs relativus conservetur, conservabitur relatio in quâ motus relativus consistit. Mutari igitur potest motus omnis relativus ubi verus conservatur, & conservari ubi verus mutatur; & propterea motus verus in ejusmodi relationibus minime consistit.

Effectus quibus motus absoluti & relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires recedendi ab axe motus circularis. (°) Nam in motu circulari nudè relativo hæ vires nullæ sunt, in vero autem & absoluto majores vel minores pro quantitate motus.

Si

æqualis foret differentiæ celeritatum navis respectu spatii immoti, & nautæ respectu navis. Tandem si motus nautæ respectu navis foret obliquus, illius directio & velocitas in duas alias directiones & velocitates ita resolvi debent, ut una directio cum aliorum motuum communi directione conspiret, alia verò sit ipsi per-

pendicularis, tuncque, ex regulis infra demonstrandis, facillimè invenietur tum absoluta nautæ celeritas, tum illius vera directio.

(°) 10. In motu circulari nudè relativo, id est, in quiete absoluta corporis inertis, quod motu duntaxat relativo movetur, vires activæ nullæ sunt.

Si pendeat situla à filo prælongo, agaturque perpetuò in orbem, donec filum à contorsione admodum rigescat, dein impleatur aquâ, & unâ cum aquâ quiescat; tum vi aliquâ subitanâ agatur motu contrario in orbem, & filo se relaxante, diutius perseveret in hoc motu; (P) superficies aquæ sub initio plana erit, quemadmodum ante motum vasis: at postquam vas, vi in aquam paulatim impressâ, effecit ut hæc quoque sensibilibiter revolvi incipiat; recedet ipsa paulatim à medio, ascendetque ad latera vasis, figuram concavam induens, (ut ipse expertus sum) & incitatioe semper motu ascendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vase temporibus peragendo, quiescat in eodem relativè. Indicat hic ascensus conatum recedendi ab axe motus, & per talem conatum innotescit & mensuratur motus aquæ circularis verus & absolutus, motuique relativo hic omnino contrarius. Initio, ubi maximus erat aquæ motus relativus in vase, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: aqua non petebat circumferentiam ascendendo ad latera vasis, sed plana manebat, & propterea illius verus motus circularis nondum inceperat. Postea vero, ubi aquæ motus relativus decrevit, ascensus ejus ad latera vasis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monstrabat motum illius circularem verum perpetuò crescentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quiescebat in vase relativè. Quare conatus iste non pendet à translatione aquæ respectu corporum ambientium, & propterea motus circularis

Tom. I.

C

cularis

(P) 21. Cum aqua vi inertiz (8) in eodem quiescendi statu perseverare nitatur, in eam nonnisi gradatim & per repetitam laterum situlæ frictionem motus circularis transire potest; adeoque sub initio motus situlæ, tota aquæ massa quiescit absolutè, sive quod idem est, maximâ velocitate nudè relativâ in vase revolvitur; undè destituta omni vi activâ (10) sicut antè motum situlæ, plana & quieta manet. Sed cum iterato laterum vasis impulsu, motus circularis ad aquam transferis, singulæ partes aquæ (18) ab axe

motus; seu à medio vasis conantur recedere, cumque minorem sursum in aëre resistèntiam inveniant, ad latera situlæ accumulantur & ascendunt, & quò celerius aguntur in orbem, eo majori conatu ab axe motus per tangentes recedere nituntur. (10. 11.) Porro cum inter vim centrifugam & celeritatem corporis in dato circulo revolvèntis certa debeat esse ac determinata proportio, ex vi centrifugâ seu conatu recedendi ab axe, cognosci ac mensurari potest velocitas motus circularis absolutæ, ut deinceps demonstrabitur.



**DEFINITIONES.** circularis verus per tales translationes definiri nequit. Unicus est corporis cujusque revolventis motus verè circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui respondens : motus autem relativi pro variis relationibus ad externa innumeri sunt ; & relationum instar, effectibus veris omnino destituuntur, nisi quatenus verum illum & unicum motum participant. Unde & in Systemate eorum qui Cœlos nostros infra Cœlos Fixarum in orbem revolvi volunt, & Planetas secum deferre ; singulæ Cœlorum partes, & Planetæ qui relativè quidem in Cœlis suis proximis quiescunt, moventur verè. Mutant enim positiones suas ad invicem (secus quàm fit in verè quiescentibus) unaque cum cœlis delati participant eorum motus, & ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur.

Quantitates relativæ non sunt igitur eæ ipsæ quantitates, quarum nomina præ se ferunt, sed sunt earum mensuræ illæ sensibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco quantitatum mensuratarum utitur. At si ex usu definiendæ sunt verborum significationes, per nomina illa Temporis, Spatii, Loci & Motus propriè intelligendæ erunt hæ mensuræ sensibiles ; & sermo erit insolens & purè Mathematicus, si quantitates mensuratæ hîc intelligantur. Proinde vim inferunt Sacris Literis, qui voces hæc de quantitibus mensuratis ibi interpretantur. Neque minus contaminant Mathesin & Philosophiam, qui quantitates veras cum ipsarum relationibus & vulgaribus mensuris confundunt.

Motus quidem veros corporum singulorum cognoscere, & ab apparentibus actu discriminare, difficillimum est : propterea quod partes spatii illius immobilis, in quo corpora verè moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est prorsus desperata. Nam argumenta desumi possunt, partim ex motibus apparentibus qui sunt motuum verorum differentia, partim ex viribus quæ sunt motuum verorum causæ & effectus. Ut si globi duo, ad datam ab invicem distantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum, innotesceret ex tensione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari posset.

set. (9) Deinde si vires quælibet æquales in alternas globorum facies ad motum circula-rem augendum vel minuendum simul imprimerentur, innotesceret ex auctâ vel diminutâ fili tensione augmentum vel decrementum motus, & inde tandem inveniri possent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augetetur; id est, facies posticæ, sive quæ in motu circulari sequuntur. Cognitis autem faciebus quæ sequuntur, & faciebus oppositis quæ præcedunt, cognosceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri posset & quantitas & determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenso, ubi nihil extaret externum & sensibile quocum globi conferri possent. Si jam constituerentur in spatio illo corpora aliqua longinqua datam inter se positionem servantia, qualia sunt Stellæ Fixæ in regionibus Cœlorum (1), sciri quidem non posset ex relativa globorum translatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus esset motus. At si attenderetur ad filum, & deprenderetur tensionem ejus illam ipsam esse quam motus globorum requireret, concludere liceret motum esse globorum, & corpora quiescere; & tum demum ex translatione globorum inter corpora, determinationem hujus motus colligere. Motus autem veros ex eorum causis, effectibus, & apparentibus differentiis colligere, & contra ex motibus seu veris seu apparentibus eorum causas & effectus, docebitur fusius in sequentibus. Hunc enim in finem Tractatum sequentem composui.

C 2

AXIO-

(9) 22. Si in alternas, seu è diametro sibi oppositas globorum facies, ad motum circula-rem augendum vel minuendum, imprimerentur vires quælibet æquales, quæ proinde non perturbarent æquilibrium globorum circa commune gravitatis centrum, id est, circa punctum æquilibrîi revolvendi, innotesceret ex auctâ vel diminutâ fili tensione augmentum vel decrementum motus &c.

(1) 23. Spectator in globo moto, vel etiam in stellâ fixâ positis, solo oculorum auxilio, seu ex motibus apparentibus discernere non posset, an globus, an stella verè moveretur; quemadmodum telluris incolæ ex apparenti stellarum motu determinare non possunt, an stellæ verè moveantur; sive enim cum terrâ moveamur, & stellæ quiescant absolute, sive è contrâ

moveantur stellæ & terra quiescat, eadem omnino sunt apparentiæ, iidem motus relativi; quod quidem notissimo illustratur exemplo navis æquabiliter motæ, cujus motus, ab iis qui navi vehuntur, oculis non percipitur, dum littora urbisque fugere videntur. Ex optices principiis horum phænomenon petenda est ratio; ea enim corpora quiescere videntur quæ, dum nos ipsi nullam actualem voluntatem nosmet movendi exercemus, eandem respectu oculi positionem constanter servant, ita ut eorum imago quæ in fundo oculi pingitur, eandem semper retinæ partem occupet; ea verò objecta moveri videntur quæ respectu oculi situm suum continuò mutant; seu quorum imagines diversas retinæ partes successivè occupant.

AXIOMATA,  
SIVE

## A X I O M A T A ,

S I V E

## L E G E S M O T U S .

## L E X I .

(<sup>1</sup>) *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus à viribus impressis cogitur statum illum mutare.*

**P**rojectilia perseverant in motibus suis, nisi quatenus à resistantiâ aëris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuò retrahunt sese à motibus rectilineis, non cessat rotari, nisi quatenus ab aëre retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.

## L E X .

(<sup>1</sup>) 24. Ex hac primâ lege quam (9) demonstravimus, sequitur omnem motum esse naturâ suâ æquabilem & rectilineum, adeoque nec illius velocitatem retardari, nec directionem mutari, nisi aliquod obstaculum mobili offeratur; Unde cum projectilia motum suum sensim amittant, querenda est aliqua hujusce retardationis causa. Cum autem corpora projecta vel per medium resistens deferantur, vel etiam super aliorum corporum superficies sca-

bras incedant; & vi gravitatis deorsum semper urgeantur, necesse est ut eam amittant motus sui partem quam in hisce obstaculis superandis continuò absumunt, ac proinde quo major vel minor erit mediæ resistantiæ, eò majus vel minus decrementum accipiet corporis projecti velocitas. Ex his igitur patet majora planetarum & cometarum corpora nullam sensibilem in spatiis coelestibus experiri resistantiam, eum motus suos diutissime conservent.

(1) *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam quâ vis illa imprimitur.*

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successive impressa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur) si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo obliquè adjicitur, & cum eo secundum utriusque determinationem componitur.

C 3

LEX.

(1) 25. Si corpus vi activâ, qualis est vis gravitatis, secundum eandem aut parallelam directionem continuò urgeatur, motus illius continuò acceleratur; nam per leg. 1., manet celeritas acquisita, & per leg. 2. nova conspiranti continuò additur. Si verò aliqua vis in corpus jam motum contrariâ directione perpetuò agat, motus illius continuò retardatur, per leg. 2. Si vis conspirans continuò ac uniformiter agat, id est, si constans sit, corpus eâ vi impulsû, æqualibus temporibus æqualia accipit celeritatis incrementa, seu motu uniformiter accelerato fertur, & celeritates vi illâ acquisitæ, sunt ut tempora quibus generantur. At si vis constans contrariâ directione in corpus motum continuò agat; æqualibus temporibus æqualia fient celeritatis decrementsa, & corpus motu uniformiter retardato movebitur. Generaliter tandem, si corpus quiescens quolibet vi sive constanti sive variabili continuò urgeatur, & deinde eâ celeritate quam vis illius actione continuâ acquisivit, contrâ directionem vis illius reagentis projiciatur, ut vestigia sua relegat, corpus illud in itu & reditu suo eandem habebit celeritatem, ubi ad eadem viæ suæ puncta, eundo & redeundo pervene-

rit; adeoque motum redeundo non amittet, nisi cum pervenerit ad punctum ex quo coepit eundo moveri; nam eadem vis in itu & reditu corporis, æqualibus temporibus æquales celeritatis gradus generat & exinguit (8).

26. Corpora gravia in terræ viciniis, sublata mediî resistentiâ motu uniformiter accelerato descendunt, & motu uniformiter retardato ascendunt. . . . . Demonstratio . . . . . Sublatâ mediî resistentiâ idem est ejusdem corporis pondus, sive eadem illius in subjectum planum pressio, tum in vertice, tum in radice montis; est autem pondus, seu vis motrix (15) ut massa in vim gravitatis acceleratricem ducta: ergo cum ejusdem corporis massa eadem in vertice & in radice montis permaneat, manebit etiam eadem vis acceleratrix gravitatis. Insuper corpora gravia in radice & vertice montis æqualia spatia æqualibus temporibus percurrunt, sublata aëris resistentiâ, ut accuratissimis notum est experimentis (13): constans est igitur vis acceleratrix, & per lineas ad horizontem perpendiculares (3) uniformiter agit; gravia ergo motu uniformiter accelerato descendunt, & uniformiter retardato ascendunt (25) Q. e. D.

27. Sublata



(<sup>a</sup>) L E X. III.

AXIOMATA, SIVE  
LEGES  
MOTUS.

*Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem : sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.*

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus à lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem : nam funis utrinque distentus eodem relaxandi se conatu urget equum versus lapidem, ac lapidem versus equum; tantumque impedit progressum unius quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi suâ quomodocunque mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem pressionis mutuae) subibit. His actionibus æquales fiunt mutationes, non velocitatum, sed motuum; scilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutationio-

31. Coroll. 4. . . celeritas B D, motu uniformiter accelerato acquisita, est semper (5) ut duplum spatium percursum  $2 S K$ , applicatum ad tempus T B, quo percurritur, seu ut  $2 S K : T B$ . Quare si vis acceleratrix constans dicatur G; spatium percursum S; tempus quo percurritur T; erit  $G T = 2 S : T$  (13) adeoque  $G T^2 = 2 S$ ; seu vis acceleratrix constans in quadratum temporis ducta, est ut duplum spatium eodem tempore vis illius actione descriptum.

(<sup>a</sup>) 32. Hæc notissima naturæ Lex innumeris confirmata experimentis, ex ipsâ materiæ inertia clarè sequitur. Ut autem omnīs tollatur ambiguitas, nihil aliud per hanc legem intellectum volumus, nisi æquales fieri in corpore agente & patiente statūs mutationes; cum enim nulla possit esse actio corporis in aliud corpus, quin mutua fiat horum corporum collisio (8), mutatio statūs æqualiter in utroque cor-

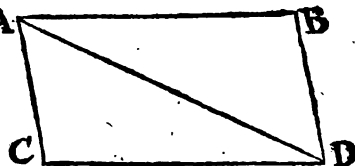
pore recipi debet; undè licet actioni æqualis semper sit & contraria reactio, non idcirco tamen inter corpus agens & patientem fieri debet æquilibrium, idque Newtoniano exemplo manifestum est; si equi lapidem trahentis conatus seu vis activa major sit vi quâ lapis per gravitatem suam, plani scabritiem, medique resistentiam, equo trahenti reluctatur, equus lapidem trahet cum eâ totius suæ vis parte, quæ post superatam lapidis gravitatem, plani scabritiem, medique resistentiam, ipsi residua est; si autem totus trahentis equi conatus hisce tribus resistentiis minor sit, vel si ipsis sit æqualis, equus lapidem non movebit. Quare totus ac integer lapidis renixus qui componitur ex ipsius gravitate, plani scabritie, resistentiâ medii & inertia quæ lapidi etiam omnibus aliis viribus destituto inest, actioni equi lapidem trahentis est semper æqualis.

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS. tiones enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciprocè proportionales. Obtinet etiam hæc Lex in Attractionibus, ut in Scholio proximo probabitur.

## COROLLARIUM I.

*Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.*

Si corpus dato tempore, vi solâ M in loco A impressâ, ferretur uniformi cum motu ab A ad B; & vi solâ N in eodem loco impressâ, ferretur ab A ad C: compleatur parallelogrammum *ABDC*, & vi utrâque feretur corpus illud eodem tempore in diagonali ab A ad D. Nam (<sup>b</sup>) quoniam vis N agit secundum lineam AC ipsi BD parallelam, hæc vis per Legem 11. nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam BD à vi alterâ genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam BD, sive vis N imprimatur, sive non; (<sup>c</sup>) atque ideo in fine illius temporis reperietur alicubi in lineâ illâ BD. Eodem



argu-

(<sup>b</sup>) 33. Quoniam vis N, agit secundum lineam AC, ipsi BD, parallelam, hæc vis, (per leg. 2) nihil nisi velocitatem secundum lineam ipsi BD, parallelam producet, ac proinde non mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam BD, à vi alterâ genitam; cum corpus iners duabus hisce viribus ac directionibus simul obsequi possit, & (per leg. 1.), debeat, atque hinc supponatur vires M, & N, in mobile eodem modo simul agere ac si singulæ seorsim in illud quiescens imprimerentur.

(<sup>c</sup>) 34. Idcirco cum in fine ejusdem temporis, corpus quod hinc tanquam punctum consideratur, simul esse debeat in utraque lineâ CD, & BD, in utriusque lineæ concursu E, reperietur necesse est; quia

autem initio & fine temporis dati corpus reperitur in rectâ AD, nempe primum in A, & deinde in D, toto tempore dato motum fuit per lineam AD, nam ex duobus punctis A, & D, datis, recta, AD, positione data est; & corpus quilibet viribus impulsus, cessante virium actione, movetur uniformiter in directum secundum ultimam directionem ex viribus impressis resultantem, (per Leg. 1, & 9).

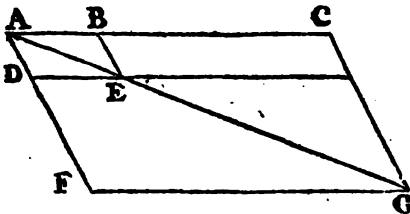
35. Motus compositus per diagonalem AD, motibus per latera AB, AC, disjunctis non est æqualis, sed tantum æquipollet. Nam cum eadem sit corporis massa, motus quantitates per diagonalem & per latera sunt ut velocitates uniformes (<sup>e</sup>) seu ut spatia AD, AB, AC, eodem tempore percurra (<sup>f</sup>); est autem sum-

Summa laterum  $AB + AC$ , major diagonali  $AD$ ; ergo summa quantitatum motus per latera, major est quantitate motus per diagonalem. Verum quia idem est motus, sive mobile per diagonalem  $AD$ , celeritate æquabili ut  $AD$ , ex vi unica impressa feratur, sive viribus conjunctis per latera  $AB$ ,  $AC$ , impellatur, liquet motum per diagonalem, motibus per latera disjunctis æquivalere.

Si mobile à pluribus quàm duabus viribus in loco  $A$ , simul impressis impellatur, inveniri semper poterit unica directio & velocitas ex omnibus separatis composita ipsique æquipollens, quæ media directio dicitur; duarum enim virium media directio reperitur (per coroll. 1. *Newton*); deinde diagonalis illa tanquam spatium vi unica percursum consideretur, & cum spatio tertiæ vi descripto pari ratione componatur, sicque vires omnes ad unicam reducentur.

37. Motus omnis in quocumque alios laterales ipsi æquipollentes resolvi potest; nam motus per  $AD$ , æquabilis, factò triangulo quocumque  $ABD$ , resolvitur in motus per latera  $AB$ ,  $AC$ , motui per diagonalem  $AD$ , æquipollentes (35). Eadem ratione motus per  $AB$ , in duos quoscumque alios, descripto circa latus  $AB$ , triangulo resolvitur, idemque de motu per  $AC$ , & de aliis quibuscumque motibus dici debet.

38. Si corpus aliquod  $A$ , duplici vi per  $AC$ , & per  $AF$ , ita urgeatur, ut motus in eadem ratione acceleretur vel retardetur, sive quod idem est, si spatia  $AB$ , &  $AD$ ,  $AC$ , &  $AF$ , iisdem temporibus percurra, semper sint in constanti ratione, motu composito parallelogrammi diagonalem  $AG$ , describet....



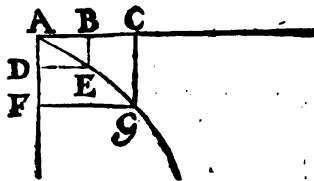
*Dem*... Ductis  $DE$  ad  $AB$ , &  $BE$  ad  $AD$ , parallelis, corpus conjunctis viribus motum, reperiri debet simul in utraque lineâ  $DE$ , &  $EB$ , (34) adeoque in earum intersectione  $E$ ; similiter ductis  $FG$ , ad  $AC$ , &  $CG$ , ad  $AF$ , parallelis,

Tom. I.

patet corpus motu composito eodem tempore reperiri in  $G$ , quo motibus disjunctis attingeret puncta  $C$ , &  $F$ ; cum igitur (ex hyp.) sit  $AD$ , ad  $AB$ , seu  $DE$ , ut  $AF$ , ad  $AC$ , seu  $FG$ , recta  $AE$ , producta transit per punctum  $G$ ; ergo corpus per diagonalem rectam  $AG$ , incedet. Q. e. D.

39. Si spatia secundum unam directionem percurra non sint semper in eadem ratione cum spatiis juxta alteram directionem iisdem temporibus descriptis, mobile per eandem diagonalem rectam progredi non potest; si autem ratio spatiorum viribus separatis iisdem temporibus descriptorum continuò mutetur, mobile per curvam incedet, ut si motus uniformis cum motu continuò accelerato vel retardato componatur.

40. Corpus grave secundum quamlibet directionem  $AC$ , quæ non sit ad horizontem normalis projectum, in terræ viciniis, sublata medii resistentiâ, parabolam  $AEG$ , describit, cujus diameter  $AF$ , est ad horizontem perpendicularis, & tangens  $AC$ , directio projectionis....



*Dem*... Solâ vi projectionis impressâ, grave uniformiter movetur per rectam  $AC$ , (per leg. 1.), solâ vi gravitatis motu uniformiter accelerato per rectam  $AF$ , aut ipsi parallelam descendit (26); quoniam verò motus per  $AC$ , æquabilis est, spatia  $AB$ ,  $AC$ , sunt ut tempora quibus percurruntur (5). Spatia  $AD$ ,  $AF$ , motu uniformiter accelerato iisdem temporibus descripta, sunt ut quadrata temporum quibus describuntur (27), seu ut quadrata rectarum  $AB$ ,  $AC$ , aut ipsis parallelarum & æqualium  $DE$ ,  $FG$ : cum igitur grave motu composito latum in fine temporum  $AB$ ,  $AC$ , reperiat in punctis  $E$ , &  $G$ , (34) evidens est quadrata ordinarum  $DE$ ,  $FG$ , curvæ  $AEG$ , (39) esse inter se in ratione abscissarum  $AD$ ,  $AF$ , adeoque curvam  $AEG$ , esse parabolam, (per 20<sup>am</sup> lib. 1. Conic. *Apollon.*) cujus diameter  $AF$ , & tangens  $AC$  ordinatis  $DE$ ,  $FG$  (32. prop. lib. 1. Conic. *Apollon.*) Q. e. D.

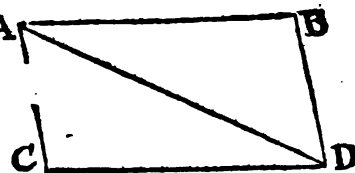
D

41.

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.



AXIOMA- argumento in fine temporis ejusdem  
TA, SIVE reperietur alicubi in lineâ  $CD$ , & A  
LEGES idcirco in utriusque lineæ concursu  
MOTUS.  $D$  reperiri necesse est. Perget au-  
tem motu rectilineo ab  $A$  ad  $D$  per  
Legem 1<sup>am</sup>.

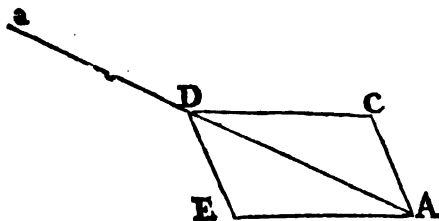


## COROLLARIUM II.

*Et hinc patet (<sup>d</sup>) compositio vis directæ AD ex viribus quibuscumque obliquis AC & CD, & vicissim resolutio vis cujuscumque directæ AD in obliquis quascunque AC & CD. Quæ quidem compositio & resolutio abundè confirmatur ex Mechanicâ.*

Ut, si de rotæ alicujus centro  $O$  exeuntes radii inæquales  $OM$ ,  $ON$  filis  $MA$ ,  $NP$  sustineant pondera  $A$  &  $P$ , & cux-

(<sup>d</sup>) 41. Quæ de motuum compositione & resolutione dicta sunt, ad vires mortuas possunt transferri. Si corpus seu punctum  $D$ , viribus mortuis, seu, ut loquuntur Mechanici, potentiis  $DE$ ,  $DC$ , juxta directiones  $DE$ ,  $DC$ , agentibus trahatur vel impellatur, & completo parallelogrammo  $EC$ , ducatur diagonalis  $DA$ , vires  $DC$ ,  $DE$ , vi mediæ, ut  $DA$ , juxta directionem  $DA$ , agenti æquivalent ....



Dem :... vis separata  $DC$ , considerari potest tanquam vis acceleratrix quæ in corpus  $D$ , juxta directionem  $DC$ , continuè & uniformiter agit, & vis illa est ut celeritas quam dato tempore generat aut generare potest (13), adedque illa celeritas per rectam  $DC$ , expo-

ner, cum ea recta sit ut vis ipsa  $DC$ , (per hyp.) simili argumento liquet rectam  $ED$ , esse ut celeritatem vi agente per  $DE$  eodem tempore dato generandam. Cum igitur celeritates  $DE$ ,  $DC$ , in mediam,  $DA$ , æquipollentem componantur (per Coroll. 1. Newt.) manifestum est vires quoque laterales  $DE$ ,  $DC$ , in mediam æquipollentem  $DA$ , (35) componi, atque adeò vim ut  $DA$ , in laterales  $DE$ ,  $DC$ , æquivalentes resolvi posse. Quare (35. 36) vires quocumque laterales in unam æquivalentem componi possunt, & vis quælibet in alias quascunque ipsi simul æquipollentes potest resolvi.

42. Producat  $AD$ , ad  $a$ , ita ut  $DA$ , &  $Da$ , æquales sint, & vis, ut  $Da$ , juxta directionem  $DA$ , urgeat punctum  $D$ ; punctum illud  $D$ , duabus viribus  $DA$ , æqualibus & contrariis sollicitatum, immotum permanebit; sed vis media  $DA$ , æquivalens viribus separatis  $DE$ ,  $DC$ , (41), ergò si punctum  $D$ , sublata vi,  $DA$ , tribus viribus  $Da$ ,  $DE$ ,  $DC$ , urgeatur, non movebitur, sed erit inter vires æquilibrium.

43. Si punctum  $D$ , tribus viribus  $Da$ ,  $DE$ ,  $DC$ , in æquilibrio constitutis urgeatur, com-

## 27

AXIOMATA, SIVE  
LEGES  
MOTUS.

tro

rentiæ in æquilibrio, circa punctum quodvis D, consistentes, dicantur ut libet  $1^a$ ,  $2^a$ ,  $3^a$ , erit  $1^a$ , ad  $2^am$ , ut finus anguli quem  $2^a$  &  $3^a$  potentiarum directiones comprehendunt, ad sinum anguli quem  $1^a$  &  $3^a$  directiones formant. Omnes illas de virium & motuum compositione & resolutione demonstrationes accuratissimis confirmavit experimentis Clariss. *Gravesandius* in *Elementis Physicis*.

(f) 46. Ponderis A, quo punctum D;  
trahitur, vis tota DA, resolvi potest  
(41) in vires laterales & æquipollentes  
D 2 AC,

44. Cum latera trianguli sint ut sinus angulorum oppositorum, erit vis  $Da$ , seu  $DA$ , ad vim  $DC$ , ut sinus anguli  $ACD$ , seu complementi illius  $EDC$ , ad sinum anguli  $DAC$ , seu  $ADE$ , seu complementi illius  $EDA$ ; similiter demonstratur esse  $aD$ , ad  $ED$ , ut sinus anguli  $EDC$ , ad sinum anguli  $aDC$ . Si igitur tres po-

D 2

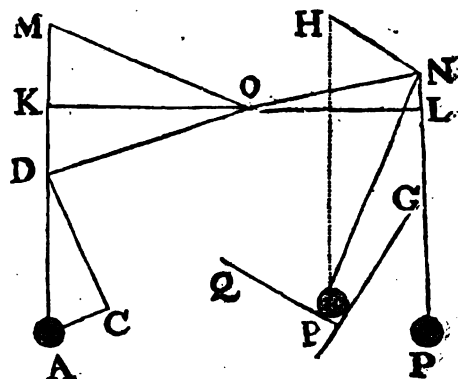
AC,

**AXIOMA.** tro nihil valet ad movendam.  
**TA, SIVE** rotam; vis autem altera  $DC$ ,  
**LEGES** trahendo radium  $DO$  perpen-  
**MOTUS.**

tro nihil valet ad movendam  
rotam; vis autem altera  $DC$ ,  
trahendo radium  $DO$  perpen-  
diculariter, idem valet ac si per-  
pendiculariter traheret radium  
 $OL$  ipsi  $OD$  æqualem; hoc  
est, idem atque pondus  $P$ , si  
modo pondus illud sit ad pon-  
dus  $A$  ut vis  $DC$  ad vim  $DA$ ,  
id est (ob similia triangula  
 $ADC$ ,  $DOK$ ,) ut  $OK$  ad

*OD* seu *OL*. Pondera igitur *A* & *P*, quæ sunt reciproce ut radii in directum positi *OK* & *OL*, idem pollebunt, & sic consistent in æquilibrio : quæ est proprietas notissima (\*) *Libræ, Vectis, & Axis in Peritrochio*. Sin pondus alterutrum sit majus quàm in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major. Quod

A C, & D C, ita ut punctum D, urgeatur simul vi ut D C, secundum directionem D C, & vi ut C A, secundum directionem rectæ O D, productæ; quia verò centrum O, rotæ fixum supponitur, vis ut A C, trahendo punctum O, juxta directionem radii O D, nullum motum creat, nihilque valet ad rotam circa centrum O, movendam; vis autem altera D C, trahendo radium D O perpendiculariter, idem valet ad rotam circa centrum O, volvendam, ac si perpendiculariter traheret alterum radium O L, ipsi O D, æqualem; vires enim æquales æqualibus radiis pariter applicatæ eodem modo rotam movere debent; si itaque pondus aliquod P, è puncto L, suspensum sit vi D C, æquale, seu, quod idem est, si pondus P, sit ad pondus A, ut recta D C, ad rectam D A, quæ exponit vim absolutam ponderis A, rota his duabus viribus A, & P, in partes contrarias æqualiter tracta non movebitur. Verum in triangulis A D C, D O K, anguli D A C, & K D O, ob parallelas A C, D O, & præterea anguli ad K & C recti, æquales sunt, adeoque tria illa sunt similia & D C : D A = O K : D O, seu O L; pondera igitur A, & P, quæ sunt reciproci ut radii in directum positi O K, & O L, seu



quæ sunt reciproce ut perpendiculares  $OK$ ,  
&  $OL$ , ex centro  $O$ , in eorum dire-  
ctiones ductæ idem pollebunt, & sic con-  
sistent in æquilibrio.

(f) 47. Sit K L, recta inflexilis & gravitatis expers circa punctum fixum seu fulcrum O, volubilis, hæc vectem & libram exhibet, atque etiam peritrochium circa axem volubile potest exponere, seu rotam cujus est radius longior O L, & centrum O, circa quod rota & cylindrus cujus est radius brevior O K, revolvī possunt; ex demonstratis autem (46) patet esse in his tribus machinis æquilibrium, cum potentie seu pondera A, & P, sunt inter se reciproce, ut rectæ a centro O, ad eorum directiones normaliter ductæ. Sin pondus alterutrum sit majus quàm in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tantò major; nam, manente distantia O L, vis ponderis P, ad movendam rotam, est ut pondus P absolutum, & manente pondere P, crescit vis illius ad movendam rotam in ratione distantie directionis ponderis a centro; duplicatà enim vel triplicatà illà distantia, pondus idem P, est in æquilibrio cum duplo vel triplo pondere, cujus distantia directionis a centro est subdupla vel subtripla (46). Ergò in his tribus machinis vis potentie seu

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 29

Quòd si pondus  $p$  ponderi  $P$  æquale partim suspendatur filo  $AXIOMA$   
 $Np$ , partim incumbat plano obliquo  $pG$ : agantur  $pH$ ,  $NH$ , <sup>TA, SIVE</sup>  
 prior horizonti, posterior plano  $pG$  perpendicularis: & si vis <sup>LEGES</sup>  
 ponderis  $p$  deorsum tendens, exponatur per lineam  $pH$ , resol- <sup>MOTUS.</sup>  
 vi potest hæc in vires  $pN$ ,  $HN$ . Si filo  $pN$  perpendicula-  
 re esset planum aliquod  $pQ$ , secans planum alterum  $pG$  in li-  
 nea ad horizontem parallela; & pondus  $p$  his planis  $pQ$ ,  $pG$   
 solummodo incumberet; urgeret illud hæc plana viribus  $pN$ ,  
 $HN$  perpendiculariter, nimirum planum  $pQ$  vi  $pN$ , & pla-  
 num  $pG$  vi  $HN$ . Ideoque si tollatur planum  $pQ$ , ut pon-  
 dus tendat filum; quoniam filum sustinendo pondus jam vicem  
 præstat plani sublatis, tendetur illud eadem vi  $pN$ , quâ pla-  
 num antea urgebatur. Unde tensio fili hujus obliqui erit ad  
 tensionem fili alterius perpendicularis  $PN$ , ut  $pN$  ad  $pH$ .  
 (h) Ideoque si pondus  $p$  sit ad pondus  $A$  in ratione quæ com-  
 ponitur ex ratione reciproca minimarum distantiarum filorum  
 suorum  $pN$ ,  $AM$  à centro rotæ, & ratione directâ  $pH$  ad  
 $pN$ ; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque ideo  
 se mutuo sustinebunt, ut quilibet experiri potest.

Pondus autem  $p$ , planis illis duobus obliquis incumbens,  
 rationem habet cunei inter corporis fissi facies internas: & in-  
 de vires cunei & mallei innotescunt: utpote cum vis quâ pon-  
 dus  $p$  urget planum  $pQ$ , sit ad vim, quâ idem vel gravitate  
 suâ vel ictu mallei impellitur secundum lineam  $pH$  in plana,  
 ut  $pN$  ad  $pH$ ; atque ad vim, quâ urget planum alterum  $pG$ ;  
 ut  $pN$  ad  $NH$ . Sed & vis Cochleæ per similem virium di-  
 visio-

ponderis ad movendam machinam circa  
 centrum motus, est semper in ratione com-  
 positâ ponderis absoluti seu intensitatis po-  
 tentiæ, & distantie directionis illius à  
 centro motus. Vim autem illam ponde-  
 ris aut potentiæ ad machinam moven-  
 dam *momentum potentiæ* aut *ponderis* vo-  
 cant Mechanici.

(h) 48. Vis quâ pondus  $p$ , tendit fi-  
 lum obliquum  $pN$ , dicatur  $\pi$ , & nor-  
 malis ex centro  $O$ , in filum  $pN$ , ducta  
 dicatur  $n$ , & erit ex demonstratis  $\pi : P$ ,  
 seu  $p$ ,  $= pN : pH$ . Præterea si vis  $\pi$ ,

in æquilibrio cum pondere  $A$ , consistat,  
 erit etiam (47)  $A : \pi = n : KO$ ; unde per compositionem rationum erit  $A \times$   
 $\pi : p \times \pi = n \times pN : KO \times pH$ ,  
 seu  $A : p = n \times pN : KO \times pH$ ; &  
 $p : A = KO \times pH : n \times pN$ ; ideoque  
 si pondus  $p$ , sit ad pondus  $A$ , in ratione  
 quæ componitur ex ratione reciproca mi-  
 nimarum distantiarum,  $n$ , &  $KO$ , filo-  
 rum suorum  $pN$ ,  $AM$  à centro rotæ, &  
 ratione directâ  $pH$ , ad  $pN$ , erit æquili-  
 brium.

## 30 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

AXIOMA-visionem colligitur ; quippe quæ cuneus est à veste impulsus:  
 TA, SIVE (1) Usus igitur Corollarii hujus latissimè patet, & latè paten-  
 LEGES do veritatem ejus evincit ; cùm pendeat ex jam dictis Mecha-  
 MOTUS. nica tota ab Auctoribus diversimodè demonstrata. Ex hisce  
 enim facilè derivantur vires Machinarum, quæ ex Rotis, Tym-  
 panis, Trochleis, Vectibus, nervis tensis & ponderibus direc-  
 tè vel obliquè ascendentibus, cæterisque potentiis Mechanicis  
 componi solent, ut & vires Tendinum ad animalium ossa mo-  
 venda.

### COROLLARIUM III.

*Quantitas motus quæ colligitur capiendo summam motuum factio-  
 rum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contra-  
 rias, non mutatur ab actione corporum inter se.*

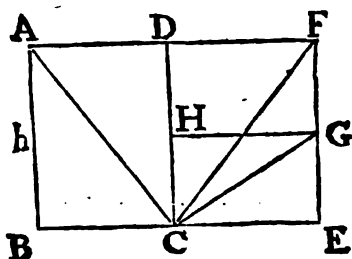
Etenim actio eique contraria reactio æquales sunt per Le-  
 gem 111, adeoque per Legem 11 æquales in motibus efficiunt  
 mutationes versùs contrarias partes. Ergo si motus fiunt ad  
 eandem partem ; quicquid additur motui corporis fugientis,  
 subducetur motui corporis insequentis sic, ut summa maneat  
 eadem quæ priùs. Sin corpora obviam eant ; æqualis erit sub-  
 ductio de motu utriusque, ideoque differentia motuum factio-  
 rum in contrarias partes manebit eadem. (k) Ut

(1) 49. Cunei & cochleæ vires totam-  
 que ferè mechanicam hisce theorematibus  
 demonstravit Clariss. Varignonius. Quàm  
 latè pateat eorum usus manifestum est ex  
 præclaro opere Joannis Alphonfi Borelli de  
 motibus animalium, & ex variis, inter  
 quas Bernoullianæ eminent, de musculorum  
 motu dissertationibus ; sed hæc fusiùs profe-  
 qui præsentis non est instituti ; in proximo  
 scholio machinarum vires generali mecha-  
 nicæ principio determinare satis erit ; ut au-  
 tem ea quæ nobis illustranda occurrent in  
 meliori lumine collocentur, generales mo-  
 tuum leges, ne omisissis quidem definitioni-  
 bus, præmittendas esse judicavimus.

(k) 50. Corpus perfectè elasticum di-  
 citur cujus partes ex ictu flectuntur, seu  
 introcedunt, & deindè eadem vi quæ fle-

xæ sunt, sese in priorem statum contra-  
 riâ directione restitunt. Corpus imperfec-  
 tè elasticum est cujus partes ex ictu flexæ  
 in priorem quidem statum redire nituntur,  
 sed minori vi eâ quæ flexæ sunt. Corpus  
 non elasticum vocatur cujus partes ictu  
 percussæ nullâ vi sese restituere conantur.  
 Corpus unum in alterum directè impinge-  
 re dicitur, si secundùm rectam ad con-  
 tactum perpendicularem impingat ; obli-  
 què verò si secundùm rectam ad contac-  
 tum obliquam. Cùm corpora in se mu-  
 tuò non agant, nisi per massam & velo-  
 citatem, tanquam axioma ex legibus 24  
 & 34 notissimum innumerique confirma-  
 tum experimentis supponimus quantitates  
 motûs æquales & contrarias in conflictu  
 sibi mutuò æquipollere.

51. Si



§1. Si globus A, in planum immobile BE, incurrat, quæritur illius motus post impactum . . . . 1<sup>o</sup>. Globus ille in planum directè impingat per AB; si globus & planum omni elasticitate destituantur, globi motus post impactum in B, omnino extinguitur, cum nulla vis globum repellat; si autem planum & globus perfecto elatere donentur, globus per BA, post impactum resiliat eadem quâ advenit celeritate BA; nam in corporibus perfectè elasticis (50) vis restitutiva æqualis est vi compressivæ, unde si imperfecta fuerit vis elastica, globus minori velocitate Bh, resiliet . . . . 2<sup>o</sup>. Globus A, in planum BE, velocitate & directione AC, obliquè impingat, illius motus resolvatur in motus laterales quorum unus AD, sit plano BE, parallelus, alter autem AB, eidem plano perpendicularis (37), globus A, motu secundum AD, ad planum non accedit, sed tantum motu secundum perpendiculararem AB, vel DC; velocitas globi respectu plani BE, est tantum ut perpendicularis AB; at verò si AC, foret perpendicularis ad planum BE, velocitas quâ ad planum accederet, foret ut AC; ergò cum impetus ejusdem corporis in planum, sint ut velocitates quibus ad planum accedit, ictus obliquus est ad perpendiculararem, ut AB, ad AC; seu sumptâ AC, tanquam radio, ut sinus anguli incidentiæ ACB, ad sinum totum . . . . 3<sup>o</sup>. Si nulla sit in corporibus A, & BE, elasticitas, globus A, per AC, incurrens movebitur per CE, celeritate ut  $CE = AD$ ; nam motus perpendicularis AB, vel DC, ex demonstratis, extinguitur, remanetque tantum motus CE, cui planum ut potè parallelum non opponitur; si verò perfectum fuerit elaterium, resiliet globus per CF, celeritate  $CF = AC$ , & an-

gulus reflexionis FCE, æqualis erit angulo incidentiæ ACB; nam per vim restitutivam elateris resiliit per normalem CD, celeritate CD, seu BA, & præterea motu ad planum parallelo progreditur per CE, celeritate ut  $CE = AD$ , ergò motu composito (coroll. 1. *Newt.*) percurrent diagonalem CF; & cum in parallelogrammis DB, DE, omnia sint paria, erit  $FC = AC$ , & angulus FCE,  $= ACB$ . Tandem si corpora imperfectè fuerint elastica, manebit quidè post impactum velocitas AD, seu CE, plano parallela, sed velocitas perpendicularis CH, minor erit velocitate DC, seu AB, & completo parallelogrammo HE, globus per diagonalem CG, resiliet.

§2. Si globi non elastici in se mutuo directè impingant, quæritur illorum motus post conflictum . . . . 1<sup>o</sup>. Globi in eandem plagam ferantur, subsequens fugientem impellet, donec ambo simul tanquam unum corpus eadem directione ac velocitate incedant, eritque (coroll. 3. *Newt.*), summa quantitatum motus eadem antè & post conflictum; communis ergò post conflictum velocitas invenitur, summâ quantitatum motus antè conflictum per summam massarum divisâ (6) . . . . 2<sup>o</sup>. Globi contrariis directionibus sibi mutuo occurrant, si æqualis in utroque fuerit motus quantitas, post conflictum ambo quiescunt (50). Si verò inæquales sint motus quantitates, per conflictum extinguitur in singulis quantitas motus globi debilius moti (50), & ambo simul post impactum communi velocitate ac directione quasi unicum corpus progrediuntur, estque quantitas motus in utroque simul residua, differentiæ quantitatum motus antè conflictum æqualis (coroll. 3. *Newt.*) Hinc communis post conflictum velocitas habetur, si differentia illa quantitatum motus antè conflictum ad summam massarum applicetur (6). In hoc utroque casu communis post conflictum velocitas in globi cujusque massam ducta, est illius quantitas motus post impactum (6), ex quâ & quantitate motus ejusdem globi ante conflictum, per subtractionem invenitur quantitas motus in conflictu acquisita vel amissa; quia verò in omni globorum non elasticorum conflictu directo, vel motus omnis cessat, vel globi post impactum communi celeritate feruntur, manifestum est

AXIOMATA, SIVE  
LEGES  
MOTUS.

AXIOMA-  
TA, SIVE  
LEGES  
MOTUS.

(<sup>1</sup>) Ut si corpus sphaericum *A* sit triplo majus corpore sphaerico *B*, habeatque duas velocitatis partes; & *B* sequatur in eâdem rectâ cum velocitatis partibus decem, ideoque motus ipsius *A* sit ad motum ipsius *B*, ut sex ad decem: ponantur motus

est, respectivam globorum velocitatem per confictum extingui.

53. Globi elastici in se invicem directè incurrant, quæritur eorum motus post confictum . . . . . 1°. Mutatio quæ ex mutuo corporum perfectè elasticorum confictu in utriusque corporis motu nascitur, dupla est mutationis quam ictus idem in iisdem corporibus omni elaterio destitutis produceret, in corporibus imperfectè tantùm elasticis mutatio major est quàm in non elasticis, sed duplâ minor. Nam partes in utroque corpore æquali vi ex ictu comprimuntur (Leg. 3.) Si corpora omni elatere destituerentur, post confictum vel quiescerent, vel in eandem plagam velocitate communi progredierentur (52) nec partes flexæ restituerentur; si autem accedat vis elastica, partes flexæ sese restituent vi & directione (50) quæ semper contraria erit vi compressivæ, & in corporibus perfectè elasticis huic æqualis, in aliis minor; actio igitur corporum in se mutuo ex elateris restitutione orta, actioni ex impactu nascenti æqualis est in corporibus perfectè elasticis, minor in aliis, ex quibus & *Lege* 2<sup>a</sup> constat quod erat primò propositum . . . . . 2°. Corpora perfectè elastica eâdem velocitate respectivâ post confictum recedunt, quâ antè confictum ad se invicem accedebant; in corporibus verò imperfectè tantùm elasticis, velocitas respectiva quâ post ictum discedunt, est ad velocitatem quâ antè ictum ad se mutuo accedebant, in ratione vis restitutivæ ad vim compressivam; nam cum in confictu corporum non elasticorum omnis velocitas respectiva, quâ ad se mutuo accedebant, destruat ex ictu (52), sitque vis restitutiva elateris perfecti vi compressivæ æqualis & contraria, manifestum est in corporum perfectè elasticorum confictu, velocitatem respectivam ex solo impactu amissam, contrariâ directione restitui; in corporibus verò imperfectè elasticis eam

tantùm restitui velocitatis respectivæ partem, quæ est vi restitutivæ proportionalis . . . . . 3°. Ut igitur corporum perfectè elasticorum motus post confictum directum inveniatur, considerentur corpora tanquam omni elatere destituta, & in eâ hypothesi quærat (52) quantitas motus ex confictu in unoquoque corpore acquisita vel amissa secundum eam directionem quâ corpus ante confictum movebatur, eadem motus quantitas duplicata, erit quantitas motus in corpore perfectè elastico acquisita vel amissa, quæ proinde quantitati motus corporis antè confictum addita vel dempta, dat quantitatem motus illius corporis post confictum . . . . . 4°. Corporum imperfectè elasticorum motus post confictum invenitur, si data sit ratio vis restitutivæ elateris ad vim compressivam, sive, quod ex demonstratis idem est, ratio velocitatis respectivæ post impactum ad velocitatem respectivam antè impactum, quam rationem in iisdem corporibus constantem esse, experimentis probavit NEWTONUS, nisi tamen partes corporum ex congressu lædantur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo pariantur. Corpora omni elaterio destituta supponantur, & in eâ hypothesi quærat quantitas motus in unoquoque corpore ex ictu acquisita vel amissa, cui motus quantitati si addatur quantitas motus vi elasticæ proportionalis, summa erit vera quantitas motus ex confictu corporum imperfectè elasticorum in unoquoque acquisita vel amissa, ex quâ datâ & ex quantitate motus corporis cujusque antè confictum, reperitur, ut suprâ, omnis quantitas motus illius post confictum. Exemplo lux affluget.

(<sup>1</sup>) 54. Globus *A*, sit triplo major globo *B*, habeatque duos velocitatis gradus, illius motus quantitas (6) erit ut  $3 \times 2$ , seu 6. *B*, sequatur in eâdem rectâ cum velocitatis gradibus, 10, eritque quantitas motus globi *B*,  $1 \times 10$ , seu, 10, . . . . . 1°. Si globi elastici non sunt,

motus illis esse partium sex & partium decem, & summa erit AXIOMA-  
partium sexdecim. In corporum igitur concursu, si corpus *A* TA, SIVE  
LEGES  
MOTUS. lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinque, corpus *B* amittet partes totidem, adeoque perget corpus *A* post reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & *B* cum partibus septem vel sex vel quinque, existente semper summa partium sexdecim ut prius. Si corpus *A* lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, ideoque progrediatur post concursum cum partibus quindecim vel sexdecim vel septemdecim vel octodecim, corpus *B*, amittendo tot partes quot *A* lucratur, vel cum una parte progrediatur amissis partibus novem, vel quiescet amisso motu suo progressivo partium decem, vel cum una parte regrediatur amisso motu suo & (ut ita dicam) una parte amplius, vel regrediatur cum partibus duabus ob detractum motum progressivum partium duodecim. Atque ita summa motuum conspirantium  $15 + 1$  vel  $16 + 0$ , & differentia contrariorum  $17 - 1$  &  $18 - 2$  semper erunt partium sexdecim, ut ante concursum & reflexionem. (m) Cognitis autem motibus quibuscum corpora post reflexionem pergent, invenietur cujusque velocitas, ponendo eam esse ad velocitatem ante reflexionem, ut motus post est ad

mo-

sunt, velocitas communis post conflictum (52) erit  $16 : 4$ , seu  $4$ ; quare quantitas motus ipsius *A*, post conflictum erit  $3 \times 4$ , seu  $12$ . *B*, verò quantitas motus erit  $1 \times 4$ , seu  $4$ . Itaque quantitas motus à corpore *B*, amissa est,  $6$ , & corpori *A*, acquisita est etiam,  $6$ ..... 2°. Si globi sunt perfecte elastici, quantitates illæ duplicari debent (53), erunt igitur  $12$  &  $12$ . Si quantitati motus,  $6$ , globi *A*, ante conflictum jungas,  $12$ , summa erit,  $18$ , quantitas motus illius post conflictum; si verò ex quantitate motus,  $10$ , ipsius *B*, ante conflictum subduxeris,  $12$ , quantitatē motus per conflictum amissam, residuum est  $-2$ , quod signum  $-$ , ut notum est, contrariam positionem significat, seu corpus *B*, post ictum in contrariam plagam resilit cum hac motus quantitate  $2$ .....

Tom. I.

3°. Si globi *A* & *B*, sint imperfectè elastici, sitque v. gr., eorum vis restitutiva subdupla vis compressivæ, erit vis compressiva ad vim restitutivam (seu  $2$ , ad  $1$ ) ut quantitas motus,  $6$ , ex ictu acquisita vel amissa ad quantitatē motus,  $3$ , solæ vi restitutivæ acquisitam vel amissam; quare hæc quantitas,  $3$ , addatur quantitati,  $8$ , ex ictu acquisitæ in corpore *A*, & amissæ in corpore *B*, summa,  $9$ , erit quantitas motus integra tam ex ictu quam ex elatere acquisita vel amissa; unde quantitas motus globi *A*, post conflictum est,  $6 + 9$ , seu,  $15$ , globi *B*,  $10 - 9$ , seu  $1$ , quarum summa est,  $16$ .

(m) 55. Cognitis quantitatibus motuum quibuscum corpora post conflictum pergent, invenietur cujusque velocitas dividendo quantitatē motus cujusque corpo-

E ris

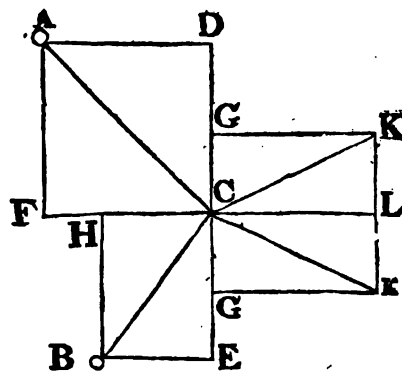


## 34

**AXIOMA** motum ante. Ut in casu ultimo, ubi corporis *A* motus erat  
**TA, SIVE** partium sex ante reflexionem & partium octodecim postea, &  
**LEGES** velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus ve-  
**MOTUS.** locitas partium sex post reflexionem, dicendo, ut motus partes  
sex ante reflexionem ad motus partes octodecim postea, ita  
velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes  
sex postea.

Brother

(\*) 56. Si corpora quæcumque A & B, diversis in rectis AC, BC, momenta, incidant in se mutuò obliquè in C, & requirantur eorum motus post impactum. Cognoscendus est situs plani FL, à quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concursus C; deinde corporis utriusque motus AC, BC, (per Coroll. 2.) distinguendus est in duos AD, & AF, BE & BH, unum nempe AF seu DC, & BH seu EC, huic plano FL perpendiculari, alterum AD, BE, eidem parallelum. Quia verò corpora secundum parallelas AD, BE, ad se mutuò non accedunt, sed tantum secundum perpendiculares DC, EC, in se invicem agunt, motus paralleli AD, BE, per impactum non mutantur, adeoque retinendi sunt iidem post conflictum qui erant ante conflictum; & motibus perpendicularibus DC, EC, mutationes æquales in partes contrarias CD, CE, tribuendæ sunt sic ut summa conspirantium & differentia contrariorum maneat eadem ante & post conflictum (Coroll. 3. Newt.) Ut itaque corporum A & B, in se mutuò obliquè incidentium motus post ictum inveniantur, mota duntaxat supponantur per lineas DC & EC, velocitatibus DC & EC, arque



in eâ hypothesi quærantur (52, si fuerint elastica, 53, si non fuerint elastica) eorum velocitas post conflictum in lineâ CD, vel CE, ex quâ datâ, & ex velocitate parallelâ plano FL, etiam datâ, compositus corporis motus (per Coroll. 1. *Newt.*) faciliè reperietur. Sit exempli causâ CG, velocitas corporis A, post impactum per DE, in C; sumptâ CL, æquali & parallelâ velocitati secundum AD, quæ eadem post conflictum remanet, compleatur parallelogrammum GL & A, movebitur per illius diagonalem CK, velocitate ut CK, (per Coroll. 1. *Newt.*) Si corpora angulosâ sibi per angulos occurrant, orientur motus circulares, dum pars corporis ex vi insitâ in unam plagam moveret, altera verò ex conflictu fertur in alteram plagam circâ corporis centrum.

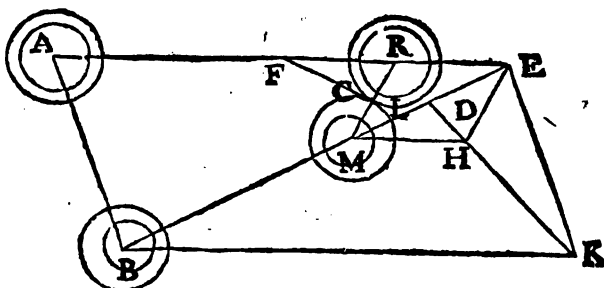
# PRINCIPIA MATHEMATICA. 35

corpora concurrentia tanguntur in puncto concursus : dein corporis utriusque motus (per Corol. 11.) distinguendus est in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum : motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in se invicem secundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi sunt iidem post reflexionem atque antea ; & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ sunt sic, ut summa conspirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Ex huiusmodi reflexionibus oriri etiam solent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos casus in sequentibus non considero, & nimis longum esset omnia huc spectantia demonstrare.

AXIOMATA, SIVE  
LEGES  
MOTUS.

CO-

57. Datis duorum globorum A & B, directionibus, celeritatibus & diametris, unâ cum eorum situ antè conflictum, facile est determinare punctum concursus C, & situm plani FL, utrumque globum in puncto C, contingentis. Globus A, feratur per lineam AE, & celeritate ut AE, globus B verò secundum directionem BE, celeritate ut BD,



moveatur. Junctis A & B globorum centris per lineam AB, compleatur parallelogrammum ABKE. Jungantur puncta D & K, & recta DK, ex centro E, intersectetur arcu qui describitur radio EH, summæ semidiametrorum globorum A & B, æquali. Ex puncto intersectionis H, ducatur recta HM, ipsi EA parallela, erunt M & R, loca in quibus globorum centra constituentur, ubi secum invicem concurrent, & sumptâ lineâ RC, æquali radio globi A, recta FL, ad RC perpendicularis, in puncto C, situm plani designabit . . . . Dem . . . . Quoniam recta HM,

est lineæ BK parallela (per const.) erit  $DM : DB = MH : BK = RE : EA$ , ob  $RE = MH$  : &  $EA = BK$  ; ergò dividendo  $BM : BD = AR : AE$ , & alternando  $BM : AR = BD : AE$ . Cum igitur sit  $BM$  ad  $AR$ , ut celeritas globi B, ad celeritatem globi A ; globus A in R, & B in M, eodem tempore pervenient (6) ; Cumque sit  $MR = EH$ , globi in puncto C, se mutuo contingent, & planum EL, ad radium RC, in puncto C, perpendiculariter ductum utrumque globum continget. Q. e. D.

## COROLLARIUM IV.

*Commune gravitatis Centrum ( $^{\circ}$ ), corporum duorum vel plurimum, ab actionibus corporum inter se non mutat statum suum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in se mutuo agentiam (exclusis actionibus & impedimentis externis) commune Centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.*

Nam

( $^{\circ}$ ) 58. Centrum gravitatis corporis cuiusque, est punctum intrâ vel extrâ corpus positum, circâ quod undique partes in æquilibrio consistunt, itâ ut si per hoc punctum ducatur planum figuram utcumque secans, corporis segmenta quæ utrinque sunt circâ planum illud librata æquiponderent; si igitur ex centro gravitatis corpus aliquod suspendatur, datum quemcumque situm retinebit, & semper quiescet, si centri gravitatis descensus impediatur; unde totam corporis gravitatem in centro gravitatis locatam fingunt Mechanici, & pro corpore gravi solum gravitatis centrum in suis demonstrationibus surrogare solent. Planum gravitatis est figura plana per centrum gravitatis transiens; Diameter verò gravitatis est recta per centrum gravitatis ducta, Quare planorum gravitatis, communis intersectio diametrum gravitatis efficit, & in diametrorum gravitatis concursu centrum gravitatis positum est. Centrum magnitudinis vocatur punctum illud, per quod divisa magnitudo relinquit duas partes utrinque æquales; ut in circulo & ellipsi, ductis utcumque per centrum lineis rectis, lineæ illæ totaque figura in partes æquales dividuntur; ac proinde si gravia homogenea, id est, quorum gravitates sunt voluminibus proportionales, secundum longitudinem in partes similes & æquales secari possint, centrum gravitatis à centro magnitudinis non differt.

59. Ex hisce definitionibus facile colligitur, omnium circulorum, ellipsium, sphaerarum & figurarum quarumvis regu-

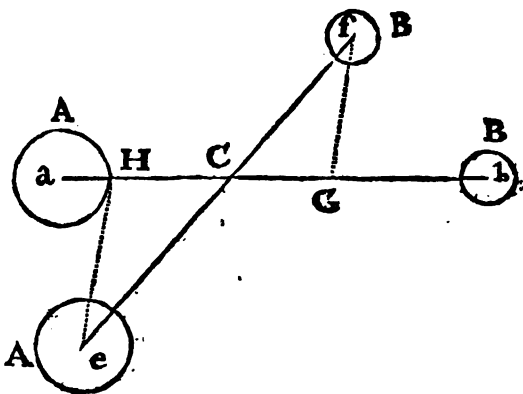
larium; centrum gravitatis idem esse cum centro magnitudinis, modò tamen gravia supponantur homogenea. In figuris autem irregularibus, communi duorum gravitatis diametrorum intersectione determinari potest centrum gravitatis (58). Sic in quolibet parallelogrammo, centrum illud in duarum diagonalium concursu positum est; in triangulo reperitur in intersectione duarum rectarum quæ à duobus angulis ductæ, latera angulis illis opposita, totumque proinde triangulum bisariam, adeoque in partes æquiponderantes secant, in prismatibus & cylindris, centrum gravitatis est punctum medium rectæ basium oppositarum centra jungentis; & generaliter in omnibus corporibus quantumvis difformibus centrum gravitatis mechanicè invenitur, si corpus ab aliquâ sui parte liberè suspendatur, & ab eâdem parte à quâ pendet, demittatur perpendiculum itâ ut in corpore linea quam fecerit perpendiculi filum notetur; deinde ab aliâ parte corpus idem liberè suspendatur ut prius, noteturque iterum linea perpendiculi apud hanc partem super corpus demissi; concursus enim duorum filorum perpendiculi (quæ sunt diametri gravitatis) erit centrum gravitatis corporis dati.

60. Centra gravitatis a & b, corporum A & B, rectâ seu vecte inflexibili & gravitatis exparte, a b jungantur; & itâ dividatur a b, in C, ut sit pondus A, ad pondus B, ut C b, ad C a, punctum C, erit centrum gravitatis commune duorum corporum A & B... Dem... punctum C, si-

xum

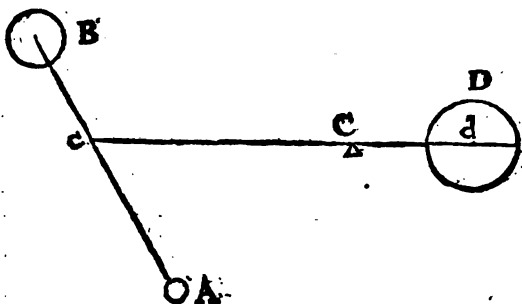
xum maneat, sitque 1<sup>o</sup>.  $ab$ , horizonti parallela, & quia  $ab$ , est vectis cujus fulcrum  $C$ , ponderis  $B$  momentum seu conatus ad vectem circa  $C$ , movendum, erit ut  $B \times Cb$ , & ponderis  $A$  momentum ut  $A \times Ca$  (47); verum (per hyp.)  $A : B = Cb : Ca$ , adeoque  $A \times Ca = B \times Cb$ ; ergo momenta ponderum  $A$  &  $B$ , æqualia sunt, & proinde in æquilibrio circa punctum  $C$ , consistunt....

2<sup>o</sup>. vectis,  $ab$ , circa punctum  $C$  fixum, roterur, & situm  $ef$ , inclinatum ad horizontem  $ab$ , obtineat, ductis  $FG$ ,  $EH$ , rectis horizonti  $ab$ , perpendicularibus, quæ sunt gravium directiones, ponderum  $A$  &  $B$ , momenta erunt ut  $A \times CH$  &  $B \times CG$ , (47); sed ob triangula  $HCE$ ,  $GfG$ , similia  $GC : HC = Cf : Ce$ , seu  $Cb : Ce$ , five  $Ca = A : B$ , adeoque  $GC : HC = A : B$  &  $A \times CH = B \times CG$ ; momenta igitur ponderum  $A$  &  $B$ , in situ quocumque dato æqualia sunt & semper æquilibrantur. Quare (58) punctum  $C$ , est commune gravitatis centrum duorum corporum  $A$  &  $B$ . Q. e. D.

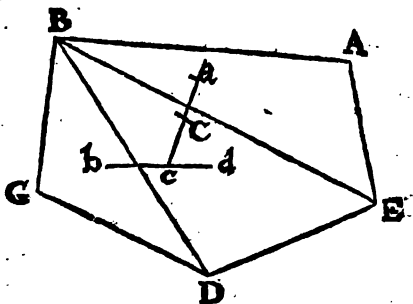


61. Coroll. 1..... Duorum

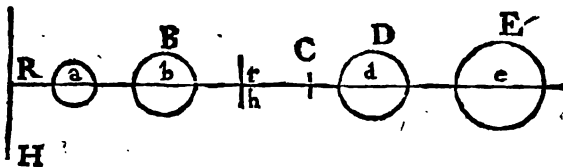
corporum  $A$  &  $B$ , commune gravitatis centrum sit  $c$ , & tertii corporis  $D$ , centrum gravitatis proprium sit  $d$ ; jungatur recta  $cd$ , quæ ita dividatur in  $C$ , ut sit summa ponderum  $A + B$  ad pondus  $D$ , sicut  $Cd$ , ad  $Cc$ , trium corporum  $A$ ,  $B$ ,  $D$ , centrum gravitatis commune erit in  $C$ ; nam duo corpora  $A$  &  $B$ , (58) considerari possunt tanquam in suo communi gravitatis centro  $c$ , coacta, adeoque si fuerit  $A + B : D = Cd : Cc$ , erit  $C$ , centrum gravitatis commune trium corporum  $A$ ,  $B$ ,  $D$ , (60). Eadem ratione quatuor, pluriumve, prout quisque voluerit, corporum commune gravitatis centrum reperietur.



62. Coroll. 2..... figuræ cujusvis planæ & rectilineæ centrum gravitatis hoc modo inveniri potest. Figura data,  $ABGDE$  in sua triangula dividatur, duorumque triangulorum,  $BGD$ ,  $BDE$ , centra gravitatis  $b$  &  $d$ , rectâ jungantur, & ita dividatur,  $bd$ , in  $c$ , ut area trianguli  $BGD$ , sit ad aream trianguli  $BDE$ , sicut  $cd$ , ad  $bc$ , eritque  $c$ , centrum gravitatis commune duorum triangulorum  $BGD$ ,  $BDE$ , (60). Centrum gravitatis,  $a$ , trianguli  $BAC$ , & centrum,  $c$ , figuræ  $BGDE$ , mox inventum jungantur rectâ  $ca$ , quæ ita dividatur in  $C$ , ut area trianguli  $BAE$ , sit ad aream figuræ  $BGDE$ , sicut  $Cc$ , ad  $Ca$  &  $C$ , erit centrum gravitatis totius figuræ datæ  $ABGDE$ , (61). Hæc omnia clarè intelliguntur, si figurarum area quævis, instar ponderis centro gravitatis appensâ consideretur.



AXIOMA- 63. Sit recta R H, horizon-  
TA, SIVE ti perpendicularis quæ axis  
LEGES rotationis dicatur, & in eâ  
MOTUS. sumatur centrum rotationis  
R, seu punctum fixum circa  
quod vectis horizontalis R e,  
cum appensis ponderibus A,  
B, D, E, rotari possit, sint-



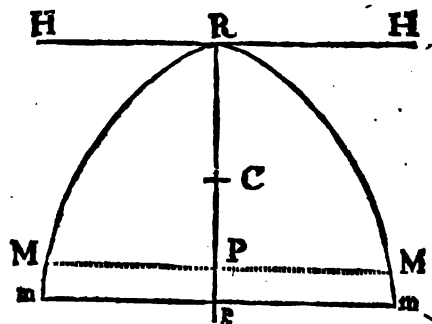
que corporum centra gravitatis propria a, b, d, e, & eorum commune gravitatis centrum C, in vecte R e, ad eandem axis R H, partem posita; distantia R C, communis centri gravitatis C, à centro rotationis R, æqualis erit summæ factorum unius cujusque ponderis in suam à centro rotationis R, distantiam, per summam ponderum divisæ ..... Dem....  
Momentum cujusque ponderis ad vectem circa centrum R, movendum, est ut factum ex illo pondere in suam ab eodem centro R, distantiam (47), & omnium momentorum summa, seu totus omnium ponderum ad vectem circa centrum R, movendum conatus, ut illorum factorum summa; verum quia pondera omnia per vectem R e, dispersa, tanquam in suo communi gravitatis centro C, coacta considerari possunt (58), erit etiam totus omnium ponderum conatus ad vectem circa R, movendum, ut summa ponderum in distantiam R C ducta; quare summa factorum uniuscujusque ponderis in suam à centro rotationis R distantiam, æqualis est facto ex summâ ponderum in distantiam R C communis centri gravitatis C, à centro rotationis R; igitur  $R C \times A + B + D + E$  &c. =  $A \times a R + B \times b R + D \times d R + E \times e R$  &c., adeoque  $R C = A \times a R + B \times b R + D \times d R + E \times e R$  &c.:  $A + B + D + E$  &c. Q. e. D.

64. Si pondera ad eandem axis rotationis partem sita non sint, si v. gr. fuerit axis rotationis r h, erit  $r C = D \times$

$d r + E \times e r - A \times a r - B \times b r$ :  $A + B + D + E$ . Nam momenta ponderum D & E, ad vectem circa r movendum sunt  $D \times d r$ ,  $E \times e r$ , & momenta contraria ponderum A & B, sunt  $A \times a r$ ,  $B \times b r$ ; quare vis omnium ponderum ad vectem r e, movendum erit,  $D \times d r + E \times e r - A \times a r - B \times b r$ ; sed si pondera in centro C, coacta supponantur, erit vis illa eadem,  $r C \times A + B + D + E$ ,

$$\text{ergo } r C \times A + B + D + E = D \times d r + E \times e r - A \times a r - B \times b r, \text{ ac proinde} \\ r C = D \times d r + E \times e r - A \times a r - B \times b r: A + B + D + E. \text{ Q. e. D.}$$

65. Quapropter si omnia pondera sint ad eandem axis rotationis R H, partem posita, & quodlibet pondus vocetur p, summa verò omnia ponderum S p; præterea si distantia à centro rotationis dicatur x, ac proinde factum cujusque ponderis in suam à centro rotationis distantiam sit x p, & omnium factorum summa s x p; distantia communis centri gravitatis omnium ponderum à centro rotationis erit generaliter S x p: S p. Si verò pondera fuerint ad diversas axis rotationis r h, partes posita, & distantia cujuslibet ponderis à centro rotationis r, vocetur x, singula verò pondera quæ sunt ad partem r e, posita, dicantur p, eorumque summa sit S p; insuper singula pondera ad partem R r, sita dicantur q, & eorum summa sit S q, distantia communis centri gravitatis omnium ponderum à centro rotationis r, erit  $s x p - s x q$ :  $s p + s q$ , vel  $s x q - s x p$ :  $s p + s q$ ; undè si  $S x p = S x q$ , manifestum est, centrum rotationis idem esse cum centro gravitatis.



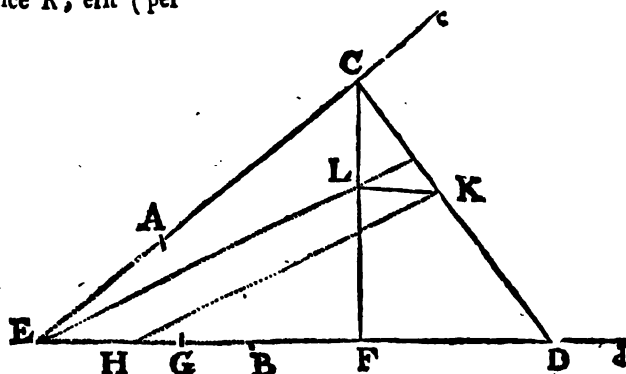
66. Harumce formularum auxilio, centra gravitatis figurarum curvarum reperiuntur; Nam si curvæ M R M, axis R P, quo ordinatæ M M m m, bisariam dividuntur, ut vectis

(P) Nam si puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, & distantia eorum dividatur in ratione datâ, punctum dividens vel quiescit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ positione datâ, sive LEGES MOTUS.

vectis habeatur, vertexque R, ut centrum rotationis & singula elementa qualia sunt  $MMmm$ , ut pondera vecti appensa considerentur, distantia centri gravitatis C, à centro rotationis seu vertice R, erit (per

primam formulam) æqualis summæ factorum ex singulis elementis  $MMmm$ , in suam à vertice R, distantiam per summam eorundem elementorum divisâ.

(P) 67. Duo corpora C & D, æquabiliter moveantur in lineis rectis AC, BD, positione datâ, jungaturque recta CD, & ita dividatur in K, ut sit DK, ad CK, ut corpus C, ad corpus D; punctum K, quod est centrum gravitatis corporum C & D, (60) vel quiescet vel movebitur uniformiter in lineâ rectâ positione datâ.... Dem.... Concur-



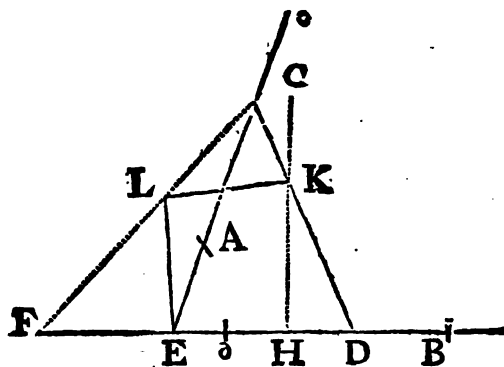
rant lineæ AC & BD, in E. 1°. Corpora C & D, ex punctis fixis A & B, in eandem plagam proficiantur & iisdem temporibus ad puncta C & D, perveniant, ac proinde spacia AC & BD, erunt in ratione datâ velocitatum (5). In BE, capiatur BG, ad AE, in ratione datâ BD, ad AC, & cum data sit AE, dabitur quoque linea BG; fit FD, semper æqualis datæ EG, erit EF = GD, & quia BG:AE = BD:AC, (per const.) erit BG + BD, seu GD:AE + AC, seu EC = BD:AC, adeoque AC:BD = EC:GD, seu EF; est igitur EC ad EF; in ratione datâ, & propterea ex datis angulo CEF, & laterum EC, EF, ratione, dabitur specie triangulum EFC, id est dantur tres anguli. Deinde secetur CF, in L, ut sit CL, ad CF, in ratione datâ CK, ad CD, id est in ratione corporis D, ad summam corporum C + D; & quia in triangulo EFC, specie dato datur ratio laterum EF, FC, dataque est ratio CF, ad FL, dabitur quoque ratio ex his duabus composita EF, ad FL, adeoque ob angulum EFC, etiam datum dabitur specie triangulum EFL; Quare dum progrediuntur corpora C & D, punctum L, semper locabitur in rectâ EL, positione datâ, utpote

quæ est basis trianguli EFL, in quo angulus F, idem constanter manet, & latus EF, positione datum ad latus FL, datam habet rationem. Junge LK, & quia CL:CF = CK:CD (per const.), similia erunt triangula CLK, CFD, & ob datam FD = EG, & datam rationem FD, ad LK, seu CD, ad CK; dabitur LK, magnitudine; lineæ LK, æqualis capiatur EH, & ductâ HK, erit semper ELKH, parallelogrammum, ob LK, æqualem & parallelam ipsi LH, locabitur ergo punctum K, in parallelogrammi illius latere HK, quod positione datum est; nam latus EL, positione, latus verò EH, positione & magnitudine datur. Quare punctum K, seu centrum gravitatis in lineâ rectâ positione datâ progreditur. Quoniam verò, ex demonstratis, triangula CEF, LEF, specie, & tria latera EC, EL, EF, positione data sunt, manifestum est rationem rectæ EL, seu lineæ æqualis HK, ad EC, datam esse. Verum quia punctum C, uniformiter movetur (per hyp.) uniformiter crescit recta EC, ergo pariter recta HK, uniformiter augetur, adeoque punctum K, æquabiliter progreditur in lineâ rectâ HK, positione datâ. Q.e. 1°. demonstrandum....

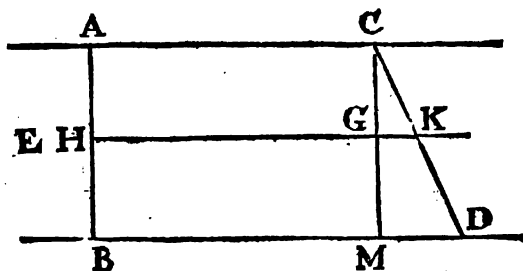
2°. Cor-

**AXIOMA** neâ rectâ. Hoc postea in Lemmate XXIII. ejusque Corollario  
**TA**, SIVE demonstratur, si punctorum motus fiant in eodem plano; & <sup>(9)</sup> eâ-  
**LEGES** dem  
**MOTUS.**

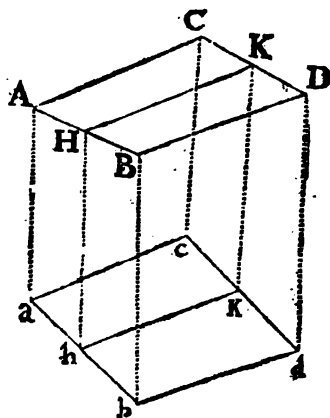
2°. Corpora ex punctis fixis A & B, in diversas plagas progrediantur, semperque ca. iatur BG, in partem oppositam directioni BD, FD, verò secundum directionem BD, cætera fiant ut in superiori constructione eadem manebit demonstratio pro 1°. casu.



68. Si punctum concursus E, in infinitum abeat, parallelæ fient lineæ AC, BD, & ex superiori demonstratione patet centrum gravitatis K, vel quiescere vel uniformiter moveri, in lineâ HK, positione datâ, lineis AC, BD, parallelâ; si autem lineæ parallelæ AC & BD, ad se mutuo accedant tandemque coincident, eadem semper valet demonstratio, ac proinde si corpora in eadem rectâ moveantur, i movebitur uniformiter.



(9) 69. Si rectæ  $AC$  &  $BD$ , non in uno, sed in diversis planis positæ fuerint, ex singulis eorum punctis  $A$  &  $B$ ,  $C$  &  $D$ , in quibus eodem tempore reperiuntur, in planum quodvis  $abcd$ , prolatus assumptum demittantur perpendicularia  $Aa$ ,  $Bb$ ,  $Cc$ ,  $Dd$ ; & ex centris gravitatis  $H$  &  $K$ , perpendicularia  $Hh$ ,  $Kk$ , excitentur, ob motum uniformem punctorum  $A$  &  $B$ , in lineis  $AC$ ,  $BD$ , evidens est puncta  $a$  &  $b$ , uniformiter moveri in lineis  $a$ ,  $b$ ; & quia  $Aa$ ,  $Bb$ ,  $Hh$ , parallelæ sunt; lineæ  $AB$ ,  $ab$ , in eadem ratione datâ in  $H$ , &  $h$ , dividuntur; idemque dicendum de punctis  $K$ , &  $k$ , in lineis  $CD$ , &  $cd$ ; Quare, ex demonstratis (67), punctum  $h$ , uniformiter progreditur in rectâ  $hk$ , ad eque centrum gravitatis  $H$ , semper movetur in plano  $Hh$ - $Kk$ , ad planum  $abcd$ ,



normali, si loco plani,  $a'b'dc$ , aliud  
quodvis ad arbitrium assumeretur, eodem  
modo

# PRINCIPĪA MATHEMATICA. 41

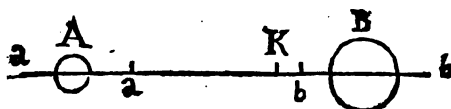
dem ratione demonstrari potest, si motus illi non fiant in eodem plano. Ergo si corpora quocunque moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod lineâ, horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab hoc centro communi in ratione datâ. Similiter & commune centrum horum duorum & tertii cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod ab eo dividitur distantia centri communis corporum duorum & centri corporis tertii in datâ ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod ab eo dividitur distantia inter centrum commune trium & centrum quarti in datâ ratione, & sic in infinitum. Igitur in systemate corporum quæ actionibus in se invicem aliisque omnibus in se extrinsecus impressis omnino vacant, ideoque moventur singula uniformiter in rectis singulis, commune omnium centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

(\*) Porro in systemate duorum corporum in se invicem agentium cùm distantia centrorum utriusque à communi gravitatis centro sit reciprocè ut corpora; erunt motus relativi cor-

AXIOMATA, SIVE  
LEGES  
MOTUS.

modo demonstrari posset centrum gravitatis H, moveri in plano ad assumptum perpendiculari; necesse igitur est ut centrum illud H, moveatur in communi illorum planorum ad alia pro lubitu assumpta perpendicularium intersectione, quæ cum sit lineâ rectâ HK, positione datâ, & punctum h, per rectam hk, uniformiter progrediatur; punctum H, æquabiliter fertur in lineâ HK. In omni igitur casu centrum commune gravitatis duorum corporum quæ motu uniformi per lineas rectas positione datas progrediuntur, semper quiescit vel movetur uniformiter in rectâ positione datâ.

Tom. I.



(\*) 70. Si duobus corporibus A & B, quorum commune gravitatis centrum sit K, æquales motus quantitates in partes contrarias de novo imprimantur, quibus eodem tempore percurrunt spacia Aa, Bb, centri gravitatis status non mutatur; Cum enim K, sit commune centrum gravitatis corporum A & B, (per hyp.) erit  $A : B = KB : KA$  (60) & quia impressæ quantitates motus (6)  $A \times Aa$ ,  $B \times Bb$

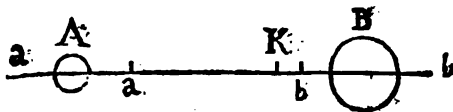
F

æqua-



## 42 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

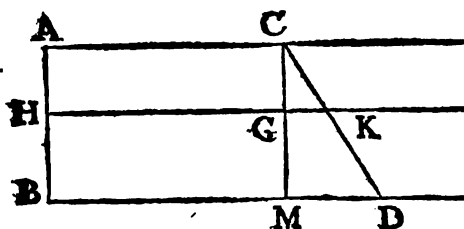
**AXIOMA.** corporum eorundem, vel accedendi ad centrum illud, vel ab eodem recedendi, æquales inter se. Proinde centrum illud à motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque ideo ab actionibus horum corporum inter se, nec promovetur, nec retardatur, nec mutationem patitur in statu suo quoad motum vel quietem. In systemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in se mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus mutat statum suum; & reliquorum, quibuscum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; distantia autem horum duorum centrorum dividitur à communi corporum omnium centro in partes summis totalibus corporum quorum sunt centra reciproce proportionales, ideoque centris illis duobus statum suum movendi vel quiescendi servantibus, commune omnium centrum servat etiam statum suum: manifestum est quod commune illud omnium centrum ob actiones binorum corporum inter se nunquam mutat statum suum quoad motum & quietem. In tali autem systemate actiones omnes corporum inter se vel inter bina sunt corpora, vel ab actionibus inter bina compositæ; & propterea communi omnium centro mutationem in statu motus ejus vel quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in se invicem, vel quiescit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter; perget idem, non obstantibus corporum actionibus inter se, vel semper quiescere, vel semper progredi uniformiter in directum; nisi à viribus in systema extrinsecus impressis deturbetur de



æquales sunt (per hyp.) , erit etiam  $A : B = Bb : Aa$ , adeoque  $KB : KA = Bb : Aa$ , & componendo vel dividendo  $Kb : Ka = Bb : Aa = A : B$ ; dum igitur corpora A & B, ad puncta a & b, motibus impressis perveniunt, centrum K,

immutum remansit (eo), ac proinde ab æqualibus motuum mutationibus in contrarias partes factis non mutat statum suum motus vel quietis. Quapropter cum mutua corporum actio (per leg. 2. 3.) æquales mutationes in utroque corpore versus partes contrarias producat, commune gravitatis centrum duorum corporum ab actionibus horum corporum inter se, nec promovetur, nec retardatur, nec mutationem patitur in statu suo quoad motum vel quietem.

de hoc statu. <sup>(1)</sup> Est igitur systematis corporum plurium Lex AXIOMATICA, SEVE eadem quæ corporis solitarii, quoad perseverantiam in statu motus vel quietis. Motus enim progressivus seu corporis solitarii LEGES seu MOTUS.



(1) 71. Motus progressivus seu corporis solitarii seu systematis corporum ex motu centri gravitatis semper æstimari debet....  
*Dem.*.... 1°. Corpora duo A & B, in lineis A C & B D, parallelis progrediantur cum velocitatibus, ut A C; B D, eorumque commune gravitatis centrum H, per rectam H K, lineis A C & B D, parallelam feratur, ducatur C M, rectæ A B parallela. Quoniam B : A = A H : B H (60) erit B : E + A = A H : A B, & ob parallelas A B, & C M; G K & M D, erit A H : A B = C G : C M = G K : M D, adeoque G K : M D = B : A + B, & B x M D = A + B x G K; verum quia A C = H G = B M, erit H K = A C + G K, & B D = A C + M D; quare A + B x H K = A + B x A C + A + B x G K = A x A C + B x A C + B x M D, ob A + B x G K = B x M D, ergo A + B x H K = A x A C + B x B D, seu summa corporum A & B, in velocitatem centri gravitatis H K, ducta, æqualis est summa factorum in singulis corporibus A & B, in suam velocitatem A C, B D....  
 2°. Si corpora contrariis directionibus C A & B D, moveantur, negativa erit quantitas motus corporis A, propter contrariam directionem C A, adeoque differentia quantitatum motus corporum, in plagas oppositas tendentium, seu quod idem est, quantitas motus in eandem plagam, æqualis erit facto ex summa corporum, in velocitatem centri gravitatis.... 3°. Si

parallelæ A C, B D, ad se mutuo accedant tandemque coincident, eadem semper manet demonstratio, quæ proinde etiam obtinet, dum corpora in eadem rectâ feruntur.... 4°. Si corpora non moveantur in lineis parallelis nec in eodem plano, uniuscuique ponderis directio ac velocitas in duas alias resolvatur, quarum una sit viz centri gravitatis parallela, altera verò ipsi perpendicularis, & ex demonstratis liquet summam quantitatum motus corporum in plagam versùs quam movetur centrum gravitatis esse æqualem facto ex summa corporum in velocitatem centri gravitatis....  
 5°. Si æquabilis non sit corporum motus, sed quacunque ratione acceleretur vel retardetur, temporibus infinitè parvis tanquam æquabilis spectari potest, iisque tempusculis summa quantitatum motus corporum æqualis est facto ex summa corporum in velocitatem centri gravitatis; unde quovis tempore quantitas motus singulorum corporum æqualis est quantitati motus quam habuissent omnia corpora, si communi velocitate centri gravitatis simul lata fuissent.... 6°. Si trium corporum systema moveatur, duo ex hisce corporibus in suo gravitatis centro coacta fingi possunt (ex *Dem.*) ac proinde trium pluriumve corporum aut etiam ejusdem corporis partium systema ad duorum duntaxat corporum systema reducitur; ergo quantitas motus progressivi seu corporis solitarii seu systematis corporum, ex motu centri gravitatis æstimari debet. Q. e. D.

72. *Coroll.* 1.... Si differentia quantitatum motus versùs partes contrarias in systemate corporum sit nihilo æqualis, commune centrum gravitatis quiescit; si inæqualis est, progreditur in eam partem versùs quam prævalet motus.

73. *Coroll.* 2.... Motus systematis corporum in plagam datam habetur, si centri gravitatis motus in duos motus resolvatur, quorum unus in plagam datam dirigatur, alter verò sit ipsi perpendicularis; nam summa corporum ducta in ve-

AXIOMA seu systematis corporum ex motu centri gravitatis æstimari semper  
 TA, SIVE debet.  
 LEGES  
 MOTUS.

## COROLLARIUM V.

(<sup>c</sup>) *Corporum dato spatio inclusorum iidem sunt motus inter se, sive spatium illud quiescat, sive moveatur idem uniformiter in directum sine motu circulari.*

Nam differentię motuum tendentium ad eandem partem, & summę tendentium ad contrarias, eadem sunt sub initio in utroque casu (ex hypöthesi) & ex his summis vel differentiis oriuntur congressus & impetus quibus corpora se mutuo feriunt. Ergo per Legem 11. æquales erunt congressuum effectus in utroque casu; & propterea manebunt motus inter se in uno casu æquales motibus inter se in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo se habent in Navi, sive ea quiescat, sive moveatur uniformiter in directum.

## COROLLARIUM VI.

*Si corpora moveantur quomodocunque inter se, & à viribus acceleratricibus æqualibus secundum lineas parallelas urgeantur; per-*

locitatem centri gravitatis versus datam directionem exponit quantitatem motus totius systematis in eandem partem progredientis.

(<sup>c</sup>) 74. Si navi quiescenti in quā continentur corpora variis motibus agitata, motus in directum æquabilis imprimatur, omnia hæc corpora navis velocitatem æquę participant (leg. 1. 2.), adeoque singulis corporibus additur in eandem plagam æqualis velocitas, ac proinde motus navi impressus respectivas corporum velocitates non mutat; quare differentię velocitatum in corporibus quę ad eandem partem tendunt, & summę velocitatum in corporibus quę ad partes contrarias tendunt, eadem manent antè & post motum navi impressum; sed ex his summis vel differentiis quę sunt respectivę corporum velocitates, oriuntur congressus & ictus magnitudines quibus corpora se mutuo

feriunt; nam si corpus aliquod M, velocitate C, in corpus quiescens m, incurrat, eadem est ictus magnitudo ac si utrique corpori nova velocitas c, in eandem partem accederet, & corpus M, cum velocitate C + c, in corpus m, velocitate c, motum impingeret; corpus enim M, in m, non agit per velocitatem c, utrique corpori communem, sed per solam velocitatum differentiam C + c - c, seu C; hæc autem differentia est ipsamet velocitas quā corpus M, in aliud m, quiescens agit. Iidem ergo erunt congressus ac proinde æquales congressuum effectus in utroque casu (per leg. 2.), & propterea manebunt motus respectivi in uno casu æquales motibus respectivis corporum in altero; si autem motus circularis navi imprimeretur, corpora, propter vim centrifugam (18) in varias partes cum variâ velocitate propellerentur.

*pergent omnia eodem modo moveri inter se, ac si viribus illis non essent incitata.*

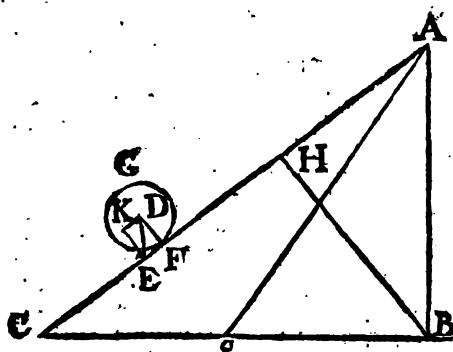
AXIOMATA, SIVE  
LEGES  
MOTUS.

Nam vires illæ æqualiter ( pro quantitibus movendorum corporum ) & secundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter ( quoad velocitatem ) movebunt per legem 11. ideoque nunquam mutabunt positiones & motus eorum inter se.

*Scholium. ( a )*

Haftenus principia tradidi à Mathematicis recepta & experientiâ multiplici confirmata. Per leges duas primas & corollaria

( a ) 75. Vis acceleratrix gravitatis, quæ corpus in plano ad horizontem inclinato juxta plani directionem urgetur, est ad vim gravitatis acceleratricem quæ secundum directionem horizonti perpendicularem sollicitatur; ut altitudo plani ad ipsius longitudinem .... *Dem....*



Globus G, plano AC, ad horizontem CB, inclinato incumbat; ex A, ad horizontem CB; demittatur perpendicularum AB, & ex centro D, globi ad planum AC, ducatur recta DE, perpendicularo AB, parallela quæ exponat vim gravitatis acceleratricem quæ globus secundum directionem DE, horizonti perpendicularem urgetur; vis illa, DE, in duas vires resolvatur ( 41 ), quarum altera DF, fit ad planum AC, normalis quæ proin-

dè tota plano sustinetur, altera verò DK, seu FE, plano parallela quæ solà globus ad motum secundum directionem plani AC, sollicitatur, & erit vis acceleratrix juxta plani inclinati directionem agens, ad vim acceleratricem perpendiculariter sollicitantem, ut EF, ad DE; sed quoniam triangula EFD, ABC, ob parallelas DE, AB, & angulos rectos F & B, æquales, similia sunt, est  $FE : DE = AB : AC$ . Vis igitur acceleratrix gravitatis secundum directionem plani inclinati AC, est ad vim gravitatis acceleratricem secundum directionem horizonti perpendicularem, ut plani inclinati altitudo AB, ad ipsius longitudinem AC. Q. e. D.

76. Coroll. 1.... Quoniam vis acceleratrix gravitatis juxta directionem DE, horizonti perpendicularem constans est ( 26 ), & vis acceleratrix FE, secundum directionem plani inclinati AC, est ad vim DE, in ratione datâ AB, ad AC; vis acceleratrix FE, constans quoque erit; ea igitur omnia quæ de motibus vi acceleratrice constantis generis demonstrata sunt, transferre licet ad motus vi gravitatis acceleratrice in plano inclinato productos; nempe. 1°. Grave per planum inclinatam motu uniformiter accelerato descendit, & motu uniformiter retardato ascendit ( 25 ). 2°. Velocitates sunt ut tempora quibus acquiruntur ( 25 ), spatia e quiete cadendo descripta sunt in ratione duplicatâ temporum quibus percurruntur, item-

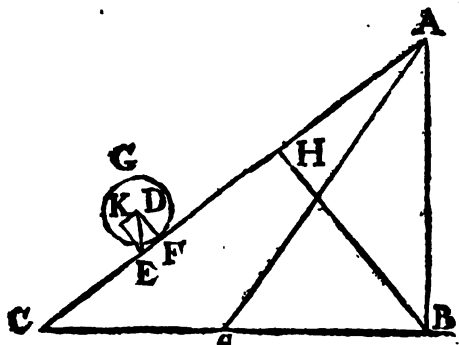
**AXIOMA-  
TA, SIVE  
LEGES  
MOTUS.** laria duo prima *Galileus* invenit descensum gravium esse in duplicata ratione temporis, & motum projectilium fieri in parabola; conspirante experientia, nisi quatenus motus illi per aëris resistentiam aliquantulum retardantur. Corpore cadente gravitas uniformis, singulis temporis particulis æqualibus æqualiter agendo imprimit vires æquales in corpus illud, & velocita-

que velocitatum quæ his temporibus acquiruntur; tempora verò itemque velocitates sunt in ratione subduplicatâ spatorum (27, 28). 3°. Spatium à gravi in plano inclinato percursum ab initio motus computatum, dimidium est illius quod eodem tempore ab eodem mobili uniformiter percurri potest cum velocitate ultimò acquisitâ (29).

77. *Coroll. 2.* Quia vires acceleratrices constantes sunt inter se in ratione velocitatum, quas eodem tempore producunt (13), velocitas lapsu perpendiculari per  $AB$ , acquisita erit ad velocitatem eodem tempore in plano inclinato acquisitam, ut longitudo plani,  $AC$ , ad ipsius altitudinem  $AB$  (75).

78. *Coroll. 3.* Si ex puncto  $B$ , perpendiculari  $AB$ , ad planum inclinatam agatur perpendicularis  $BH$ ; spatium  $AH$ , in plano inclinato eodem tempore percurritur, quo lapsu perpendiculari describitur  $AB$ ; nam ob similitudinem triangulorum  $AHB$ ,  $ABC$ ,  $AH : AB = AB : AC$ , adeoque  $AH$ , est ad  $AB$ , ut velocitas in plano inclinato acquisita ad velocitatem, eodem tempore in perpendicularo  $AB$ , acquisitam (77). Sed velocitates motu uniformiter accelerato acquisitæ, sunt ut dupla spatia, seu, quod idem est, ut spatia eodem tempore percurra (76); ergò  $AH$ ,  $AB$ , sunt spatia eodem tempore percurra.

79. *Coroll. 4.* Tempus quo planum  $AC$  percurritur, est ad tempus quo percurritur ipsius altitudo  $AB$ , ut longitudo plani  $AC$ , ad ejus altitudinem  $AB$ ; tempus enim per  $AC$ , est ad tempus per  $AH$ , in ratione subduplicatâ  $AC$ , ad  $AH$  (76). Sed ob continuam rectarum  $AC$ ,  $AB$ ,  $AH$ , analogiam  $AC$ , est ad  $AB$ , in ratione subduplicatâ  $AC$ , ad  $AH$ ; tempus igitur per  $AC$ , est ad tempus per  $AH$ , hoc est



(78), ad tempus per  $AB$ , ut  $AC$ , ad  $AB$ .

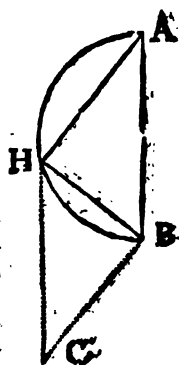
80. *Coroll. 5.* Cum sit  $AC$ , ad  $AB$ , ut tempus per  $AC$ , ad tempus per  $AB$ ; &  $AC$ , ad  $AB$ , ut tempus per  $AC$ , ad tempus per  $AB$  (79), tempora quibus percurruntur diversa plana  $AC$ ,  $Ac$ , ejusdem altitudinis  $AB$ , sunt ut planorum longitudines.

81. *Coroll. 6.* Celeritates gravium in plano quovis inclinato  $AC$ , & in perpendicularo  $AB$ , æquales sunt, ubi gravia ex eadem altitudine ad eandem rectam horizontalem  $CB$ , pervenerint, adeoque velocitates in planis inclinatiss  $AC$ ,  $Ac$ , ejusdem altitudinis in  $C$  &  $c$ , sunt æquales; est enim velocitas in  $B$ , ad velocitatem in  $H$ , ut  $AB$  ad  $AH$  (ea enim spatia eodem tempore descripta sunt) & ob similitudinem triangulorum  $AHB$ ,  $ABC$ , sicut  $AC$  ad  $AB$ : velocitas autem in  $C$ , est ad velocitatem in  $H$ , in ratione subduplicatâ  $AC$ , ad  $AH$ , hoc est, ob continuam analogiam rectarum  $AC$ ,  $AB$ ,  $AH$ , in ratione  $AC$ , ad  $AB$ ; quare velocitas in  $B$ , est ad velocitatem in  $H$ , ut velocitas in  $C$ , ad eandem velocitatem in  $H$ , adeoque velocitas in  $C$ , æqualis est velocitati in  $B$ .

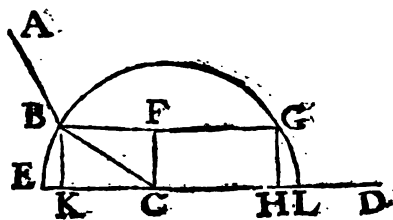
82. *Co-*

citates æquales generat : & tempore toto vim totam imprimit, AXIOMA-  
& velocitatem totam generat tempori proportionalem. Et TA, SIVE  
spatia temporibus proportionalibus descripta, sunt ut velocita-<sup>LEGES</sup>  
tes<sup>MOTUS.</sup>

82. Coroll. 7. Tempus descensus per chordas quolibet A H, H B, circuli cujus diameter, A B, est ad horizontem perpendicularis, æquale est tempori descensus per totam diametrum A B, ac præ inde tempora descensus per omnes chordas sunt æqualia; Cum enim angulus A H B, in semicirculo rectus sit, tempus descensus per A H, æquale est tempori descensus per A B, (78), & ducta H C, diametro A B, æquali & parallela junctaque C B, erit ob angulum H B G, rectum, tempus per H B, æquale tempori per H C, seu per A B.



83. Si corpus in curvâ immotâ incedit, vis quâ singula curvæ puncta premit, cum vi finitâ quâ movetur corpus comparata, major non est quantitate infinitesimâ primi ordinis; vis seu celeritas quam in singulis curvæ punctis amittit, major non est quantitate infinitesimâ secundi ordinis; tandem vis seu celeritas per finitum curvæ arcum amissa major non est quantitate infinitesimâ primi ordinis; adeoque corpus in curvâ progreditur eadem celeritate finitâ ac si nihil omnino virtutis amitteret....

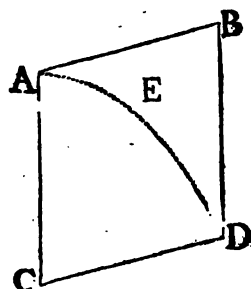


Dem. .... Curva quælibet, ut notum est, considerari potest tanquam polygonum A B C D, ex innumeris atque infinitis lateribus rectis A B, B C, C D, compositum, quorum duo quævis B C, C D,

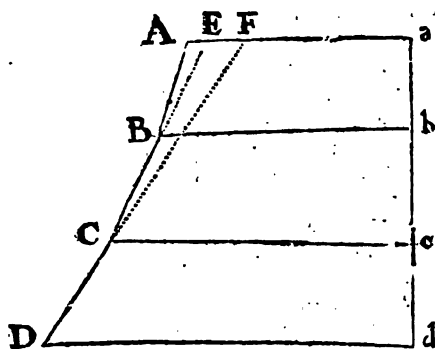
angulum comprehendunt à duobus angulis rectis, nonnisi quantitate infinitesimâ deficientem, ita ut producto latere C D, in E, angulus externus B C E, sit infinitesimus. Centro C, & radio C B, describatur semicirculus E B G L, ex puncto B verò demittatur in rectam E D, perpendicularis B K, & completo rectangulo K E, motus corporis latere B C, expositus, in binos B K, B F, seu K C, resolvitur (Coroll. 1. Newt.) His positis manifestum est (51) vim seu celeritatem quâ corpus in latere C D, incurrit, illudque premit seu percutit, perpendiculari F G, sive B K, representari; celeritatem post ictum, (supponendo corpora esse elaterio destituta) rectâ K C, seu C H, exhiberi, & celeritatem ex impactu in C, amissam rectâ E K, exponi, cum E K, sit differentia rectarum B C, K C; hoc est; celeritatum ante & post impactum. Jam si angulus B C K, finitæ quantitatæ esset, recta B K, finitam haberet ad rectas B C, K C, rationem, quæ decrecente angulo B C K, semper minuitur adeoque infinitesima evadit, dum angulus B C K est infinitesimus; est igitur B K, seu vis quâ corpus curvam premit in C, quantitas non major infinitesimâ primi ordinis; verum quia in circulo E K : B K = B K : K L, erit E K, quantitas infinitesima respectu B K, quemadmodum; ex demonstratis B K, infinitesima est respectu B C; aut K C, adeoque respectu K L; ergo celeritas seu vis in puncto C amissa non superat quantitatem infinitesimam secundi ordinis. Quare cum velocitas quam corpus per singula curvæ latera A B, B C, C D, amittit, non excedat quantitatem infinitesimam secundi ordinis; per latera curvæ numero infinita, hoc est; per arcum curvæ finitum; non potest celeritatem amittere majorem quantitate infinitesimâ primi ordinis quæ est summa quantitarum infinitesimarum secundi ordinis; eâ igitur quantitate neglectâ, corpus eodem modo motum suum in curvâ continuat ac si nihil virtutis amisset. Q. e. D.

AXIOMATA,  
SIVE  
LEGES  
MOTUS.

tes & tempora conjunctim; id est in duplicata ratione temporum. Et corpore sursum projecto gravitas uniformis vires imprimit & velocitates aufert temporibus proportionales; ac tempora ascendendi ad altitudines summas sunt ut velocitates auferendæ, & altitudines illæ sunt ut velocitates ac tempora conjunctim: seu in duplicata ratione velocitatum. Et corporis secundum rectam quamvis projecti motus à projectione oriundus cum motu à gravitate oriundo componitur. Ut si corpus *A* motu solo projectionis dato tempore describere posset rectam *AB* & motu solo cadendi eodem tempore describere posset altitudinem *AC*: compleatur parallelogrammum *ABDC*, & corpus illud motu composito reperietur in fine temporis in loco *D*; & curva linea *AED*, quam corpus illud describet, erit parabola quam recta *AB* tangit in *A*, & cujus ordinata *BD* est ut *ABq*. Ab iisdem legibus & corollariis pendent demonstrata



de



84. Si grave ex quiete in *A*, per plana contigua *AB*, *BC*, *CD*, descendat, & flexus seu anguli *B*, *C*, motui non officiant, velocitas gravis per plana inclinata descendens, æqualis est velocitati quam lapsu perpendiculari haberet in pari ab horizonte distantia. Dem.... Ductis rectis *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, ho-

rizonti parallelis & perpendicularo, a *d*, demisso, producantur *CB*, *DC*, donec occurrant rectæ *Aa*, in *E* & *F*; velocitas lapsu per *AB*, acquisita æqualis est velocitati quæ acquireretur lapsu per *EB*, aut etiam per *AB*, (81), adeoque cum flexus *B*, motui non officiat (per hyp.) grave motum suum per planum *BC*, eodem modo continuat, ac si ex puncto *E*, per planum unicum *EC*, descendisset; est igitur velocitas in *C*, æqualis velocitati lapsu perpendiculari per *a*, *c*, acquisita. Similiter ostenditur velocitatem in *D* æqualem esse velocitati in *d*. Q. e. D.

85. Augeatur planorum numerus, & singulorum longitudo minuat in infinitum ut linea *AEC D* curva evadat, & quia anguli *B*, *C*, *D*, velocitati corporis non officiant (83), manifestum est, gravis per curvam descendens velocitatem in singulis curvæ punctis *B*, *C*, *D*, æqualem esse velocitati lapsu perpendiculari acquisitæ in punctis correspondentibus *b*, *c*, *d*.

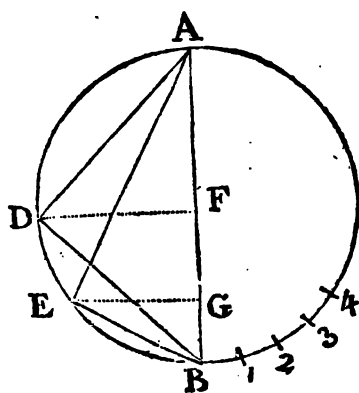
86. Si

de temporibus oscillantium pendulorum, suffragante horologio-  
rum experiētiā quotidianā: Ex his iisdem & lege tertiā *Chris-* AXIOMA-  
*trophorus Wrennus* Eques auratus, *Johannes Wallisius* S. T. D. & *Christi-* TA, SIVE  
*anus Hugenius*, ætatis superioris geometrarum facile prin- LEGES  
cipes, regulas congressuum & reflexionum durorum corporum MOTUS.  
seorsim invenerunt, & eodem fere tempore cum *Societate Re-*  
*giā* communicarunt, inter se (quoad has leges) omnino con-  
spirantes: & primus quidem *Wallisius*, deinde *Wrennus* & *Hu-*  
*genius* inventum prodiderunt. Sed & veritas comprobata est à *Wren-*  
*no* coram *Regiā Societate* per experimentum pendulorum: quod  
etiam

86. Si grave A descendat per curvam quamlibet A B C D, ductis lineis A a, B b, C c, hori-  
zonti parallelis, & ex puncto curvæ infimo D, rectā D E, ad horizontem normali, patet (85) gravis per arcum A D, vel a D, descendens eandem esse velocitatem in punctis æquē altis B & b, C & c. Quare cum ex A, pervenit ad punctum infimum D, ex impetu per lapsum acquisito ascendit per arcum D a, ad punctum a, æquē altum, in quo omnis velocitas exstringitur, & in punctis correspondentibus B & b, C & c, eandem tam in ascensu quam in descensu habet velocitatem (26). Si verò arcus D a, arcui D A, similis & æqualis fuerit, singuli arcus æquē alti C D & D c, B D & D b, A D & D a, æqualibus respectivè temporibus percurruntur (26).

87. Velocitas gravis per quemvis circuli arcum E B, descendens in puncto infimo B, est ad velocitatem quam lapsu perpendiculari per totam diametrum A B acquireret, ut chorda E B, ad diametrum A B ..... Dem ... Ductā E G, hori-  
zonti parallelā adeoque ad diametrum A B, perpendiculari, velocitas per arcum E B, acquisita, æqualis est velocitati acquisitæ per G B (85). Est ergo ad velocitatem per A B, acquisitam in ratione subduplicatā G B, ad A B (28.) Sed

Tom. I



propter triangula rectangula similia A E B, B G E,  $GB : EB = EB : AB$ , adeoque E B, ad A B, in ratione subduplicatā G B ad A B; velocitas igitur per arcum E B, acquisita in B, est ad velocitatem per A B, acquisitam ut chorda E B, ad diametrum A B. Q. e. D.

88. Coroll. Ductā quavis alterā chordā D B, erit etiam velocitas per arcum D B, acquisita in B, ad velocitatem per diametrum A B, ut D B, ad A B, ac proinde velocitates per arcus D B, E B, acquisitæ in puncto infimo B, sunt inter se ut horum arcuum chordæ; undè si capiuntur arcus B 1, B 2, B 3, B 4, quorum chordæ sint respectivè ut 1. 2. 3. 4. velocitas gravis per arcus illos descendens in puncto B, erunt ut 1. 2. 3. 4.

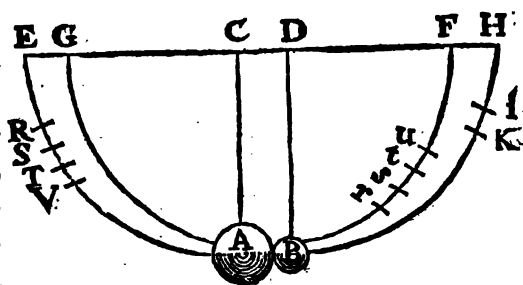
G

89. Si



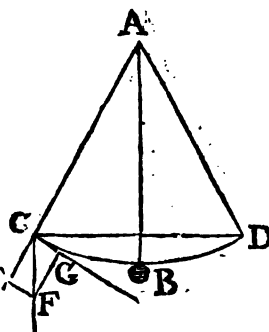
AXIOMA- etiam Clarissimus *Mariottus* libro integro exponere mox dignatus  
 TA, SIVE est. Verum, ut hoc experimentum cum theoriis ad amussim con-  
 LEGES gruat, habenda est ratio,  
 MOTUS. cum resistentiæ aëris, tum  
 etiam vis elasticæ concurren-  
 tium corporum. Pend-

deant corpora sphaerica *A*,  
*B* filis parallelis & æqua-  
 libus *AC*, *BD*, à cen-  
 tris *C*, *D*. His centris &

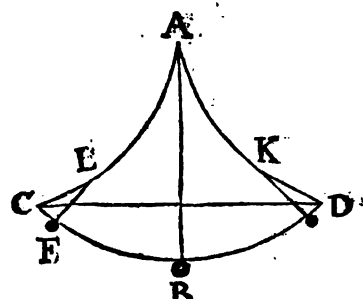


inter-

89. Si pen-  
 dulum *B*, cir-  
 cā punctum fi-  
 xum *A*, rote-  
 tur, & globus  
*B*, filo *AB*,  
 appensus inf-  
 tar puncti con-  
 sideretur, arc-  
 um circuli *C*  
*BD*, descri-  
 bet, idemque  
 globo huic mo-  
 tus accideret ac si



in superficie sphaerica immota & perfecte  
 lævigata sublato filo volveretur... *Dem.*..  
 Ad punctum *C*, adducatur globus *B*, &  
 exinde demittatur; & recta *CF*, horizonti  
 perpendicularis vim gravitatis acceleratri-  
 cem in perpendiculo exponat; ea vis re-  
 solvatur in duas vires, quarum una exhi-  
 beatur recta *CE*, ad arcum seu tangen-  
 tem in *C*, perpendiculari; altera verò  
 tangente *CG*; vis *CE*, quā filum *AC*,  
 directè trahitur ad globi motum nihil con-  
 fert & solā vi ut *CG*, urgetur; arcus ve-  
 rò *CBD*, considerari potest ut polygo-  
 num cuius laus unum in *C*, positionem  
 habet tangentis *CG*, & si globus per pla-  
 num *CG*, vi gravitatis urgeatur, sublato  
 filo vis *CE*, plano *CG*, tota sustinetur,  
 & globus solā vi *CG*, ad motum in pla-  
 no *CG*, sollicitatur. Cum igitur idem  
 in omnibus punctis arcus *CBD*, eodem  
 modo demonstrari possit, patet filum *AC*,  
 superficie *CBD*, vices subire, & in utro-  
 que casu motum globi per arcum *CBD*,  
 eadem ratione perfici. Q. e. D.



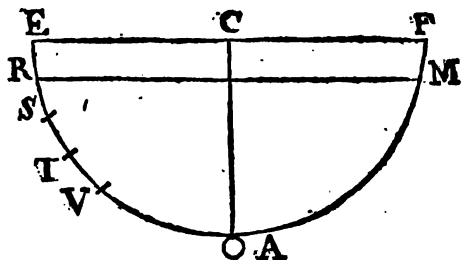
90. Coroll. 1. Pendulum *AB*, inter  
 duas laminas curvas *ALC*, *AKD*, im-  
 motas & sese contingentes in *A*, ita of-  
 cilleretur ut filum *AB*, in situ ad horizon-  
 tem perpendiculari utramque laminam tan-  
 gat in *A*; dum verò oscillatur pendulum,  
 curvis laminis filum circumplicetur easque  
 perpetuò tangat ut in *L* & *K*; per hanc  
 filii ad laminas applicationem continuò im-  
 peditur motus penduli in circulo, aliam-  
 que curvam *CB D*, describere cogitur;  
 & eodem quo usui fuimus ratiocinio (89),  
 demonstratur pendulum in hac curvā eo-  
 dem modo moveri ac si grave *B*, libere &  
 absque filo per curvam immotam & per-  
 fecte lævigatam *CB D*, incederet.

91. Coroll. 2. Quapropter omnia quæ  
 de motu gravium in curvis superficiebus  
 demonstrata fuere, motui penduli per eas-  
 dem curvas oscillantis conveniunt. Nempe  
 1<sup>o</sup> Penduli velocitas semper æqualis est  
 velocitati quam acquireret cadendo per  
 altitudinem perpendicularem arcui percur-  
 so correspondentem (85). 2<sup>o</sup> Pendu-  
 lum ex *C* demissum, vi gravitatis urgen-

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 51

intervallis describantur semicirculi  $EAF$ ,  $GBH$  radiis  $CA$ , AXIOMA-  
 $DB$  bisectionis. (b) Trahatur corpus  $A$  ad arcus  $EAF$  punctum  $TA$ , SIVE  
 quodvis  $R$ , & (subducto corpore  $B$ ) demittatur inde, re-  
 LEGBES  
 deatque post unam oscillationem ad punctum  $V$ . Est  $RV$  MOTUS.  
 retardatio ex resistantia aeris. Hujus  $RV$  fiat  $ST$  pars  
 quarta sita in medio; ita scilicet ut  $RS$  &  $TV$  æquen-  
 tur; sitque  $RS$  ad  $ST$  ut 3 ad 2. Et ista  $ST$  exhibebit re-  
 tardationem in descensu ab  $S$  ad  $A$  quam proximè. Restitua-  
 tur corpus  $B$  in locum suum. Cadat corpus  $A$  de puncto  $S$ ,  
 & velocitas ejus in loco reflexionis  $A$  sine errore sensibili tan-  
 ta erit, ac si in vacuo cecidisset de loco  $T$ . Exponatur igitur

te ad punctum infimum  $B$ , descendet, &  
 ex impetu concepto, per arcum  $BD$ , af-  
 cender ad eandem altitudinem  $D$ , ibique  
 omni velocitate amissa, vi gravitatis im-  
 pellente ad punctum infimum  $B$ , relabatur,  
 amissamque recuperans velocitatem fedi-  
 bit ad punctum  $C$ , atque ita continuas  
 oscillationes ita & reditu in curvâ  $CBD$ ,  
 perficiet (86).



92. Coroll. 3. Si nulla foret medii re-  
 sistentia, nullaque circa laminas incurvas-  
 tas aut centrum rotationis frictio, æquales  
 & perpetuæ forent pendulorum oscillatio-  
 nes; verum has ob causas singulis vibra-  
 tionibus, licet insensibiliter, minuitur pen-  
 duli velocitas, arcusque continuò brevior-  
 es describit, ac tandem omnino quiescit.

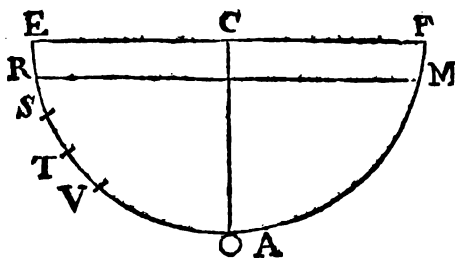
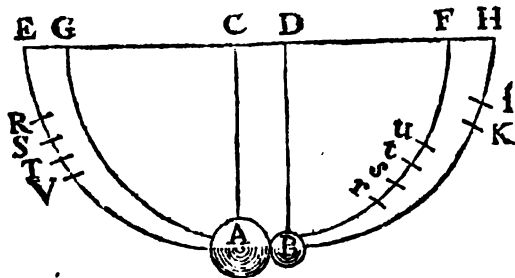
93. Coroll. 4. Velocitates ejusdem  
 penduli in circuli peripheriam excurrentis,  
 sunt in puncto infimo ut arcuum de-  
 scriptorum chordæ (88).

(b) 94. Trahatur corpus  $A$ , ad arcus  
 $EAF$ , punctum quodvis  $R$ , & demitta-  
 tur inde, sublata medii resistantia ad ean-  
 dem altitudinem  $M$ , ascendere & rursus  
 ad punctum  $R$ , redire debet (92). Cum  
 autem post unam oscillationem ex ita &  
 reditu compositam perveniat (ex hyp.)  
 ad punctum  $V$ , arcus  $RV$  exponet me-  
 dii retardationem in duplici ascensu &  
 descensu; quare ut habeatur medii retar-  
 datio in uno tantum descensu, sumenda est  
 quarta pars totius retardationis, id est quar-  
 ta pars arcus  $RV$ , dummodo ille def-

ensus neque ex puncto supremo  $R$ , neque  
 ex infimo  $V$  ordiatur: nam cum major sit  
 medii retardatio in arcu majori quam in  
 minori, semperque fiant minores arcus à  
 pendulo oscillante descripti, inæquales  
 quoque erunt retardationes in singulis  
 arcibus, & retardatio descensus per  $RA$ ,  
 major erit quartâ parte totius retardatio-  
 nis  $RV$  ut retardatio ultimi ascensus  $AV$ ,  
 minor erit quartâ parte totius retardatio-  
 nis  $RV$ . Hoc autem aut simili calculo  
 determinavit *Newtonus* punctum  $S$  tale ut  
 retardatio in descensu per  $SA$  sit quar-  
 ta pars totius retardationis  $RV$ . Dica-  
 tur arcus  $RA$ , 1, arcus  $RV$ , 4  $b$ , arcus  
 quæsitus  $SA$   $x$ ; sintque retardationes ar-  
 cubus descriptis proportionales, erit arcus  
 $SA$  ( $x$ ) ad arcum  $RA$  (1) ut retardatio  
 arcus  $SA$  quæ statuitur esse  $b$ , seu quarta  
 pars totius  $RV$ , ad retardationem primi ar-  
 cus  $RA$  quæ erit  $b : x$ . Quærantur succe-

AXIOMA- tur hæc velocitas per chordam arcus  $TA$ . Nam velocitatem  
 TA, SIVE penduli in puncto infimo esse ut chordam arcus, quem cadendo  
 LEGES descripsit, propositio  
 MOTUS. est geometris notissima.

Post reflexionem perveniat corpus  $A$  ad locum  $s$ , & corpus  $B$  ad locum  $k$ . Tollatur corpus  $B$  & inveniatur locus  $v$ ; à quo si corpus  $A$  demittatur & post unam oscillationem redeat ad locum  $r$ ; sit  $st$  pars quarta ipsius  $rv$  sita in medio, ita videlicet ut  $rs$  &  $tv$  æquantur; & per chordam arcus  $tA$  exponatur velocitas, quam corpus  $A$  proxime post reflexionem habuit in loco  $A$ . (\*) Nam  $t$  erit locus ille verus & correctus, ad quem corpus  $A$ , sublatâ aeris resistentiâ, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus  $k$ , ad quem corpus  $B$  ascendit, & inveniendus locus  $l$ , ad quem corpus illud ascen-



sitæ retardationes secundi, tertii, quartæ arcus eadem ratione; arcus autem secundus est æqualis primo  $RA$ , dempta ejus retardatione  $b:x$ . Tertius arcus æqualis secundo dempta ejus retardatione, & sic deinceps, omnes verò illæ retardationes simul sumptæ æquabuntur toti retardationi  $RV$  seu  $4b$ ; unde fit æquatio ex qua valor arcus  $SA$ , seu  $x$ , obtinebitur, per approximationem autem invenietur æqua-

lis  $1\frac{3}{2}b$ , sumatur itaque  $RS$  æqualis

quartæ parti cum ejus semisse totius retardationis  $RV$ , retardatio per arcum  $SA$  erit æqualis  $ST$  quartæ parti totius retardationis  $RV$ , idèdque cadat corpus ex puncto  $S$ , ejus celeritas in  $A$  eadem est sine errore sensibili, ac si in vacuo decidisset ex  $T$ .

(\*) 95.  $t$ , (fig. *Newt.*), erit locus verus & correctus ad quem corpus  $A$ , sublatâ aeris resistentiâ ascendere debuisset; nam corpus  $A$ , ex  $t$ , in medio non resistente descendens, in puncto infimo  $A$ , eam haberet velocitatem quâ posset arcum  $At$ , ascendendo describere (91), & quâ ob aeris resistentiam, nonnisi arcum  $As$ , (94) percurreret, ergò cum post reflexionem ascendat ad  $s$ , eam habet in  $A$  velocitatem, quâ in medio non resistente ad punctum  $t$  ascenderet.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 53

ascendere debuisset in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia, <sup>AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.</sup> perinde ac si in vacuo constituti essemus. Tandem ducendum erit corpus *A* (ut ita dicam) in chordam arcûs *TA*, quæ velocitatem ejus exhibet, ut habeatur motus ejus in loco *A* proximè ante reflexionem; deinde in chordam arcus *IA*, ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime post reflexionem. Et sic corpus *B* ducendum erit in chordam arcûs *BI*, ut habeatur motus ejus proximè post reflexionem. Et simili methodo, ubi corpora duo simul demittuntur de locis diversis, invenienti sunt motus utriusque tam ante, quam post reflexionem; & tum demum conferendi sunt motus inter se & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in pendulis pedum decem remtentando, idque in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis amplissimis, putà pedum octo vel duodecim vel sexdecim, concurrerent; reperi semper sine errore trium digitorum in mensuris, ubi corpora sibi mutuo directè occurrerant, æquales esse mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatæ, atque ideo actionem & reactionem semper esse æquales. Ut si corpus *A* incidebat in corpus *B* quiescens cum novem partibus motûs, & amissis septem partibus pergebat post reflexionem cum duabus; corpus *B* resiliabat cum partibus istis septem. Si corpora obviam ibant, *A* cum duodecim partibus & *B* cum sex, & redibat *A* cum duabus; redibat *B* cum octo, factâ detractioe partium quatuordecim utrinque. De motu ipsius *A* subducantur partes duodecim & restabit nihil: subducantur aliæ partes duæ, & fiet motus duarum partium in plagam contrariam: & sic de motu corporis *B* partium sex subducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quod si corpora ibant ad eandem plagam, *A* velocius cum partibus quatuordecim, & *B* tardius cum partibus quinque, & post reflexionem pergebat *A* cum quinque partibus; pergebat *B* cum quatuordecim, facta translatione partium novem de *A* in *B*. Et sic in reliquis. A congressu & collisione corporum nunquam mutabatur quantitas motus, quæ ex summâ motuum conspirantium & differentiâ contrariorum colligebatur. Nam erro-

**AXIOMA.** Motum digiti unius & alterius in mensuris tribuerim difficulta-  
**TA, SIVE** ti peragendi singula satis accuratè. Difficile erat, tum pen-  
**LEGES** dula simul demittere sic, ut corpora in se mutuo impinge-  
**MOTUS.** rent in loco infimo *AB*; tum loca *s*, *k* notare, ad quæ cor-  
 pora ascendebant post concursum. Sed & in ipsis corporibus  
 pendulis inæqualis partium densitas, & textura aliis de causis  
 irregularis, errores inducebant.

Porro ne quis objiciat regulam, ad quam probandam inven-  
 tum est hoc experimentum, præsupponere corpora vel abso-  
 lutè dura esse, vel saltem perfectè elastica, cujusmodi nulla  
 reperiuntur in compositionibus naturalibus; (<sup>d</sup>) addo quod ex-  
 perimenta jam descripta succedunt in corporibus mollibus æ-  
 que ac in duris, nimirum à conditione duritiei neutiquam pen-  
 dentia. Nam si regula illa in corporibus non perfectè duris  
 tentanda est, debet solummodo reflexio minui in certâ pro-  
 portione pro quantitate vis elasticæ. In theoriâ *Wrenni* & *Hu-*  
*genii* corpora absolutè dura redeunt ab invicem cum velocita-  
 te congressûs. (<sup>e</sup>) Certius id affirmabitur de perfectè elasticis.  
 (<sup>f</sup>) In imperfectè elasticis velocitas reditûs minuenda est simul  
 cum vi elasticâ; propterea quod vis illa, (nisi ubi partes cor-  
 porum ex congressu læduntur, vel extensionem aliqualem quasi  
 sub

(<sup>d</sup>) 96. Experimenta jam descripta succedunt in corporibus mollibus & non elasticis æquè ac in duris & elasticis, ut potè non à conditione duritiei & elasticitatis, sed tantum ab actionis & reactionis æqualitate & oppositione pendentia; nam si regula illa in corporibus non perfectè elasticis tentanda est, ut ex ipsorum motibus antè conflictum inveniantur motus post conflictum, debet solummodò reflexio minui in certâ proportionem, pro quantitate vis elasticæ (§2).

(<sup>e</sup>) 97. Certius id affirmabitur de perfectè elasticis; corpora enim perfectè dura, seu quorum partes nullâ vi finitâ separari aut flecti possunt, nullâ quoque vi restitutivâ aut repulsivâ pollere videmur; adeoque cum nihil sine causâ fiat, corpo-

rum perfectè durorum concurrentium nulla videtur esse posse reflexio.

(<sup>f</sup>) 98. In imperfectè elasticis, velocitas reditûs minuenda est cum vi elasticâ, propterea quod vis illa, licet imperfecta, certa tamen ac determinata est, in iisdem corporibus, nisi ubi partes corporum ex congressu læduntur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiuntur; dum enim corporis elastici fibræ ex ictu flectuntur, si aliqua abrumpatur fibra, ea non sese restituit, adeoque vis corporis restitutiva minuitur; si verò fibræ extendantur, ut ferri lamina repetitis mallei ictibus in longum deducitur, pars ictûs huic fibrarum extensioni adhibita, vi restitutivâ detrahitur. His causis addi potest instantinus partium corporis percussus motus  
 sono

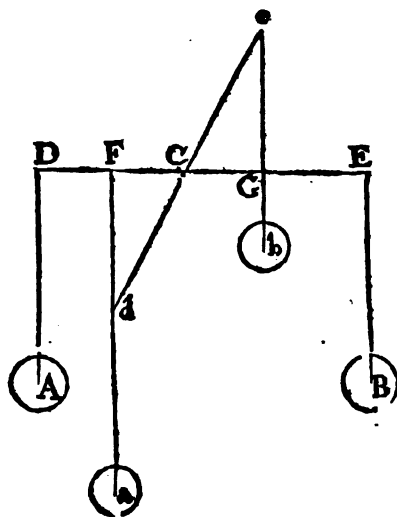
sub malleo patiuntur, ) certa ac determinata sit ( quantum sen-  
tio ) faciatque ut corpora redeant ab invicem cum velocitate  
relativâ , quæ sit ad relativam velocitatem concursus in datâ  
ratione. Id in pilis ex lanâ arctè conglomeratâ & fortiter con-  
strictâ sic tentavi. Primum demittendo pendulâ & mensuran-  
do reflexionem, inveni quantitatem vis elasticæ; deinde per  
hanc vim determinavi reflexiones in aliis casibus concursuum, &  
respondebant experimenta. Redibant semper pilæ ab invicem  
cum velocitate relativâ, quæ esset ad velocitatem relativam  
concursus ut 5 ad 9. circiter. Eâdem fere cum velocitate re-  
dibant pilæ ex chalybe: aliæ ex subere cum paulo minore: in  
vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atque hoc pacto  
lex tertia quoad ictus & reflexiones per theoriam comprobata  
est, quæ cum experienciâ plane congruit.

In

sono ipso satis indicatus, quæ in reflexio-  
nem non impenditur. Hæc materia variis  
Rizzeti experimentis illustratur in  
*Commentariis Instituti Bononiensis*. Tria  
globulorum vitreorum paria sibi paravit  
Rizzetus; globuli primi paris diametrum  
habebant trium unciarum, secundi dua-  
rum, tertiî unius, ita ut essent diverso-  
rum parium diametri inter se, ut 3. 2. 1.  
Fecit ut globuli primiparis filo appensi si-  
mul congregarentur, notavitque velocita-  
tem respectivam quam habuerunt vel an-  
te vel post ictum, detractâ tamen, more  
Newtoniano, aeris resistentiâ; idemque ten-  
tavit rursus in 2.º tum in 3.º pari. In 1.º  
globulorum pari cum velocitas respectiva  
ante ictum fuisset 12, fuit post ictum 10;  
in 2.º pari cum fuisset ante ictum 16,  
fuit post ictum 15; in 3.º pari cum fuisset  
ante ictum 31, fuit post ictum 30.  
Unde velocitatis respectivæ defectus erat  
in primo pari 12: 11; in 2.º pari 16:  
15; in 3.º pari 31: 30; illi autem defectus  
sunt fere diametris 3, 2, 1. proportiona-  
les. Aliud experimentum tentavit Rizza-  
tus. Chordam calyceam duos pedes lon-  
gam horizontaliter positam variis modis  
tendebat, donec tandem repperit tres  
chordæ tensiones, quæ efficerent ut tem-  
pora quibus chorda pulsâ sese restituebat,

fœrent ut 3. 2. 1. Eas autem tensiones  
se affecurum esse, ex graviore vel acutio-  
ri chordarum sono intelligebat; in singu-  
lis tensionibus globum eburneum cujus  
diameter erat duarum unciarum, filo de-  
cem pedes longo appensum & in medio  
transversim complanatum in chordam de-  
mittebat, & detractâ aeris resistentiâ, ve-  
locitatem respectivam ante & post ictum  
notabat. Observavit autem velocitatem  
ante ictum esse ad velocitatem post ictum,  
ut 11, ad 10, in 1.ª tensione, cum chor-  
da pulsâ restitueretur tempore 3; ut 16  
ad 15 in 2.ª tensione, cum chorda resti-  
tueretur tempore 2; tandem ut 31, ad  
30, in 3.ª tensione, cum chorda restitue-  
retur tempore 1; unde concludit defe-  
ctus singulos velocitatis post ictum, tem-  
poribus restitutionum esse proportionales.  
Manente igitur corporum homogeneorum  
magnitudine & figurâ, constans observatur  
ratio velocitatis respectivæ post ictum ad  
velocitatem respectivam ante ictum; sed  
mutatâ magnitudine, experimenta Rizzeti  
ostendunt defectus velocitatis respectivæ  
post ictum in globis homogeneis esse in  
ratione diametrorum, aut etiam in ratio-  
ne temporum quibus globi compressi res-  
tituuntur.

**AXIOMA**—dum & impediendum, si sunt reciproce ut velocitates partium  
**TA, SIVE** rotularum in quas imprimuntur, sustinebunt se mutuò. (1) **Vis**  
**LEGES** cochleæ ad premendum corpus est ad vim manûs manubrium  
**MOTUS.** circumagentis, ut circularis velocitas manubrii eâ in parte ubi



seu, quod idem est, duo pondera ope machinæ cujusvis datæ in se mutuò ita agant, ut pondus unum secundum propriam directionem moveri nequeat, quin pondus alterum contrâ propriam illius directionem rapiat; si loco machinæ datæ substituatur vectis cujus longitudo & hypomoclion talia sint, ut duo pondera data, vectis extremitatibus appensa, eâdem celeritate ac in machinâ datâ se se mutuò moveant, iidem erunt in vecte & in machinâ datâ conatus ponderum in se mutuò, eadem ipsorum momenta; vis enim eadem requiritur ad eandem velocitatem secundum eandem directionem in iisdem corporibus producendam. Itaque vectis DE, horizontalis, cum appensis ponderibus A & B, rotetur circa hypomoclion C, ut situm d e, obineat, & producat filum a d, usque ad F; pondus A, secundum propriam directionem percurrit spatium F d; & pondus B, contrâ propriam directionem eodem tempo-

re percurrit spatium G e; adeoque horum ponderum velocitates sunt semper ut spatia F d, G e, eodem tempore percurra. Momentum ponderis a, est ut  $a \times F C$ ; momentum ponderis b, est ut  $b \times C G$  (47). Sed ob similitudinem triangulorum F C D, e C G;  $FC : CG = Fd : Ge$ . Ergo momenta ponderum a & b, sunt inter se ut  $a \times Fd$ , &  $b \times Ge$ ; seu sunt ut facta ex ponderibus in sua respective spatia eodem tempore percurra, adeoque etiam ut facta ex ponderibus in suas respective velocitates; quare si facta illa æqualia sint, aut quod idem est, si pondera seu vires sint reciproce ut velocitates secundum directiones virium æstimatz, erit æquilibrium. Q. e. D.

101. *Coroll.* Cum ex demonstratis, momenta virium sint semper ut facta ex vi quâlibet in suam velocitatem, seu in spatium quod dato tempore secundum propriam directionem ex dispositione machinæ percurrere debet, omnium machinarum vires metiri licet.

(1) 102. Vis cochleæ ad premendum corpus est ad vim manûs manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii eâ in parte ubi a manu urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus pressum. Nam si resistentia corporis comprimendi ut pondus movendum consideretur, erit (101) momentum vis manubrium circumagentis, ut factum ex vi illâ in suam velocitatem, & momentum resistentiæ ut factum ex resistentiâ in suam quoque velocitatem; ut ergo sit æquilibrium, debet esse resistentia ad vim manûs, ut circularis velocitas manûs ad velocitatem resistentiæ, sive ad velocitatem progressivam cochleæ; aut quia manus describit circulum cujus radius est manubrii longitudo, è centro cochleæ usque ad manum sumpta, dum interea cochleæ per altitudinem seu distantiam duarum helicum progreditur, vis cochleæ ad premendum corpus erit ad vim manûs manubrii.

à manu urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus pressum. (<sup>k</sup>) Vires quibus Cuneus urget partes duas ligni fissi sunt ad vim mallei in cuneum, ut progressus cunei secundum determinationem vis à malleo in ipsum impressæ, ad velocitatem quâ partes ligni cedunt cuneo, secundum lineas facieb. cunei perpendiculares. Et par est ratio machinarum omnium.

AXIOMATA, SIVE  
LEGES  
MOTUS.

Harum efficacia & usus in eo solo consistit, ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contra: Unde solvitur in omni aptorum instrumentorum genere problema, *Datum pondus datâ vi movendi*, aliamve datam resistantiam vi datâ superandi. Nam si machinæ ita formentur, ut velocitates agentis & resistantis sint reciprocè ut vires; agens resistantiam sustinebit: & majori cum velocitatum disparitate (<sup>l</sup>) eandem vincet. Certè si tanta sit velocitatum disparitas, ut vincatur etiam resistentia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter se labentium corporum attritione, quam ex continuorum & ab invicem separandorum cohæsione & elevandorum ponderibus oriri solet; superatâ omni eâ resistentiâ, vis redundans accelerationem motus sibi proportionalem, partim in partibus machinæ, partim in corpore resistente producat. Cæterum mechanicam tracta-

re

nubrium circumagentis ut peripheria circuli prædicto radio descripti ad distantiam duarum helicum.

(<sup>k</sup>) 103. Momentum cunei est ut factum (<sup>101</sup>), ex vi impressâ à malleo in cunei velocitatem, seu in spatium quod dato tempore percurrit cuneus secundum directionem vis à malleo impressæ; momentum verò resistentiæ ligni cuneo findendi est ut factum ex illâ resistentiâ in velocitatem, quâ partes ligni cedunt cuneo secundum lineas facieb. cunei perpendiculares, juxta quarum directionem partes ligni à cuneo moventur; est etiam momentum resistentiæ ut factum ex resistentiâ ligni in spatium quod partes ligni dato tempore describunt, secundum lineas facieb. cunei perpendiculares. Quoniam igitur cuneus agens secundum lineam basi

ipsum perpendicularem; totam suam altitudinem percurrit, dum partes ligni totâ basis cunei latitudine à se invicem remonentur, erit (in casu æquilibrii) vis cunei ad ligni resistentiam, ut cunei altitudo ad latitudinem ipsius basis.

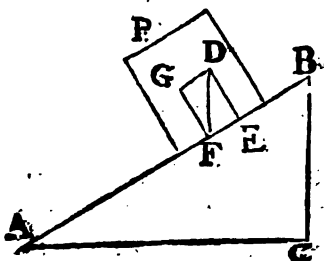
(<sup>l</sup>) 104. Attritionem seu frictionem, aliasque resistentias ex crassitie, rigiditate & funium flexione ortas in machinis considerare necessum est, graves alioquin in praxi errores nascerentur.

Hanc difficilem materiam *Sturmius*; *Leibnizius*, *Amononius*, *Parentius*, *Lahiri* & alii tractarunt. *Bulfingerus* Tom. 2<sup>o</sup>. Comment. *Acad. Petropol.* ad tentandam experimentis frictionum mensuram duo proponit theorematum quæ ob eorum facilitatem & usum hic exscribere non abs re erit.



AXIOMA-  
TA, SIVE  
LEGES  
MOTUS.

re non est hujus instituti. Hisce volui tantum ostendere, quam late pateat quamque certa sit lex tertia motus. Nam si aestimetur agentis actio ex ejus vi & velocitate conjunctim; & similiter resistentis reactio aestimetur conjunctim ex ejus partium singularum velocitatibus & viribus resistendi ab earum attritione, cohæsiōe, pondere, & acceleratione oriundis; erunt actio & reactio, in omni instrumentorum usu, sibi invicem semper



Suprà horizontem  $AC$ , experimento sæpius instituto, elevetur planum  $AB$ , ad angulum  $BAC$ , ita ut si corpus plano  $AB$ , ad hunc angulum elevato imponatur, tantum non descendat; descendat autem si angulus nonnihil augeatur: & hæreat cum aliqua adversus descensum renitentia, si angulus minuatur. Hic angulus dicitur angulus quietis, eoque invento sic inferatur.

Uti sinus totus ad sinum rectum anguli quietis, ita pondus absolutum  $P$ , ad frictionem ejus super plano ad prædictum angulum inclinato. Atque iterum.

Uti Radius ad tangentem anguli quietis, ita pondus absolutum  $P$ , ad frictionem ejus super plano horizontali, cum trahitur in directione ad horizontem parallelâ .... *Dem.* ... Linea  $DF$ , horizonti perpendicularis, pondus absolutum  $P$ , seu vim totam quâ corpus in perpendiculo descendere nititur, exponat; & ductâ  $DE$ , ad planum  $AB$ , normali; vis  $DF$ , in binas vires nempe  $DE$ , plano perpendiculari, &  $EF$ , seu  $DG$ , plano parallelam

resolvitur (41); vis  $DE$ , à plano  $AB$ , etiam perfectè lævigato tota sustinetur, & solâ vi  $DG$ , seu  $EF$ , pondus  $P$ , nititur juxtâ plani directionem descendere; Cum igitur ob frictionem in plano aspero  $AB$ , tantum non descendat, erit frictio æqualis vi  $EF$ ; est itaque pondus absolutum  $P$ , ad frictionem ejus super plano inclinato  $AB$ , ut  $DF$ , ad  $FE$ , hoc est, ob angulum  $E$  rectum & angulum  $FDE$  æqualem angulo quietis  $BAC$ , ut sinus totus ad sinum anguli quietis.  $Q.$  erat 1<sup>um</sup>.

Jam ut idem transferatur ad planum horizontale, debet vis  $DE$ , plano perpendicularis, considerari ut pondus absolutum, & ita planum  $AB$ , se habebit ut planum horizontale respectu ponderis  $DE$ ; vis autem  $FE$ , seu frictio consideranda est: tanquam vis in æquilibrio constituta cum vi æquali trahente pondus  $DE$ , secundum directionem plano  $AB$ , parallelam; & ob triangulorum  $FDE$ ,  $BAC$ , similitudinem, manifestum est pondus  $DE$ , esse ad frictionem  $EF$ , seu pondus absolutum in plano horizontali horizontaliter tractum, esse ad frictionem ejus, ut Radius ad tangentem anguli quietis.  $Q.$  erat 2<sup>um</sup>.

109. Coroll. In his duobus casibus; frictiones, cæteris omnibus paribus, sunt pressiōibus proportionales; nam frictio in plano inclinato dicatur  $f$ ; in plano horizontali  $F$ , & erit per 1<sup>um</sup> theor.  $P : f = AB : BC$ ; & per 2<sup>um</sup> theorema  $B : F = A : C$ ;  $BC$ , seu  $F : P = B : C : A : C$ ; adeoque per compositionem rationum  $P : f = AB \times BC : BC \times AC$ ; ac proinde  $F : f = AB : AC = FD : DE$ ; hoc est, frictio in plano horizontali

# PRINCIPIA MATHEMATICÆ 61

per æquales. Et quatenus actio propagatur per instrumentum, **AXIOMAT**  
 & ultimò imprimitur in corpus omne resistens, ejus ultima **TA, SIVE**  
 determinatio determinationi reactionis semper erit contraria. **LEGES**  
**MOTUS**

ali est ad frictionem in plano ad angu- no horizontali ad pressionem in plano in-  
 lam quietis inclinato, ut pressio in pla- clinato.

MOTU CORPORUM  
LIBER PRIMUS.

## SECTION I.

*De methodo rationum primarum & ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur.*

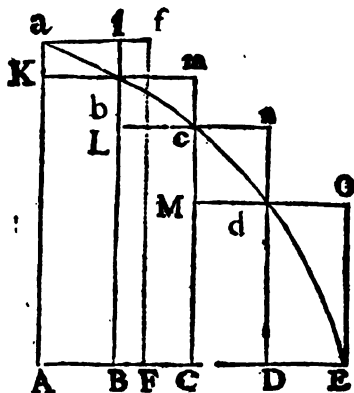
## LEMMA I.

*Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito constanter tendunt, & ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quàm pro datâ quavis differentiâ, sunt ultimò æquales.*

**S**I negas; fiant ultimò inæquales, & sit earum ultima differentia *D*. Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quàm pro datâ differentiâ *D*: contra hypothesin.

## LEMMA II.

*Si in figurâ quavis A a c E, rectis A a, A E & curvâ a c E comprehensâ, inscribantur parallelogramma quocunque A b, B c, C d, &c. sub basibus A B, B C, C D, &c. æqualibus, & lateribus B b, C c, D d, &c. figuræ lateri A a parallelis contenta; & compleantur parallelogramma a K b l, b L c m, c M d n, &c. Dein horum parallelogrammorum latitudo minuat, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes quas habent ad se invicem figura inscripta A K b L c M d D, circumscripta A a l b m c n d o E, & curvilinea A a b c d E, sunt rationes æqualitatis.*



Nam

# PRINCIPIA MATHEMATICA.

63

Nam figuræ inscriptæ & circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum  $Kl$ ,  $Lm$ ,  $Mn$ ,  $Do$ , hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi  $Kb$  & altitudinum ( $^m$ ) summa  $Aa$ , id est, rectangulum  $ABla$ . Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus  $AB$  in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per lemma 1) figura inscripta & circumscripta, & multo magis figura curvilinea intermedia, fiunt ultimò æquales. *Q. E. D.*

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

## LEMMA III.

*Eadem rationes ultimæ sunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ , &c. sunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim  $AF$  æqualis latitudini maximæ, & compleatur paralle-

(\*) 106. Si fuerint quocumque & cujuscvis generis quantitates decrescentes,  $Aa$ ,  $Bb$ ,  $Cc$ ,  $Dd$ , erunt omnium differentiarum simul sumptæ æquales excessui maximæ supra minimam. Nam perspicuum est  $Aa - Bb + Bb - Cc + Cc - Dd = Aa - Dd$ : unde si ultima seriei quantitas sit 0, ut in serie  $Aa$ ,  $Bb$ ,  $Cc$ ,  $Dd$ , 0, summa differentiarum  $Ka + Lb + Mc + Dd$ , æqualis erit quantitati maximæ  $Aa$ .

107. Linea  $Bb$ , motu sibi semper parallelo accedat ad lineam  $Aa$ , & interim punctum  $b$ , ita moveatur in linea  $Bb$ , ut semper reperiat in arcu  $ba$ ; decrescente linearum  $Aa$ ,  $Bb$ , distantia  $AB$ , decrescit quoque earum differentia  $Ka$ , ac tandem evanescente  $AB$ , evanescit  $Ka$ , &  $Bb$ , seu  $AK$ , fit ultimò æqualis lineæ  $Aa$ ; evanescunt autem  $AB$  &  $Ka$ , cum lineæ  $Aa$ ,  $Bb$ , neque distantes, neque prorsus congruentes dici possunt, sed simul, ut ita dicam, conjungi incipiunt. In illo statu evanescentiæ, linearum  $Aa$ ,  $Bb$ , differentia  $Ka$ , minor est quavis lineâ datâ, seu infinitè parva est, aut inasignabilis respectu  $AK$  &  $Bb$ ; quantitas autem, evanescens, seu infinitè parva, est ad

quantitatem finitam ut finitum ad infinitum; quare cum notum sit infinitum ex finiti additione vel subtractione non mutari, aut tanquam immutatum haberi posse, liquet lineas  $Bb$  seu  $AK$  &  $Aa$ , seu  $AK + Ka$ , pro æqualibus posse usurpari. Similiter, quia evanescente  $Ka$ , trianguli  $Kab$ , & parallelogrammi  $Kl$ , areæ infinitesimæ sunt respectu parallelogrammi evanescentis  $Ab$ , parallelogrammum istud  $Ab$ , usurpari potest pro parallelogrammo  $Al$ , aut etiam pro figurâ  $ABba$ , hoc est, pro differentia arearum curvilinearum  $A Eca$ ,  $B Ecb$ .

108. Ex his sequitur diversos esse infinitesimorum ordines; nam ostensum est (107) parallelogrammum  $Kl$ , infinitesimum esse respectu parallelogrammi  $Ab$ , hoc verò parallelogrammum infinitesimum esse respectu areæ curvilineæ  $A Eca$ .

109. Figurâ  $A Eca$ , circa axem suum  $AE$ , revolvatur, & quælibet ordinata  $Aa$ ,  $Bb$ , describet circulum, cujus est ordinata ipsa radius, quodlibet rectangulum evanescens ut  $KB$ , a  $B$ , describet cylindrum evanescentem, & rectangula,  $Kl$ ,  $Lm$ ,  $Mn$ ,  $Do$ , singula describent annulos solidos, quorum summa æqualis

erit

DE MOTU  
CORPORUM

§1.

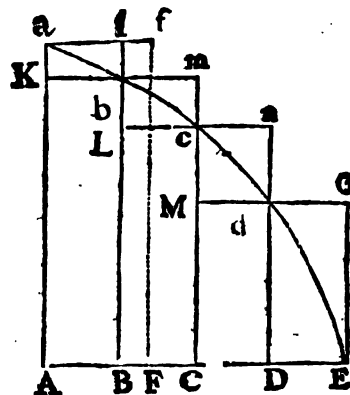
rallelogrammum  $F A a f$ . (<sup>n</sup>) Hoc erit majus quàm differentia figuræ inscriptæ & figuræ circumscriptæ; at latitudine suâ  $A F$  in infinitum diminutâ, minus fiet dato quovis rectangulo. *Q. E. D.*

*Corol. 1.* Hinc summa ultima parallelogrammorum evanescentium coincidit omni ex parte cum figurâ curvilineâ.

*Corol. 2.* Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evanescentium arcuum  $a b$ ,  $b c$ ,  $c d$ , &c. comprehenditur, coincidit ultimo cum figurâ curvilineâ.

*Corol. 3.* Ut & figura rectilinea circumscripta quæ tangentibus eorumdem arcuum comprehenditur.

*Corol. 4.* (<sup>o</sup>) Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros  $a c E$ ,) non sunt rectilineæ, sed rectilinearum limites curvilinei.



### LEMMA IV.

*Si in duabus figuris  $A a c E$ ,  $P p r T$ , inscribantur (ut supra) duæ parallelogrammorum series, sitque idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ*

erit cylindro ex rotatione rectanguli  $A I$  descripto. Quare cum hic cylindrus sit infinitesimus, patet (per lemma 1.) ultimam rationem solidi ex cylindris omnibus compositi ad solidum ex rotatione figuræ curvilineæ  $A E c a$ , genitum esse rationem æqualitatis.

(<sup>n</sup>) 110. Nam si singulorum parallelogrammorum latitudo æqualis esset lineæ  $A F$ , figuræ inscriptæ & figuræ circumscriptæ differentia foret parallelogrammum  $A f$ , (lem. 11.); cùm igitur singulorum parallelogrammorum latitudo minor sit latitudine  $A F$ , (ex hyp.) prædicta figu-

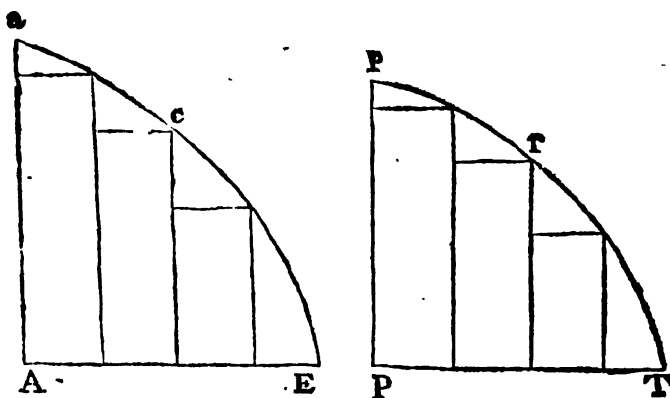
rarum differentia minor quoque est parallelogrammo  $A f$ .

(<sup>o</sup>) 111. Propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros  $a c E$ ) non sunt rectilineæ, seu non sunt ex lateribus rectis quocumque numero finito compositæ, sed sunt figurarum rectilinearum quarum latera numero augentur & longitudine minuuntur in infinitum, limites curvilinei. Dum enim ordinarum  $A a$ ,  $B b$ , ac proinde chordarum  $a b$ ,  $b c$ , numerus in infinitum augetur, & distantie  $AB$ ,  $BC$ , in infinitum minuuntur, puncta  $a$ ,  $b$ ,  $K$ ,  $l$ , &  $b$ ,  $c$ ,  $L$ ,  $m$ , &c. occurrunt & curvam  $a c E$  formant.

112. De-

*rimæ parallelogrammorum in unâ figurâ ad parallelogramma DE MO-  
in alterâ, singulorum ad singula, sint eadem; dico quod fi- TU COR-  
guræ duæ AacE: PprT, sunt ad invicem in eâdem illâ PORUM,  
ratione. LIBER  
PRIMUS.*

§1.



Etenim ut sunt parallelogramma singula ad singula; ita ( componendo ) fit summa omnium ad summam omnium, & ita figura ad figuram; existente nimirum figurâ priore ( *per lemma III* ) ad summam priorem, & figurâ posteriore ad summam posteriorem in ratione æqualitatis. *Q. E. D.*

*Corol.* Hinc si duæ cujuscunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam, cæteræque suo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eâdem illâ datâ ratione. Nam si in lemmatis hujus figuris sumantur parallelogramma inter se ut partes, summæ partium semper erunt ut summæ parallelogrammorum; atque ideo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultimâ ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id est ( per hypothesin ) in ultimâ ratione partis ad parrem.

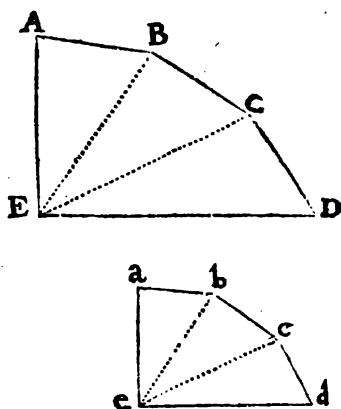
DE MO-  
TU COR-  
PORUM,  
LIBER  
PRIMUS.

§1.

# LEMMA V.

*Similium figurarum latera omnia, quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea; & areae sunt in duplicata ratione laterum. (P).*

LEM-



(P) 112. *Demonstr.* . . . . Dux figuræ, ADE, a de, similes dicuntur, quarum latera omnia sibi mutuo respondentia, ut AB, ab, BC, bc, proportionalia sunt, & angulos æquales, ut ABC, abc, continent; undè jam patet summas laterum utriusque figuræ esse inter se ut duo quævis latera correspondentia AB, ab. Ductis ex E, & e, ad omnes angulos lineis EB, EC, eb, ec, figuræ in sua

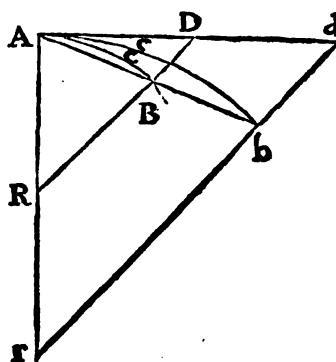
triangula dividantur; & quoniam anguli D & d, æquales sunt, lateraque ED, ed, Dc, dc, proportionalia, (*per definit.*), duo triangula ECD, ecd, erunt similia, adeoque anguli ECD, ecd, æquales, & latera EC, ec, lateribus CD, cd proportionalia; quare cum anguli BCD, bcd sint etiam æquales (*per definit.*), æquantur quoque anguli ECB, ecb, & quia BC:bc = CD:cd = EC:ec, triangula duo EBC, ebc similia erunt. Idem eadem ratione de aliis triangulis EBA, eba demonstratur. Verùm areae singulorum triangulorum similia, quæ in duabus figuris sibi mutuo respondent, sunt inter se in duplicatâ ratione laterum homologorum, ac proinde in datâ ratione; ergò summæ triangulorum, in utraq; figurâ, hoc est, figurarum areae rationem habent laterum homologorum duplicatam. Jam numerus laterum AB, BC, &c. ab, bc, &c. augeatur, & eorum longitudo minuatur in infinitum, & (*per Cor. 4. Lem. III.*) figuræ ABCD, abcd, sunt curvilineæ; similia igitur figurarum latera omnia quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea, & areae sunt in duplicatâ ratione laterum. Q. E. D.

LEMMA VI.

DE MOTU  
CORPORUM,  
LIBER  
PRIMUS.

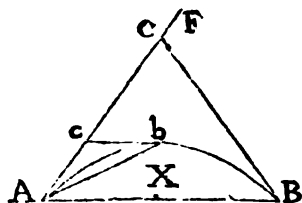
§1.

Si arcus quilibet positione datus  $ACB$  subtendatur chorda  $AB$ , & in puncto aliquo  $A$ , in medio curvaturæ (<sup>1</sup>) continua, tangatur à rectâ utrinque productâ  $AD$ ; dein puncta  $A$ ,  $B$  ad invicem accedant & coeant; dico quod angulus  $BAD$ , sub chordâ & tangente contentus, minuetur in infinitum & ultimò evanescet.



Nam si angulus ille non evanescit, continebit arcus  $ACB$  cum tangente  $AD$  angulum rectilineo æqualem, & propterea curvatura ad punctum  $A$  non erit continua, contra hypothesin.

LEM-



(<sup>1</sup>) 113. Curva continua  $BA$ , considerari potest tanquam descripta motu puncti  $B$  continuò mutantis directionem suam quâ per rectam tangentem  $BC$ , progredi nititur. Unde si arcus  $AB$ , sit ubique versus eandem partem  $X$ , cavus, semperque ducantur tangentes  $AF$ ,  $BC$ , sese interfecantes in  $C$ , accedente puncto  $B$ , ad  $A$ , anguli  $BCF$ ,  $BAC$ ,  $CBA$ , quos tangentes & chordæ complectuntur, continuò, non verò per saltum, decrescunt, & evanescente chordâ  $AB$ , evanescunt, atque

nulli fiunt, dum punctum  $b$ , idem omnino est cum puncto  $A$ . Necesse igitur est ob continuitatem decrementorum, ut angulus  $CAB$ , per omnes magnitudinis gradus inter angulum  $CAB$ , &  $0$ , seu nihilum medios transeat priusquam nullus omnino sit; quod generatim statuendum est de omnibus quantitativibus, quæ nascuntur & continuò crescunt, vel quæ continuò decrescunt & tandem evanescunt; non possunt enim continuò crescere vel decrescere, nec ab uno extremo ad alterum pervenire, quin per omnes gradus magnitudinis inter duo extrema medios transeant. Itaque inter tangentem  $AF$ , & chordam infinitesimam  $Ab$ , nulla duci potest linea recta, quæ angulum finitum cum chordâ vel tangente efficiat; ideoque inter arcum  $AB$ , & tangentem  $AF$ , nulla duci potest linea recta quæ arcum non secet.





# PRINCIPIA MATHEMATICA. 69

*Corol. 2.* Et si per  $B$  &  $A$  ducantur plures rectæ  $BE$ ,  $BD$ ,  $AF$ ,  $AG$ , secantes tangentem  $AD$  & ipsius parallelam  $BF$ ; ratio ultima abscissarum omnium  $AD$ ,  $AE$ ,  $BF$ ,  $BG$ , chordæque & arcus  $AB$  ad invicem erit ratio æqualitatis. DE MOTU COR-  
PORUM,  
LIBER  
PRIMUS.

*Corol. 3.* Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

## LEMMA VIII.

Si rectæ datæ  $AR$ ,  $BR$  cum arcu  $ACB$ , chordâ  $AB$  & tangente  $AD$ , triangula tria  $RAB$ ,  $RACB$ ,  $RAD$  constituunt, dein puncta  $A$ ,  $B$  accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evanescentium est similitudinis, & ultima ratio æqualitatis.

Nam dum punctum  $B$  ad punctum  $A$  accedit, intelligantur semper  $AB$ ,  $AD$ ,  $AR$  ad puncta longinqua  $b$ ,  $d$  &  $r$  produci, ipsique  $RD$  parallela agi  $rb$ , & arcui  $ACB$  similis semper sit arcus  $acb$ . Et coeuntibus punctis  $A$ ,  $B$ , angulus  $bAd$  evanescet, & propterea triangula tria semper finita  $rAb$ ,  $rAc$ ,  $rAd$  coincident, suntque eo nomine similia & æqualia. Unde & hisce semper similia & proportionalia  $RAB$ ,  $RACB$ ,  $RAD$  fient ultimo sibi invicem similia & æqualia. *Q. E. D.*

*Corol.* Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

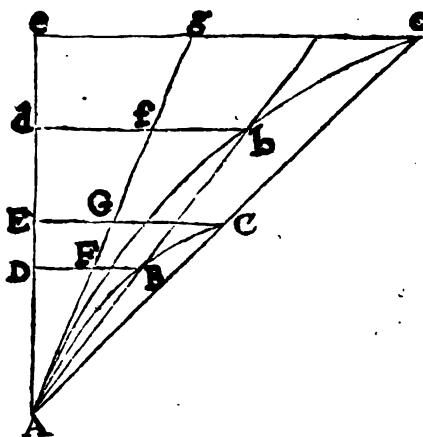
DE MO-  
TU COR-  
PORUM,  
LIBER  
PRIMUS.

§1.

# LEMMA IX.

*Si recta AE & curva ABC positione datæ se mutuo secent in angulo dato A, & ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur BD, CE, curvæ occurrentes in B, C, dein puncta B, C, simul accedant ad punctum A: dico quod areæ triangulorum ABD, ACE erunt ultimo ad invicem in duplicatâ ratione laterum.*

Etenim dum puncta B, C accedunt ad punctum A, intelligatur semper AD produci ad puncta longinqua d & e, ut sint Ad, Ae ipsi AD, AE proportionales, & erigantur ordinatæ db, ec ordinatis DB, EC parallelæ quæ occurrant ipsis AB, AC productis in b & c. Duci intelligatur, tum curva Abc ipsi ABC similis, tum recta Ag, quæ tangat curvam utramque in A, & secet ordinatim applicatas DB, EC, db, ec in F, G, f, g. <sup>(1)</sup> Tum manente longitudine Ae coeant puncta B, C cum puncto A; & angulo cAg evanescente, coincident areæ curvilineæ Abd, Ace cum rectilineis Afd, Age; ideoque (per lemma v.) erunt in duplicata ratione laterum Ad, Ae: Sed his areis proportionales semper sunt areæ ABD, ACE, & his lateribus latera AD, AE. Ergo & areæ ABD, ACE sunt ultimo in duplicatâ ratione laterum AD, AE. Q.E.D.



LEM-

(1) 115. Tum manente longitudine finitâ Ae, & mutata, si necessum fuerit, longitudine Ad, ut sit semper Ad: Ae = AD: AE, coeant puncta B, C, cum puncto A, &c.

LEMMA X.

DE MOTU CORP-  
PORUM,

LIBER

PRIMUS.

*Spatia quæ corpus urgente quâcunque vi finitâ describit, sive vis illa determinata & immutabilis sit, sive eadem continuò augeatur vel continuò diminuat, sunt ipso motûs initio in duplicatâ ratione temporum.*

Exponentur tempora per lineas  $AD$ ,  $AE$ , & velocitates genitæ per ordinatas  $DB$ ,  $EC$ ; (1) & spatia his velocitatibus descripta, erunt ut areæ  $ABD$ ,  $ACE$  his ordinatis descriptæ, hoc est, ipso motus initio (per lemma 1 x.) in duplicatâ ratione temporum  $AD$ ,  $AE$ . *Q. E. D.*

*Corol. 1. (2)* Et hinc facile colligitur, quod corporum similes similiarum figurarum partes temporibus proportionalibus descri-

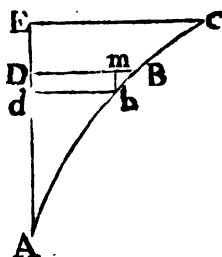
(1) 116. Spatia his velocitatibus descripta erunt ut areæ  $ABD$ ,  $ACE$ , his ordinatis descriptæ.

Nam ductâ  $d b$ , ipsi  $DB$ , infinite propinqua, ita ut  $D d$ , sit infinitesima seu evanescens respectu  $AD$ ,  $AE$ , lineæ  $DB$ ,  $d b$ , & rectangulum  $d m$ , ac figura  $D d b B$ , pro æqualibus respectivè usurpari possunt (107),

addeò ut per tempusculum infinitesimum;  $D d$ , velocitas  $DB$ , tanquam uniformis haberi possit; spatium autem æquabili velocitate  $d b$ , percursum, est ut factum ex velocitate  $d b$ , & tempusculo  $D d$ , (5), hoc est, ut rectangulum  $D d \times d b$ , seu ut area  $DB b d$ ; si igitur areæ  $ACE$ ,  $ADB$ , in infinita numero atque infinitesima rectangula, ut  $d m$ , divisæ concipiantur, erunt summæ spatiarum percurforum, seu spatia temporibus  $AE$ ,  $AD$ , percurfa, ut summæ horum rectangulorum, hoc est, ut areæ ipsæ  $ACE$ ,  $ADB$ , (*Lem. III.*)

117. *Cor.* Vis acceleratrix finita, utcumque variabilis, ipso motûs initio considerari

potest, tanquam vis determinata & immutabilis. Spatia enim, quæ corpus urgente vi acceleratrice constante describit, sunt semper in duplicatâ temporum ratione (27); & contra, si spatia percurfa duplicatam habeant temporum rationem, vis acceleratrix constans est; nam si mutabilis esset vis, illa quoque temporum & spatiarum proportio mutaretur. Ergò (*Lem. X.*) vis quælibet acceleratrix finita, utcumque variabilis, ipso motûs initio tanquam immutabilis spectari potest.



(2) 118. Corpora duo  $A$  &  $a$ , curvas similes  $ABE$ ,  $a b e$ , illarumque partes similes  $AB$ ,  $a b$ ,  $BE$ ,  $b e$ , temporibus proportionalibus describant; duobus hisce corporibus, cum ad puncta  $B$  &  $b$ , pervenerint, accedunt novæ vires acceleratrices inter se æquales & similiter applicatæ, quæ prioribus viribus addux corpora deferant per arcus  $BC$ ,  $b c$ . Jungau-

DE MO-  
TU COR-  
PORUM,  
LIBER  
PRIMUS.

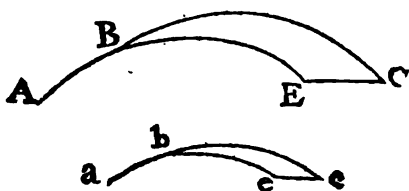
§ 1.

describentium errores, qui viribus quibuscvis æqualibus ad corpora similiter applicatis generantur, & mensurantur per distancias corporum à figurarum similium locis illis, ad quæ corpora eadem temporibus iisdem proportionalibus sine viribus istis pervenirent, sunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proximè.

*Corol. 2.* (\*) Errores autem qui viribus proportionalibus ad similes figurarum similium partes similiter applicatis generantur, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

*Corol. 3.* (†) Idem intelligendum est de spatiis quibuscvis quæ corpora urgentibus diversis viribus describunt. Hæc sunt, ipso motus initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim.

*Corol. 4.* Ideoque vires sunt ut spatia, ipso motus initio, descripta directè & quadrata temporum inversè. *Corol.*



gantur rectæ EC; ec; quæ errores solâ virium perturbantium actione genitos exponent; Lineæ enim illæ sunt spatia solâ virium perturbantium actione descripta. Cum autem vires perturbantes supponantur æquales & similiter applicatæ, idem contingere debet ac si corpus aliquod eadem vi acceleratrice sollicitatum spatia EC, ec, diversis temporibus describeret, adeoque spatia illa sunt, ipso motus initio, ut quadrata temporum quibus percurruntur (*Lem. X.*) BC, bc, & quibus absque virium perturbantium actione percurrerentur arcus similes BE, be; si igitur vires illæ perturbantes supponantur constantes, spatia EC, ec, non solum motus initio, sed & tempore finito descripta, erunt ut prædictorum temporum quadrata (27). Undè si admodum exigua sit virium perturbantium variatio, spatia seu errores erunt quam proximè ut quadrata temporum.

(\*) 119. Errores autem qui viribus proportionalibus, seu viribus in datâ ratione existentibus, ad similes figurarum similium partes similiter applicatis generantur, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim. Nam si tempora sunt eadem, errores sunt in datâ ratione virium; si vires sunt eadem, errores sunt in duplicata ratione temporum quibus generantur; cum igitur vires & tempora variant, errores sunt in ratione compositâ ex datâ virium ratione & duplicatâ temporum.

(†) 120. Nam vires motus initio tanquam constantes haberi possunt (117); dupla autem spatia, adeoque simplicia spatia, quæ corpora urgentibus viribus constantibus describunt, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim (30); ergo spatia quæ corpora urgentibus diversis viribus describunt, sunt, ipso motus initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim. Si itaque vires acceleratrices, motus initio, sint G, g, spatia S, s, tempora T, t, erit S : s = GTT : gtt, ideo-

$$\text{que } G : g = \frac{S}{T} : \frac{s}{t} \text{ \& } TT : tt =$$

S : G : s : g, hoc est, vires sunt ut spatia motus initio descripta directè & quadrata temporum inversè; Temporum verò quadrata, sunt ut descripta spatia directè, & vires inversè.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM,  
LIBER

LIBBR

**PRIMUS.**

51.

*Caf*

A geometric diagram showing a circle with center A. Point B is on the circle. A horizontal line AD is drawn from A. A vertical line AC is drawn from A. A point C is on the vertical line AC. A point E is on the circle. A point F is on the circle. A point G is on the circle. Lines connect A to B, A to C, A to E, A to F, and A to G. Lines connect B to C, B to E, B to F, and B to G. A curved line segment connects C to G. A curved line segment connects E to F. A curved line segment connects F to G.

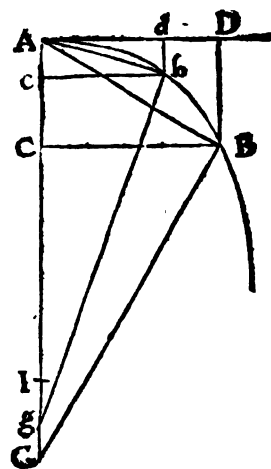
dant puncta A & B, donec arcus A B evanescat, duæ perpendiculares A C, B C, pro æqualibus usurpari poterunt (Lem. I),

К ... соф.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

§1.

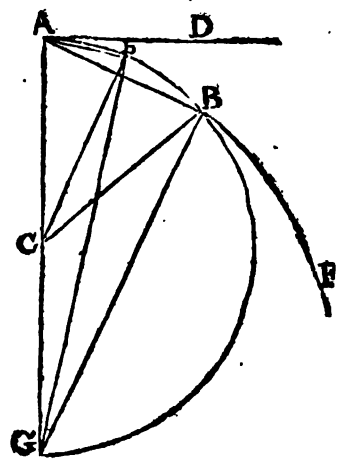
*Cas. 1.* Sit arcus ille  $AB$ , tangens ejus  $AD$ , subtensa anguli contactus ad tangentem perpendicularis  $BD$ , subtensa arcus  $AB$ . Huic subtensæ  $AB$  & tangenti  $AD$  perpendiculares erigantur  $AG$ ,  $BG$ , concurrentes in  $G$ ; dein accedant puncta  $D$ ,  $B$ ,  $G$ , ad puncta  $d$ ,  $b$ ,  $g$ , sitque  $J$  intersectio linearum  $BG$ ,  $AG$  ultimo facta (\*) ubi puncta  $D$ ,  $B$  accedunt usque ad  $A$ . Manifestum est quod distantia  $GJ$  minor esse potest quam assignata quavis. Est autem (ex natura circularum per puncta  $ABG$ ,  $Abg$  transeuntium)  $AB$  quad. æquale  $AG \times BD$ , &  $Ab$  quad. æquale  $Ag \times bd$ ; ideoque ratio  $AB$  quad. ad  $Ab$  quad. componitur ex rationibus  $AG$  ad  $Ag$  &  $BD$  ad  $bd$ . Sed quoniam  $GJ$  assumi potest minor longitudine quavis assignatâ, fieri potest ut ratio  $AG$  ad  $Ag$  minùs differat à ratione æqualitatis quam pro differentiâ



quavis

conjungentur duo puncta contactus  $A$  &  $B$ , duoque circuli tangentes abibunt in unum  $ABG$ , qui curvam osculabitur in  $A$ , vel  $B$ , adeoque curvaturæ lineæ  $AF$ , in  $A$ , est in ratione inversâ radii  $AC$  circuli osculantis. Si ergo finitus sit radius osculi  $AC$ , finita quoque erit curvatura in  $A$ ; si vero radius sit infinitus, curvatura erit infinitesima; ac tandem si radius sit infinitissimus, curvatura erit infinita. Quoniam autem eo magis curva à tangente  $AD$  deflectit, quo circuli osculantis radius  $AC$  minor est, & contra, patet angulum contactus crescere & decrescere cum curvaturâ & in eadem ratione inversâ radii.

122. Ducantur chordæ  $AB$ ,  $BG$ ; angulus  $ABG$ , in semicirculo rectus est; ac proinde si in curvâ quâcumque curvaturam finitam in puncto aliquo  $A$  habente ducantur chordæ evanescentes  $Ab$ ,  $AB$ , ad easque agantur perpendiculares  $BG$ ,  $bG$ , hæ lineæ convenient in puncto  $G$ , junctique punctis  $A$  &  $G$ , recta  $AG$  ad tangentem  $AD$  perpendicularis erit, & fini-



tam habebit magnitudinem; ut pote quæ æqualis est duplo radio finito  $AC$ , circuli curvam osculantis in  $A$ .

(\*) 123. Ubi puncta  $D$ ,  $B$ , accedunt usque ad  $A$ , linea  $AJ$  (122) est diameter circuli curvam  $A$   $b$   $B$  osculantis

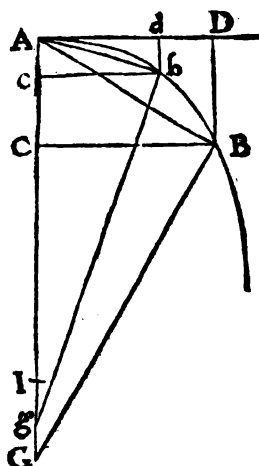




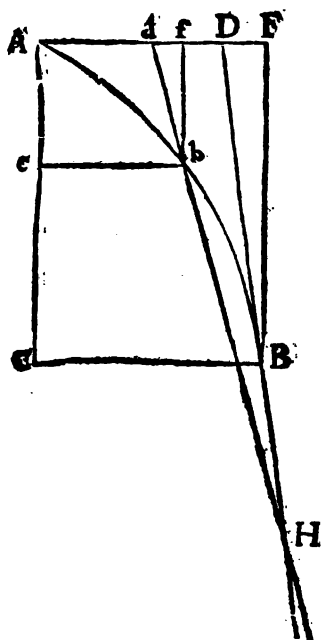


DE MO-  
TU COR-  
PORUM,  
LIBER  
PRIMUS.

\$1.



*Scho-*



130. Quare arcus evanescens spectari potest tanquam arcus parabolæ cuius latus rectum est æquale diametro circuli osculantis. Nam in arcu circulari  $AB$ , (vid. fig. textus) ordinata  $CB$ , ad diametrum perpendicularis, est media proportionalis inter abscissam  $AC$ , & reliquam diametri partem, seu totam diametrum, cum  $AC$ , evanescit ( Lem. 1. ), adeoque quadratum ordinatæ  $CB$ , æquale est rectangulo ex abscissâ evanescente  $AC$ , & diametro circuli, quæ est proprietates parabolæ cuius latus rectum æquale est prædictæ diametro.

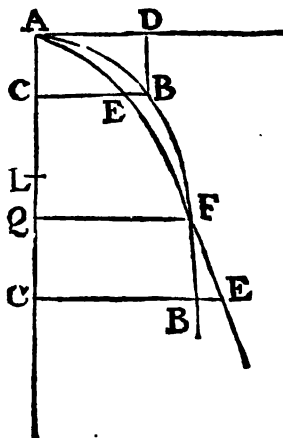
(b) 131. Parabolæ segmentum  $A b B$ , est tertia pars trianguli rectilinei  $A C B$ , vel æqualis  $A D B$ , adeoque area curvilinea  $A D B b A$ , æqualis est duabus tertiiis partibus ejusdem trianguli rectilinei  $A D B$ . Vid. *Gregor. à S. Vincentio* cor. 1. Prop. 232. Lib. V. Quadraturæ circuli, aut *Archimed.* Prop. 17. Quadrat. Parabolæ.

(8) 129. *Arcus evanescens* A B ;  
in curvis omnibus curvaturam finitam  
ad punctum contactus A, habentibus ,

## Scholium.

Cæterum in his omnibus supponimus angulum contactus nec infinitè maiorem esse angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus suis, nec iisdem infinitè minorem; hoc est, curvaturam ad punctum  $A$ , nec infinitè parvam esse, nec infinitè magnam, seu intervallum  $AJ$  finitæ esse magnitudinis. (1) Capi enim potest  $DB$  ut  $AD$  3: quo in casu circulus

(1) 132. Sit parabolæ Apolloniæ  $A EF$ , axis  $AC$ , vertex  $A$ , tangens in vertice  $AD$ , ordinata  $CE$ , latus rectum  $AL$ , circulus diametro  $AL$ , descriptus parabolam osculatur in  $A$ , (130.) eundemque ac parabola contactus angulum



efficit in  $A$ . Ad eundem axem  $AC$ , & verticem  $A$ , describatur superioris generis parabola cujus ordinatæ  $CB$  sint semper in subtriplicata abscissarum  $AC$ , vel parallelarum & æqualium  $DB$ , ratione; & erit angulus contactus  $BAD$ , angulo contactus  $EAD$ , infinitè minor. .... Dem... Parabolæ  $A FE$ , latus rectum  $AL$ , dicatur  $A$ ; parabolæ  $AB B$ , latus rectum sit  $B$ , & erit ex harum curvarum naturâ  $A \times AC = CE^2$  &  $B^2 \times AC = CB^2$ , adeoque  $AC = CE^2$  &  $A = CB^2 : B^2$ , undè reperitur  $CB^2 = CE^2 \times B^2 : A$ , &  $CB$  ad  $B^2 : A = CE$  ad  $CB^2$  ergo cum erit  $CB = B^2 : A$ , tunc erit  $CE^2 = CB^2$ , atque adeò parabolæ  $A EE$ ,  $AB B$ , ordinatam habebunt communem quæ dicatur  $QF$ , & sese interfecant in puncto  $F$ ; jam verò si fuerit  $CB$  minor quam  $B^2 : A$ , erit quoque  $CE^2$  minor quam  $CB^2$ , adeoque  $CE$  minor quam  $CB$ ; sed omnes ordinatæ inter verticem  $A$ , & ordinatam communem  $QF$ , (quæ est  $= B^2 : A$ ) minores sunt eâ, ergo omnes  $CE$  inter  $A$  &  $F$  comprehensæ sunt minores ordinatis correspondentibus  $CB$ , tota igitur pa-

rabolæ Apolloniæ portio  $A EF$ , quâ ordinatæ  $CE$  terminantur, cadit intrâ portionem  $AB F$ , alterius parabolæ, ac proinde angulus contactus  $BAD$ , semper minor est angulo contactus  $EAD$ , cum ergò angulus  $EAD$ , aucto in infinitum latere recto  $AL$ , possit sine fine minui, manifestum est angulum contactus  $BAD$ , quovis angulo dato  $EAD$ , infinitè minorem esse. Q. e. D.

133. Ad eundem axem  $AC$ , & verticem  $A$ , successive describantur curvæ  $A EE$ ; ejus naturæ, ut abscissarum  $AC$ , & ordinatarum  $CE$ , relatio exprimat æquatione generali  $A^m \times AC = CE^{m+1}$ . Si loco exponentis,  $m$ , successive ponantur in æquatione numeri quilibet positivi, integri vel fracti continuè crescentes vel decrecentes, obtinebuntur infinitæ series diversæ angulorum contactuum, quorum quilibet est infinitè minor priore, dum numerus,  $m$ , semper crescit, & infinitè major dum numerus,  $m$ , semper decrecit. ... Dem... Numerus,  $m$ , augeatur numero positivo,  $n$ , integro vel fracto, & describatur curva  $AB B$ , cujus æquatio sit  $B^{m+n} \times AC = CB^{m+n+1}$ . Ex hac æquatione & superiori  $A^m \times AC = CE^{m+1}$ , reperitur  $AC = CB^{m+n+1} : B^{m+n} = CE^{m+1} : A^m$ , adeoque  $CB^{m+n+1} = CE^{m+1} \times B^{m+n} : A^m$  atque  $CB^m$  ad  $B^{m+n} : A^m = CE^{m+1}$  ad  $CB^{m+n+1}$ ; sit  $CB^n = B^{m+n} : A^m$ , & erit  $CB^{m+1} = CE^{m+1}$ , adeoque  $CB = CE = QF$ . Quare cum inter verticem  $A$ , & communem ordinatam  $QF$ , omnes ordinatæ sint minores ipsâ  $QF$ , patet ut supra (132), totam portionem  $A EF$ , curvæ  $A EE$ , cadere intrâ portionem  $AB F$ , alterius curvæ  $AB B$ , ac proinde angulum contactus  $BAD$ , quovis dato angulo contactus  $EAD$  infinitè minorem esse, & reciprocè angulum  $EAD$ , esse angulo  $BAD$  infinitè maiorem. Q. e. D.

nullus per punctum  $A$  inter tangentem  $AD$  & curvam  $AB$  DE MO-  
 duci potest, proindeque angulus contactus erit infinite minor TU COR-  
 circularibus. <sup>(1)</sup> Et simili argumento si fiat  $DB$  successive PORUM.  
 ut  $AD^4$ ,  $AD^5$ ,  $AD^6$ ,  $AD^7$ , &c. habebitur series angu- LIBER  
 lorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet poste- PRIMUS.  
 rior est infinite minor priore. Et si fiat  $DB$  successive ut § 1.  
 $AD^2$ ,  $AD^{\frac{3}{2}}$ ,  $AD^{\frac{4}{3}}$ ,  $AD^{\frac{5}{4}}$ ,  $AD^{\frac{6}{5}}$ ,  $AD^{\frac{7}{6}}$ , &c. habe-  
 bitur alia series infinita angularum contactus, quorum primus  
 est ejusdem generis cum circularibus, secundus infinite major,  
 & quilibet posterior infinite major priore. Sed & inter duos  
 quosvis ex his angulis potest series utrinque in infinitum per-  
 gens angularum intermediarum inferi, quorum quilibet poste-  
 rior erit infinite major minorve priore. Ut si inter terminos  
 $AD^2$ , &  $AD^3$ , inseratur series  $AD^{\frac{13}{6}}$ ,  $AD^{\frac{11}{5}}$ ,  $AD^{\frac{9}{4}}$ ,  $AD^{\frac{7}{3}}$ ,  
 $AD^{\frac{5}{2}}$ ,  $AD^{\frac{4}{3}}$ ,  $AD^{\frac{3}{2}}$ ,  $AD^{\frac{2}{3}}$ ,  $AD^{\frac{1}{2}}$ , &c. Et rursus  
 inter binos quosvis angulos hujus seriei inferi potest series no-  
 va angularum intermediarum ab invicem infinitis intervallis  
 differentium. Neque novit natura limitem.

(1) Quæ de curvis lineis deque superficiebus comprehensis  
 demonstrata sunt, facile applicantur ad solidorum superficies  
 cur-

(1) 134. In æquatione  $A^m \times AC =$   
 $CE^{m+1}$ , loco exponentis  $m$ , successive  
 ponantur numeri 1, 2, 3, 4, 5 &c., &  
 erit  $AC$  successive, ut  $CE^2$ ,  $CE^3$ ,  
 $CE^4$ ,  $CE^5$  &c., & habebitur (133)  
 series angularum contactus pergens in in-  
 finitum, quorum quilibet posterior est in-  
 finite minor priore. Loco  $m$  substituan-  
 tur successive numeri decrescentes, 1,  
 $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{5}$ , &c. erit  $AC$ , succes-  
 sive ut  $CE^1$ ,  $CE^{\frac{3}{2}}$ ,  $CE^{\frac{4}{3}}$ ,  $CE^{\frac{5}{4}}$ ,  
 &c., & habebitur alia series infinita an-  
 gularum contactus, quorum primus est ejus-  
 dem generis cum circularibus (132), se-  
 cundus infinite major, & quilibet poste-  
 rior infinite major priore (133). Loco  
 $m$ , substituantur numeri 1,  $1 + \frac{1}{6}$ ,  $1 + \frac{1}{5}$ ,  
 $1 + \frac{1}{4}$ ,  $1 + \frac{1}{3}$ ,  $1 + \frac{1}{2}$ ,  $1 + \frac{2}{3}$ ,  $1 + \frac{3}{4}$ ,  
 $1 + \frac{4}{5}$ ,  $1 + \frac{5}{6}$  &c., erit  $AC$ , suc-

cessive ut  $CE^1$ ,  $CE^{\frac{13}{6}}$ ,  $CE^{\frac{11}{5}}$ ,  
 $CE^{\frac{9}{4}}$  &c., & habebitur series infinita  
 angularum contactus, quorum quilibet po-  
 sterior est infinite minor priore (133), &  
 inter binos quosvis angulos hujus alte-  
 riuse seriei inferi potest series nova an-  
 gularum intermediarum ab invicem infi-  
 nitis intervallis differentium; ut enim ea  
 series invepiatur, sufficit inter duos nume-  
 ros datos, v. G. 1,  $1 + \frac{1}{2}$ , seriem in-  
 venire numerorum crescentium vel decre-  
 centium, quorum quilibet major sit altero  
 ex numeris datis, minor altero, quod fa-  
 cillimum est.

(1) 135. Id exemplo facili illustrare  
 satis erit. Pyramidis & conï sit idem ver-  
 tex eademque altitudo, & basis pyrami-  
 dis sit polygonum inscriptum circulo qui  
 basis est conï, numerus laterum polygoni  
 augeatur, & eorum longitudo minuat in  
 infi-

DE MO  
TU COR  
PORUM,  
LIBER  
PRIMUS.

§1

curvas & contenta. ( <sup>m</sup> ) Præmissi verò hæc lemmata, ut ef-  
fugerem tædium deducendi longas demonstrationes, more ve-  
terum geometrarum, ad absurdum. Contractiores enim red-  
duntur demonstrationes per methodum indivisibilium. Sed  
quoniam durior est indivisibilium hypothesis, & propterea meth-  
odus illa minus geometrica censetur; ( <sup>n</sup> ) malui demonst-  
tra-

infinitum, & polygoni ac circuli ultima  
ratio ( Lem. 7. ) erit ratio æqualitatis, ac  
proinde ultima ratio pyramidis illiusque  
superficiæ ad conum & illius superficiem  
curvam, erit quoque ratio æqualitatis; unde  
curva superficies coni æqualis est summæ  
ultimæ triangulorum evanescentium, quo-  
rum communis vertex est vertex coni,  
basæ verò latera evanescentia polygoni  
circulo inscripti.

( <sup>m</sup> ) 136. Quàm magnos progressus  
Geometria fecerit, hinc cognoscere licet.  
Veteres Geometræ in iis quæstionibus quæ  
Infiniti considérationem involvunt, suas  
demonstrationes ad absurdum revocabant, &  
ex falsis suppositionibus verum eruebant. Ut  
inter duas quantitates quæ ad æqualitatem  
constanter vergunt, & tandem propius ad  
invicem accedunt quàm pro datâ quâvis  
differentiâ rationem æqualitatis intercedere  
demonstrarent, prius supponebant inter eas  
quantitates esse vel majoris vel minoris inæ-  
qualitatis rationem, deinde utrumque fal-  
sum demonstrabant, & ex hac reductione  
quam ad absurdum vocant, inter illas quan-  
titates perfectam æqualitatem esse conclu-  
debant. Quàm autem perplexus sit & tædio-  
sus hic demonstrandi modus, nemo non videt.  
Verùm licet imperfecta admodum fuerit ve-  
terum geometria, non iis tamen omnino  
ignota fuerant methodi infinitesimalis prin-  
cipia. Quantitates infinitè parvas seu eva-  
nescentes pro nihilo habendas esse in mul-  
tis demonstrationibus tanquam axioma po-  
suerunt *Euclides* & *Archimedes*; in exem-  
plum afferemus unicum vulgaris Geometriæ  
theoremata. Ut demonstrarent circulos esse  
inter se ut quadrata diametrorum, fingebant  
iis circulis inscripta esse vel circumscrip-  
ta polygonia similia quorum latera nume-  
ro augerentur & longitudine minuerentur  
in infinitum, ita ut polygonorum inscrip-

torum vel circumscriptorum à circulo dif-  
ferentia foret quâvis datâ magnitudine mi-  
nor; quia verò hæc polygonia sunt ut quadra-  
ta diametrorum circulorum quibus inscri-  
buntur vel circumscribuntur, circulos pariter  
esse ut quadrata diametrorum conclude-  
bant. Varios infinitorum ordines supponit  
illud idem theoremata, licet non adverterent  
veteres. Nam considerabant polygonia circu-  
lis inscripta tanquam composita ex infinitis  
numero atque infinitè parvis seu evanescenti-  
bus lateribus; manifestum autem est dif-  
ferentiam polygoni inscripti à circulo quâvis  
datâ minorem componi ex infinitis nume-  
ro atque infinitè parvis seu evanescenti-  
bus circuli segmentis quorum latera po-  
lygoni sunt chordæ; hæc verò segmenta  
sunt minimæ quantitates illæ quas secun-  
di ordinis infinitesimas dicunt Recentio-  
res. Hic pedem fixerant veteres, primus-  
que longius progredi ausus est celeberrimus  
Geometra *Bonaventura Cavalieri* qui  
anno 1635. indivisibilium methodum in  
geometriam introduxit. Hoc primum po-  
suit suæ methodi decretum, lineas nempe  
ex infinitis punctis constare, superficies  
ex infinitis lineis, & solida ex infi-  
nitis superficiibus; Deinde indivisibilia il-  
la elementa, totamque eorum summam  
comparat in unâ magnitudine cum singu-  
lis elementis eorumque summam in aliâ  
magnitudine, & sic duarum magnitudinum  
rationem determinat. Hæc autem quantita-  
tum indivisibilium hypothesis durior minus-  
que geometrica *Newton* visa est.

( <sup>n</sup> ) 137. *Newton*us, ut indirectas &  
perplexas vitaret veterum demonstratio-  
nes, earum tamen certitudinem & eviden-  
tiam conservaret, veterum principium Lem-  
mate primo generaliter expressit, illudque  
in Lemmatis sequentibus ad curvas gene-  
ratim applicavit, & inde directas perbre-  
vesque

rationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum evanescentium summas & rationes, primasque nascentium, id est, ad limites (°) summarum & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonstrationes quâ potui brevitate præmittere. His enim idem præstatur quod per methodum indivisibilem; & principiis demonstratis jam tutius utemur. Proinde in sequentibus, si quando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas; nolim indivisibilia, sed evanescentia divisibilia, non summas & rationes partium (p) determinatarum, sed summarum & rationum limites semper intelligi; vimque talium demonstrationum ad methodum præcedentium lemmatum semper revocari.

Obiectio est, quod quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non est ultima; ubi evanuerunt, nulla est. Sed & eodem argumento æque contendere posset nullam esse corporis ad certum locum, ubi motus finiatur, pervenientis (q) velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non esse ultimam; ubi attingit, nullam esse. Et responsio facilis est: Per velo-

vesque demonstrationes in toto operis decursu deduxit. Ut autem methodi indivisibilem brevitate assequeretur, tutius tamen & accuratius procederet, loco indivisibilem evanescentia divisibilia substituit, & quantitates Mathematicas non ut ex partibus quam minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas considerat; supponit nimirum lineas describi ac describendo generari non per appositionem partium, sed per motum continuum punctorum, superficies per motum linearum, & solida per motum superficierum, angulos per rotationem laterum, tempora per fluxum continuum, & sic in cæteris.

(°) 138. Ubi area curvilinea in parallelogramma rectilinea dividitur, & eorum numerus augetur atque latitudo minuitur in infinitum, horum parallelogrammorum summa (Lem. 1.), nunquam potest esse major areâ curvilineâ, sed hæc

Tom. I.

area est terminus ad quem parallelogrammorum decrecentium summa semper accedit & quem tandem attingit, ubi parallelogramma evanescent aut nascuntur. Idem dicendum de evanescentibus curvarum chordis respectu perimetri curvilinearæ.

(p) 139. Quantitates evanescentes concipi non debent velut determinatæ aut determinabiles quædam portiones quantitatum quæ certam & definitam parvitatem obtineant. Quascunque enim portiunculas linearum, superficierum aut corporum acceperimus aut designaverimus, hæc semper reipsâ finitæ erunt, non evanescentes; itaque non sunt intra certos terminos quantumvis proximos coarctandæ, undè hæc quantitates semper ut decrecentes ac perpetuò diminuendæ accipi debent.

(q) 140. Exempli causâ, gravis sursum projecti & ad altissimum locum pervenientis.

L

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

§ 1.

velocitatem ultimam intelligi eam, quâ corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimum & motus cessat, neque postea, sed tunc cum attingit; id est, illam ipsam velocitatem quâcum corpus attingit locum ultimum & quâcum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium, intelligendam esse rationem quantitatum, non antequam evanescent, non postea, sed quâcum evanescent. Pariter & ratio prima nascentium est ratio quâcum nascuntur. Et summa prima & ultima est quâcum esse (vel augeri aut minui) incipiunt & cessant. Extat limes quem velocitas in fine motûs attingere potest, non autem transgredi. Hæc est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & cessantium. Cumque hic limes sit certus & definitus, problema est verè geometricum eundem determinare. Geometrica verò omnia in aliis geometricis determinandis ac demonstrandis legitimè usurpantur.

Contendi etiam potest, quod si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & sic quantitas omnis constabit ex indivisibilibus, contra quam *Euclides* de incommensurabilibus, in libro decimo elementorum, demonstravit. Verum hæc objectio falsæ innititur hypothefi. Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates evanescent, revera non sunt rationes quantitatum (\*) ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescientium rationes semper appropinquant; & quas propius assequi possunt quàm pro datâ quâ-

(\*) 141. Seu, quantitatum determinatarum & indivisibilium, sed &c.

142. Ut quantitatum evanescentium aut nascentium relationes atque proprietates inveniantur, considerantur quantitates finitæ, harum investigantur relationes & proprietates & lex quâ continuò crescunt vel decrescunt; quibus cognitis faciliè intelligitur quænam proprietates quantitatum illis crescentibus ac decrescientibus semper conveniant, adeoque & cum in infinitum minuuntur & evanescent, vel cum nascuntur. Imò verò ex Lemmate primo alii que

sequemibus invenitur quænam sint proprietates quæ licet quantitatum finitis non conveniant, evanescentibus tamen & nascentibus competunt, cum nempe quantitates finitæ decrescunt ad illas proprietates, ut ita dicam perpetuò accedunt, & ad eas tempore dato accedunt magis quàm pro differentiâ quâvis datâ.

Ex præcedentibus Lemmatis faciliè deducitur ac demonstratur *Newtoniana* fluxionum methodus cujus generalia principia ut potè nobis in posterum profutura breviter explicabimus.



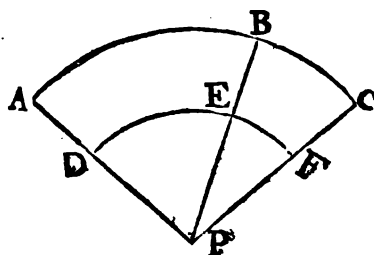




$AC$ , sunt ( 146. ) ut trianguli  $CET$ , latera  $CE$ ,  $ET$ , &  $CT$ , & per eadem latera exponi possunt, vel quod perinde est, per latera  $VB$ ,  $CB$ , &  $VC$ , trianguli  $VBC$ , similis triangulo  $CET$ .

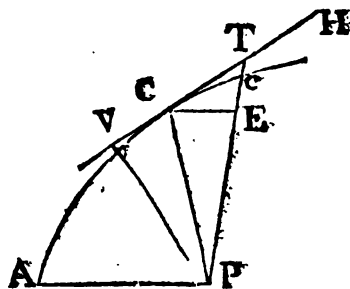
151. Quoniam areæ  $BbcC$ ,  $BbdD$ , eodem tempore describuntur communi ordinatarum  $BC$ ,  $BD$  motu, erunt areæ illæ nascentes vel evanescentes ut fluxiones arearum  $ACB$ ,  $ABDG$ , ( 146 ) ; sed area nascentis  $BbcC$ , non differt à parallelogrammo  $BE$ , ( 107 ) ; ergò fluxiones arearum  $ACB$ ,  $ABDG$ , sunt in ratione primâ parallelogrammorum  $BE$ ,  $Bd$  nascentium, seu ob commune latus  $Bb$ , in ratione ordinatarum  $CB$ ,  $Bd$ .

152. Si circulus centro  $B$ , radio fluente  $BC$ , descriptus per longitudinem abscissæ  $AB$ , ad angulos rectos progrediatur, describet solidum idem quod ex rotatione figuræ  $ACB$ , circa axem  $AB$  generaretur, & fluxio solidi geniti erit ut factum ex areâ circuli illius in incrementum nascentis  $Bb$ , abscissæ  $AB$ , & fluxio superficiæ solidi geniti erit ut factum ex perimetro ejusdem circuli in arcum  $Cc$ , vel tangentem  $CT$ , nascentem... Dem.... Rectangulum nascentis  $BE$ , non differt à figurâ  $BbcC$  nascente ( 107 ), adeoque incrementum nascentis solidi ex rotatione figuræ  $ACB$ , geniti æquale est solido ex rotatione rectanguli  $BE$ , circa latus  $Bb$ , genito; hoc autem solidum est cylindrus æqualis facto ex areâ circuli radio  $CB$  descripti in altitudinem  $Bb$ ; solidi igitur motu circuli  $CB$  per axem  $AB$  geniti incrementum nascentis adeoque & ipsius fluxio ( 146 ) est ut factum ex areâ circuli in incrementum nascentis  $Bb$ , abscissæ  $AB$ . Similiter cum arcus nascentis  $Cc$ , cum tangente  $CT$  coincidat, ( Lem. 7. ) superficies nascentis ex rotatione figuræ  $BbcC$ , genita æqualis est superficiæ coni truncati, adeoque æqualis facto ex semisumma peripheriarum, quarum sunt radii  $BC$ ,  $Bc$ , in latus  $CT$ , seu ob  $bC = BC$  ( 107 ) æqualis facto ex peripheriâ circuli, cujus radius  $BC$ , in latus  $CT$ , vel arcum  $ct$ , nascentem; ergò factum istud est incrementum nascentis superficiæ curvæ ex rotatione  $AC$  descriptæ, adeoque est ut illius superficiæ fluxio. ( 146 ). Q. e. D.



153. Anguli rectilinei  $APB$ ,  $EPF$ , sunt inter se directè ut arcus  $AB$ ,  $EF$ , qui angulos subtendunt & reciprocè ut arcuum radii  $AP$ ,  $EP$ ... Dem... est angulus  $APB$ , ad angulum  $BPC$ , seu  $EPF$ , ut arcus  $AB$ , ad arcum  $BC$ , adeoque ut  $AB : AP$ , ad  $BC : AP$ ; sed ob arcus similes  $BC$ ,  $EF$ , est  $BC : AP = EF : EP$ ; ergò angulus  $APB$ , est ad angulum  $EPF$ , ut  $AB : AP$ , ad  $EF : EP$ . Q. e. D.

154. Hinc sequitur 1°. quemlibet angulum  $APB$  exprimi posse arcu  $AB$  qui ipsum subtendit diviso per radium  $AP$ . 2°. Quemlibet arcum circuli  $AB$ , esse ut factum ex angulo  $APB$  in radium  $AP$ , atque adeò hoc facto exprimi posse. 3°. Incrementum nascentis anguli fluentis  $APB$ , adeoque & illius anguli fluxionem ( 146 ) esse in ratione directâ arcus circularis nascentis & inversâ radii illius.



155. Recta  $PC$  fluens circa datum punctum  $P$  revolvatur, & punctum illius extremum  $C$ , curvam  $ACc$ , describat quam tangit in  $C$  recta  $VCH$  in quam ex polo  $P$ , demissa sit perpendicularis  $PV$ . Sit  $A$  punctum in curvâ  $ACc$  fixum, progredianturque recta  $PC$  de loco

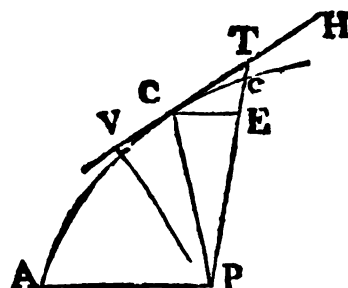
DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

§ 1.

co suo  $PC$ , in locum novum  $Pc$ , & producta  $Pc$ , tangentem secet in  $T$ . Capiatur  $PE = PC$ , seu radio  $PC$  describatur circuli arcus  $CE$ , ut habeantur  $Ec$ , incrementum rectæ  $PC$ ,  $Cc$ , incrementum curvæ  $AC$ ,  $PCc$ , incrementum aræ  $PACP$ , angulus  $CPc$ , incrementum anguli  $APC$ , eodem tempore genita. Re-deat jam  $PC$ , in locum suum priorem  $PC$ , ut incrementa illa omnia evanescant & h-orum incrementorum evanescentium ratio ul-tima erit ratio fluxionum quantitatum fluen-tiarum quarum sunt incrementa (146).

156. Quoniam autem perveniente  $Pc$ , in locum  $PC$ , triangu-la  $CEc$ ,  $CET$ , eva-nescentia sunt ultimò similia & æqualia (Lem. 8.) circuli arcus  $CE$ , cum chorda ipsius coincidit, ipsique æqualis est (Lem. 7.), & præterea evanescente angulo  $CPE$ , an-guli  $PCE$ ,  $PEC$ , sunt inter se & duobus rectis æquales, adeoque  $CE$ , ad  $PT$ , nor-malis. Manifestum est. . . . 1°. Triangulum  $TVP$  esse triangulo  $TEC$ , adeoque & triangulo evanescenti  $cEC$ , simile, ac proin-dè fluxiones arcus  $AC$ , & rectæ  $PC$ , esse inter se ut duo latera  $VT$ ,  $TP$ , seu  $VC$ ,  $PC$ . . . 2°. Fluxionem anguli  $APC$ , esse ut  $CE:PC$  (154). . . 3°. Fluxionem aræ  $ACP$ , esse ut factum ex rectâ  $CP$ , in norma-lem  $CE$  evanescentem; nam area trian-guli  $PCT$ , æqualis dimidio rectangulo  $PT \times CE$ , seu ob evanescentem  $ET$ , dimidio rectangulo  $PC \times CE$  (Lem. 1.).

157. Similibus argumentis ex fluentibus calculo expressis fluxiones inveniri possunt, in quantitatis finitis analysim instituendo, & finitarum nascentium vel evanescentium rationes primas vel ultimas investigando. Hæc autem sunt calculi fluxionum principia. Nimirum. . . 1°. Cum fluxiones sint in pri-mâ ratione incrementorum nascentium & ultimâ evanescentium (146), fluxiones iis incrementis primò nascentibus vel ultimò evanescentibus possunt exprimi. . . 2°. . . Quantitates quæ nonnisi suo incremento nas-cente aut evanescente differunt, sunt æquales (Lem. 1.). . . 3°. . . Quantitatum con-stantium nullæ sunt fluxiones, nulla incre-menta vel decrements. . . 4°. Si inter-quantitates indeterminatas aliquæ decre-scant, dum aliæ crescunt, decrescantium fluxiones sunt negativæ, sunt enim ut in-crementa negativa, seu ut decrements.

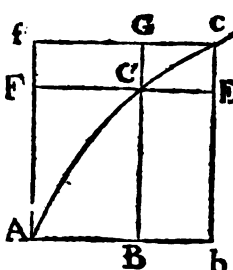


158. Quantitates fluentes designantur ul-timis alphabeti litteris  $z, y, x, v$ ; con-stantes indicantur aliis  $a, b, c$  &c. fluen-tium fluxiones primas aut ipsi proportiona-lia incrementa nascentia vel evanescentia NEWTONUS notat iisdem litteris quibus fluentes exponuntur, sed iis punctuatis sic  $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$ ; Leibnitius litteram  $d$ , incrementi nascentis vel evanescentis not-am characteristicam fluentibus præponit sic  $dz, dy, dx, dv$ . Fluxiones secundæ designantur sic  $\ddot{z}, \ddot{y}, \ddot{x}, \ddot{v}$ , vel sic  $ddz, ddy, ddx, ddv$ ; fluxiones tertiæ sic  $\dddot{z}, \dddot{y}, \dddot{x}, \dddot{v}$ , vel sic  $dddz, dddy, dddx, dddv$ , vel sic  $d^3z, d^3y, d^3x, d^3v$ , & ita deinceps in infinitum.

159. Fluxio quantitatis ex pluribus termi-nis per additionem vel subtractionem com-positæ, æqualis est omnibus singulorum ter-minorum fluxionibus per eadem signa  $+$  vel  $-$  junctis; ita fluxio quantitatis com-positæ  $a + z - y$ , erit  $d z - d y$ . . . Dem. . . Totius quantitatis  $a + z - y$ , incrementum tempore dato genitum æquale est differentie incrementorum ipsarum  $z$  &  $y$ , cum nullum sit constantis  $a$ , incremen-tum (156) adeoque incrementum nascentis vel evanescentis quantitatis  $a + z - y$ , æqua-le est differentie incrementorum nascentium vel evanescentium ipsarum  $z$  &  $y$ , sed flu-xiones sunt in primâ ratione incrementorum nascentium (145) ergò fluxio totius quan-titatis  $a + z - y$ , est  $d z - d y$ . Q. e. D. Si crescente quantitate  $z$ , decresceret  $y$ , ipsius  $y$ , fluxio foret negativa nempe  $- d y$  (157) adeoque fluxio  $d z - d y$ , fieret  $d z + d y$ . Quod in sequentibus semper est observandum.

160. Flu-

160. Fluxio quantitatis fluentis ex pluribus variabilibus per multiplicationem compositæ, æqualis est summæ factorum ex singularum variabilium componentium fluxionibus in aliarum variabilium facta ductis, hoc est fluxio quantitatis  $xy$ , est  $x dy + y dx$ , fluxio quantitatis  $ax$  est  $a dx$ , fluxio quantitatis  $xyz$  est  $y dx + x dy + z dx$ ... *Dem...* Recta



CB, fluens super recta AB cui normalis est, progrediatur, illiusque punctum extremum C, describat curvam ACc, perveniat BC in locum bc, & compleantur rectangula BF, bf, BE, cf, EG; AB, dicatur  $x$ , BC dicatur  $y$ , adeoque rectangulum BF erit  $xy$ . Dum BC, pervenit in bc, incrementum rectanguli BF seu  $xy$ , æquale est summæ rectangulorum BE, EG, Cf; est autem rectangulum EG, ad rectangulum EB, ut Ec ad BC, & ad rectangulum Cf ut CE, vel Bb, ad FC, seu AB; quare redeunte bc, in locum suum priorem BC, & decrefcentibus continuè Ec, & EC atque tandem ultimò evanescentibus, decrefcit quoque & tandem evanescit, seu fit insignabilis ratio rectanguli EG, ad rectangula EB & cf; adeoque (Lem. 1.) summa duorum rectangulorum BE, cf, fit ultimò æqualis summæ trium rectangulorum BE, EG, Cf; ergò incrementum nascentis rectanguli BF, seu  $xy$ , æquale est summæ duorum rectangulorum BE, Cf, nascentium, seu summæ factorum ex  $x$ , in incrementum nascentis ipsius  $y$ , & ex  $y$ , in incrementum nascentis ipsius  $x$ , adeoque fluxio facti  $xy$  (146) est  $x dy + y dx$ . Undè etiam fluxio  $ax$ , est  $a dx$ , quia  $a$ , constans nullam habet fluxionem. Q. e. D.

Jam in facto  $xyz$  ponatur  $xy = v$ , & erit  $xyz = vx$ , adeoque fluxio facti  $xyz$  æqualis fluxioni facti  $vx$ ; fluxio autem facti  $vx$ , est  $x dv + v dx$ , & fluxio facti  $xy = v$ , est  $x dy + y dx = dv$ , id est si in fluxione  $x dv + v dx$ , pro  $v$  &  $dv$  scribantur  $xy$ , &  $x dy + y dx$ , fluxio facti

$xyz$ , nempè  $x dv + v dx$ , erit  $xx dy + yx dx + xy dx$ ; & par est ratio aliorum factorum quorumcumque. Q. e. D.

161. Cor. 1... Ponantur singulæ fluentes  $x, y, z$ , &c. sibi mutuò semper æquales & ipsius  $xx$ , fluxio erit  $x dx + x dx = 2x dx$ : fluxio cubi  $z$  erit  $xx dz + x dx + x dx = 3x dx = 3z dx$ : fluxio potentie  $z^4$  erit  $4z^3 dx = 4z^2 dx$ : & eodem argumento fluxio potentie cujuscunque  $z^m$  erit  $mz^{m-1} dx$ .

162. Cor. 2... Fluxio quantitatis  $x^{\frac{1}{2}}$ , est  $\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}}$  nam po-

natur  $x^{\frac{1}{2}} = y$  & erit  $x = yy$ ,  $dx = 2y dy$  (161)  $dy = d(x^{\frac{1}{2}}) = dx : 2y = dx : 2x^{\frac{1}{2}}$  & generaliter fluxio quantitatis  $x^{\frac{m}{n}}$  est  $\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx$ .

163. Cor. 3... Fluxio fractionis  $x : y$  seu  $x/y$  est  $y dx - x dy : yy$ . Nam siar  $x : y = x$ , erit  $x = yx$ ,  $dx = y dx + x dy$  &  $dx = dx : y - x dy : y = dx : y - x dy : yy = y dx - x dy : yy$ : fluxio quantitatis  $ax/y$  est  $am y^{m-1} x^{m-1} dx = am x^{m-1} y^{m-1} dy$  (160).

164. Fluxiones secundæ ex primis fluxionibus, tertie ex secundis, iisdem regulis colliguntur quibus primæ fluxiones ex fluentibus finitis eruuntur. Ubi tamen sic pergitur ad fluxiones secundas, tertias & sequentes, convenit quantitatem aliquam ut uniformiter fluentem considerare, & pro ejus fluxione primâ unitatem scribere, pro secundâ verò & sequentibus nihil (148). Exemplum unicum afferemus; sit querenda fluxio fluxionis  $y dy : dx$ , supponendo quantitatem  $x$  uniformiter fluere, adeoque  $dx$  constantem seu  $= 1$ , invenitur fluxio  $y ddy + dy^2 : dx$ .

165. Ex fluxionibus fluentes inveniuntur, operationes instituendo iis contrarias quibus ex fluentibus reperiuntur fluxiones; quare, litterâ S, significante fluentem fluxionis cui præponitur, seu summam primarum incrementorum nascentium, vel ultimam evanescentium (147) methodi fluxionum inversæ fundamentates formulæ erunt.

LIBER PRIMUS.

§ 1.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

$$1. S. dz = z. \& S. adz = az. S. dz : a$$

$$2. S. mzm = \frac{1}{n} dz = zm,$$

$$\& S. m az m = \frac{1}{n} dz = az m,$$

$$\& S. \frac{m}{n} zm = \frac{1}{n} dz = zm : a.$$

$$3. S. (dz + dy) = z + y.$$

$$4. S. (zdy + ydz) = yz.$$

$$\& S. (a^m y^n z^m = \frac{1}{n} dz + a^n z^m$$

$$y^{n-1} dy) = az^m y^n.$$

$$5. S. (ydz - zdy) : yy = z : y.$$

166. Si fluxio, cujus fluens quaeritur, nulli harum formularum similis fuerit, per novarum variabilium substitutionem aliasque artes quas hic tractare nobis non licet, ad illas saepe reduci potest. Sit in exemplum fluxio  $cb + cx^{\frac{1}{2}} \times dx$ , ponatur  $cb + cx^{\frac{1}{2}} = z$  & erit  $cb + cx^{\frac{1}{2}} = zz$ , &  $cdx = 2zdz$ , &  $dx = \frac{2zdz}{c}$

adeoque  $cb + cx^{\frac{1}{2}} \times dx = 2zzdz : c$ .

Hæc autem fluxio similis est formulæ  $ma z^m = \frac{1}{n} dz$ , estque  $z : z^m = \frac{1}{n}$ , adeoque  $m = 3$ ,  $ma = 3a = 2 : c$ , &  $a = 2 : 3c$ .

adeoque  $S. m az m = \frac{1}{n} dz = az m = 2z : 3c$  loco  $z$ , scribatur ipsius valor  $cb + cx^{\frac{1}{2}}$ , & inveniatur  $S. cb + cx^{\frac{1}{2}} \times dx = \frac{2}{3} c (cb + cx) \times cb + cx^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} (b + x) \times cb + cx^{\frac{1}{2}}$ .

167. Superiorum formularum auxilio ex fluxionibus secundis primæ, ex tertiis secundæ &c. inveniuntur. Exempla sint  $S. ddx = dx$ .  $S. dx. ddx = \frac{1}{2} dxdx = \frac{1}{2} dx^2$ . Nam ponatur  $dx = y$ , & erit  $ddx = dy$ , &  $ddx. dx = ydy$ , & per formulam secundam inveniatur  $S. ydy = \frac{1}{2} yy$ , & si loco  $y$  substituaturs ipsius valor,  $dx$ , erit  $S. ydy = S. dxdx = \frac{1}{2} dx^2$ . Similiter.  $S. (dy + ydy) : dx = ydy : dx$ , supponendo  $dx$  constantem, nam fiat  $ddy = dv$ , adeoque  $dy = v$ , & fluxio proposita evadet,  $vdy + ydv : dx$ , cujus fluens (per formulam 4<sup>am</sup>) est  $vy : dx$ , ob  $dx$  constantem. Cum autem sit  $v = dy$ , erit  $vy : dx = ydy : dx$ .

168. Postquam fluentes ex fluxionibus collectæ sunt, si de veritate conclusionis dubitatur, fluxiones fluentium inventarum vicissim colligendæ sunt, & cum fluxionibus sub initio propositis comparandæ. Nam si prodeunt æquales, conclusio rectè se habet; sin minus, corrigendæ sunt fluentes sic, ut earum fluxiones fluxionibus sub initio propositis æquantur. Nam & fluens probitu assumi potest, & assumptio corrigi, ponendo fluxionem fluentis assumptæ æqualem fluxioni propositæ, & terminos homologos inter se comparando.

169. Quoniam constantis quantitatis nulla est fluxio, & eadem proinde fluxio  $dz$  ex fluentibus  $z$ , &  $z + a$ , colligitur; fluens omnis quæ ex fluxione primâ colligitur, augeri potest vel minui quantitate aliquâ constante; quæ ex fluxione secundâ colligitur, augeri potest vel minui quantitate cujus fluxio secunda nulla est; quæ ex fluxione tertiâ colligitur, augeri potest vel minui quantitate cujus fluxio tertia nulla est. Et sic deinceps in infinitum.

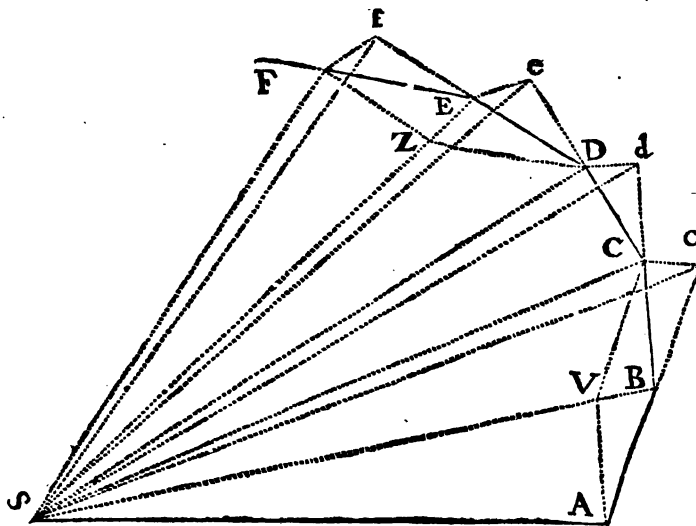
170. Cum fluens composita, quæ ex propositâ fluxione collecta est, unicam variabilem includit, ut fluens  $\frac{2}{3} (b + x) \times bc + cx^{\frac{1}{2}}$ , quæ (166) deducta est ex fluxione  $cb + cx^{\frac{1}{2}} \times dx$ , ita determinari solet constantis adjungenda vel detrahenda: in fluente inventâ loco variabilis  $x$ , ponitur 0; tum si fluens ipsa sit etiam 0, completa est. Si quid verò residuum fuerit, ut hic remanet  $\frac{2}{3} b \sqrt{bc}$ , hæc residuum cum signo contrario fluenti primò inventæ adjicitur, ut habeatur fluens completa,  $\frac{2}{3} (b + x) \times bc + cx^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} b \sqrt{bc}$ . Hujus regulæ ratio est, quod fluens inventa supponi possit exhibere aream curvæ alicujus, cujus sit abscissa variabilis  $x$ , adeo ut dum  $x = 0$ , area, fluente expressâ, sit etiam 0; undè si in fluente primò inventâ loco  $x$ , substituaturs 0, sitque aliquod residuum, illud ex fluente detrahi debet. Generaliter, quantitas constantis adjicienda vel subducenda ex naturâ quæstionis determinatur, aut arbitraria est.

*De inventione virium centripetarum.*

### PROPOSITIO I. THEOREMA I.

*Areas; quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.*

Dividatur  
tempus in par-  
tes æquales ,  
& primâ tem-  
poris parte  
describat cor-  
pus vi infinitâ  
rectam *A B*.  
Idem secundâ  
temporis par-  
te , si nil im-  
pediret, rectâ  
pergeret ad *c*,  
( per leg. 1. )  
describens li-



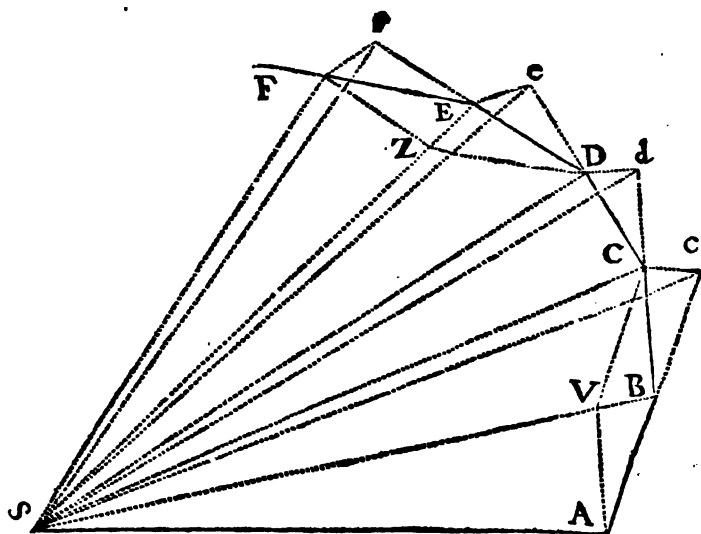
neam  $Bc$  æqualem ipsi  $AB$ ; adeò ut radiis  $AS$ ,  $BS$ ,  $cS$  ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ  $ASB$ ,  $BS c$ . Verùm ubi corpus venit ad  $B$ , agat vis centripeta impulsu unico sed magno, efficiatque ut corpus de recta  $Bc$  declinet & pergat in rectâ  $BC$ . Ipsi  $BS$  parallela agatur  $cC$ , occurrens  $BC$  in  $C$ ; & completâ secundâ temporis parte, corpus (per legum corol. 1.) reperietur in  $C$ , in eodem <sup>(a)</sup> plano cum triangulo  $ASB$ . Junge  $SC$ ; & triangulum  $SB C$ , ob parallelas  $SB$ ,  $Cc$ , æquale erit triangulo  $SB c$ , atque ideo etiam

(\*) 171. Reperitur in C, in eodem plano cum triangulo A S B; nam diagonalis B C, quam viribus conjunctis mobile descri-

bit, est in plano parallelogrammi  $V B C c$ ,  
cujus latera  $B V$ ,  $B c$ , viribus separatim de-  
scribenda, sunt in plano trianguli  $A S B$ .

DE MOTU CORP. LIBER PRIMUS. etiam triangulo  $SAB$ . Simili argumento si vis centripeta successivè agat in  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , &c. faciens ut corpus singulis temporis particulis singulas describat rectas  $CD$ ,  $DE$ ,  $EF$ , &c. jacebunt hæ

omnes in eodem plano ; & triangulum  $SCD$  triangulo  $SB C$ , &  $SDE$  ipsi  $SCD$ , &  $SEF$  ipsi  $SDE$  æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto



describuntur : & componendo , sunt arearum summæ quævis  $SADS$ ,  $SAFS$  inter se , ut sunt tempora descriptionum. Augeatur jam numerus & minuatür latitudo triangulorum in infinitum ; & eorum ultima perimeter  $ADF$ , ( per corollarium quartum lemmatis tertii ) erit linea curva : ideòque vis centripeta , quæ corpus à tangente hujus curvæ perpetuò retrahitur , aget indefinenter ; areæ verò quævis descriptæ  $SADS$ ,  $SAFS$  temporibus descriptionum semper proportionales , erunt iisdem temporibus in hoc casu proportionales.

Q. E. D.

Corol. 1. Velocitas corporis in centrum immobile attracti est in spatiis non resistantibus reciprocè ut perpendicularum à centro illo in orbis tangentem rectilineam demissum. ( <sup>b</sup> ) Est enim velocitas in locis illis  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , ut sunt bases æqua-

qua-

( <sup>b</sup> ) 172. Est enim velocitas in locis illis  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , ut sunt bases æqualium triangulorum  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EF$ , æqualibus temporibus uniformi motu

descriptæ ( <sup>5</sup> ) ; æqualium autem triangulorum bases sunt reciprocè ut eorum altitudines , hoc est , reciprocè ut perpendiculara ex centro virium  $S$ , in bases demissa.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 91

qualium triangulorum  $AB, BC, CD, DE, EF$ ; & hæc bases sunt recprocè ut perpendiculara in ipsas demissa.

DE MOTU  
CORPORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Corol. 2.* Si arcuum duorum æqualibus temporibus in spatiis non resistentibus ab eodem corpore successivè descriptorum chordæ  $AB, BC$  compleantur in parallelogrammum  $ABCU$ , & hujus diagonalis  $BU$  in eâ positione quam ultimò habet ubi arcus illi in infinitum diminuuntur, producat utrinque; (<sup>c</sup>) transibit eadem per centrum virium.

*Corol. 3.* Si arcuum æqualibus temporibus in spatiis non resistentibus descriptorum chordæ  $AB, BC$  ac  $DE, EF$  compleantur in parallelogramma  $ABCU, DEFZ$ ; vires in  $B$  &  $E$  sunt ad invicem in ultimâ ratione diagonalium  $BU, EZ$ , ubi arcus isti in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus  $BC$  &  $EF$  componuntur (per legem corol. 1.) ex motibus  $Bc, BU$  &  $Ef, EZ$ : atqui  $BU$  &  $EZ$ , ipsis  $Cc$  &  $Ff$  æquales, in demonstratione propositionis hujus generabantur ab impulsibus vis centripetæ in  $B$  &  $E$ , ideòque sunt his impulsibus proportionales.

*Corol. 4.* Vires quibus corpora quælibet in spatiis non resistentibus à motibus rectilineis retrahuntur ac detorquentur in orbes curvos, sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus descriptorum sagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, & chordas bifecant ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. (<sup>d</sup>) Nam hæc sagittæ sunt semisses diagonalium, de quibus egimus in corollario tertio.

*Corol.*

sa. Cum igitur evanescentibus triangulis  $ASB, BSC$  &c. ultima perimeter  $ABCDEF$ , sit linea curva quam (113) rectæ  $Ac, Bd, Ce, Df$ , tangunt in punctis  $A, B, C, D, E$ , manifestum est velocitates in illis punctis esse recprocè ut perpendiculara à centro  $S$ , in tangentes demissa.

(<sup>c</sup>) 173. Transibit eadem per centrum virium. Nam ex demonstratione propositionis hujus, sumptâ  $BV = Cc$ , erit  $VC$ , æqualis & parallela lineæ  $Bc$ , seu  $AB$ , adeòque  $VA, BC$ , erunt etiam æquales & parallele, &  $BV$ , quæ producta transit per centrum  $S$ , erit diagonalis parallelogrammi  $ABCV$ .

174. Si ducantur per puncta quævis  $B$  &  $D$ , perimetri curvæ vel diversarum curvarum tangentes  $Bc, De$ , & demittantur angulorum contactuum subtensæ  $Cc, Ee$ , radiis  $SB, SD$ , ad centrum virium convergentibus parallelæ, sintque arcus  $BC, DE$ , æqualibus temporibus descripti, patet ex corollario 3. vires centripetas in  $B$  &  $D$ , esse ad invicem in ultimâ ratione subtensarum  $Cc, Ee$ .

(<sup>d</sup>) 175. Nam hæc sagittæ sunt semisses diagonalium  $BV, EZ$ , diagonales enim  $AC, DF$ , quæ sunt chordæ arcuum evanescentium  $ABC, DEF$ , alias diagonales  $BV, EZ$ , bifecant.

M 2





*Caf. 1.* Nam corpus omne, quod movetur in lineâ curvâ, DE Mo-  
detorquetur de cursu rectilineo per vim aliquam in ipsum agen-  
tem (per leg. 1.) Et vis illa, quâ corpus de cursu rectilineo  
detorquetur, & cogitur triangula quam minima  $SAB$ ,  $SBC$ ,  
 $SCD$ , &c. circa punctum immobile  $S$  temporibus æqualibus  
æqualia describere, (<sup>f</sup>) agit in loco  $B$  secundum lineam pa-  
rallelam ipsi  $cC$  (per prop. XL. lib. 1. elem. & leg. 11.) hoc  
est, secundum lineam  $BS$ ; & in loco  $C$  secundum lineam ip-  
si  $dD$  parallelam, hoc est, secundum lineam  $SC$ , &c. Agit  
ergo semper secundum lineas tendentes ad punctum illud im-  
mobile  $S$ . *Q. E. D.*

*Caf. 2.* Et, per legum corollarium quintum, perinde est;  
sive quiescat superficies, in quâ corpus describit figuram cur-  
vilineam, sive moveatur eadem unâ cum corpore, figurâ de-  
scriptâ, & puncto suo  $S$  uniformiter in directum.

*Corol. 1.* In spatiis vel mediis non resistentibus, si areæ non  
sunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concur-  
sum radiorum; (<sup>g</sup>) sed indè declinant in consequentia, seu  
versus plagam in quam fit motus, si modo arearum descriptio  
acceleratur: sin retardatur, declinant in antecedentia.

*Corol.*

(<sup>f</sup>) 177. Agit in loco  $B$ , secundum  
lineam parallelam ipsi  $Cc$ , hoc est, se-  
cundum lineam  $BS$ ; nam solâ vi insitâ in  
 $A$ , corpus uniformi cum motu progredie-  
retur per rectam  $Abc$ , & æqualibus tem-  
poribus æquales lineas  $AB$ ,  $Bc$ , descri-  
beret; verum per vim centripetam in  $B$ ,  
detorquetur à rectâ  $Bc$ , ut aliam rectam  
 $BC$ , eodem tempore describat quo de-  
scripsisset  $Bc$ ; adeoque junctâ  $Cc$ , vis  
centripeta agit in  $B$ , secundum directio-  
nem parallelam ipsi  $Cc$  (per coroll. 1.  
Leg.), sed ob  $AB = Bc$ , & ob trian-  
gulum  $SBC$ , æquale triangulo  $SAB$ ,  
(per hyp.), erit triangulum  $SAB =$  triang.  
 $SBC =$  triang.  $SBC$ , adeoque per prop.  
40. vel 39. lib. 1. Elem. communis triangu-  
lorum  $SBC$ ,  $SBC$  æqualium basis  $BS$ , pa-  
rallela est rectæ  $Cc$ , quæ illorum trian-  
gulorum vertices jungit; cum igitur, per  
demonstrata, vis centripeta in  $B$ , agat

secundum directionem parallelam lineæ  
 $Cc$ , necessum est ut agat secundum di-  
rectionem rectæ  $BS$ , hoc est, ut tendat  
ad centrum  $S$ .

(<sup>g</sup>) 178. Sed indè declinant in con-  
sequentia, si modò arearum descriptio ac-  
celeratur: sin retardatur, declinant in an-  
tecedentia. Nam si triangulum  $SBC$ ,  
æquale non est triangulo  $SAB$ , seu  $SBC$ ,  
eodem tempore descripto, recta  $Cc$ , non  
erit parallela lineæ  $BS$ , sed producta cum  
lineâ  $SB$ , itâ converget ut tendat in pla-  
gam motûs, si triangulum  $SBC$ , trian-  
gulo  $SBC$ , majus est, & tendat in plagam  
contrariam si triangulum  $SBC$ , triangu-  
lo  $SBC$ , minus. Quare vis centripeta in  
 $B$ , agens secundum directionem paral-  
lelam lineæ  $Cc$ , in primo casu declinat  
in consequentia, in secundo casu declinat  
in antecedentia.



legum corol. VI.) si vi novâ, quæ æqualis & contraria sit illi, DE MO-  
quâ corpus alterum  $T$  urgetur, urgeatur corpus utrumque se-  
cundum lineas parallelas; perget corpus primum  $L$  describere <sup>TU COR-</sup>  
circa corpus alterum  $T$  areas easdem ac prius: vis autem, qua <sup>PORUM.</sup>  
corpus alterum  $T$  urgebatur, jam destruetur per vim sibi æ-  
qualem & contrariam; & propterea (per leg. I.) corpus illud <sup>LIBER</sup>  
alterum  $T$  sibi met ipsi jam relictum vel quiescet, vel movebi-  
tur uniformiter in directum: & corpus primum  $L$  urgente dif-  
ferentiâ virium, id est, urgente vi reliquâ perget areas tem-  
poribus proportionales circa corpus alterum  $T$  describere. Ten-  
dit igitur (per theor. I I.) differentia virium ad corpus illud al-  
terum  $T$  ut centrum. *Q. E. D.* <sup>PRIMUS</sup>

*Corol. 1.* Hinc si corpus unum  $L$  radio ad alterum  $T$  ducto  
describit areas temporibus proportionales; atque de vi totâ (fi-  
ve simplici, five ex viribus pluribus juxta legum corollarium se-  
cundum compositâ) quâ corpus prius  $L$  urgetur, subducatur  
(per idem legum corollarium) vis tota acceleratrix, qua cor-  
pus alterum urgetur: vis omnis reliqua, quâ corpus prius urge-  
tur, tendet ad corpus alterum  $T$  ut centrum.

*Corol. 2.* Et, si areae illæ sunt temporibus quamproximè pro-  
portionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum  $T$  quampro-  
ximè.

*Corol. 3.* Et vice versa, si vis reliqua tendit quamproximè  
ad corpus alterum  $T$ , erunt areae illæ temporibus quamproximè  
proportionales.

*Corol. 4.* Si corpus  $L$  radio ad alterum corpus  $T$  ducto de-  
scribit areas, quæ, cum temporibus collatæ, sunt valde inæqua-  
les; & corpus illud alterum  $T$  vel quiescit, vel movetur uni-  
for-

geatur corpus utrumque secundum li-  
neas parallelas  $QT$ ,  $QL$ ; perget corpus  
 $L$ , describere circa corpus  $T$ , areas eas-  
dem ac prius; vis autem acceleratrix quâ  
corpus  $T$  urgebatur jam destruetur per  
vim sibi æqualem & contrariam; & prop-  
terea, per Leg. I. corpus illud  $T$ , sibi  
met ipsi jam relictum vel quiescet vel mo-

vebitur uniformiter in directum; nimirum  
quiescet, si nullâ aliâ vi præter accelera-  
tricem secundum directionem  $TQ$ , antè  
urgebatur; movebitur verò æquabiliter per  
rectam aliquam  $TF$ , si præter vim acce-  
leratricem per  $TQ$ , agentem, aliâ vi non  
acceleratrice ferebatur juxta directionem  
 $TF$ , &c.

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS.  
 formiter in directum: actio vis centripetæ ad corpus illud alterum  $T$  tendentis vel nulla est, vel miscetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: visque tota ex omnibus, si plures sunt vires, composita ad aliud ( five immobile five mobile ) centrum dirigitur. Idem obtinet, ubi corpus alterum motu quocunque movetur; si modo vis centripeta fumatur, quæ restat post subtractionem vis totius in corpus illud alterum  $T$  agentis.

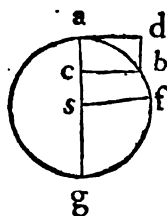
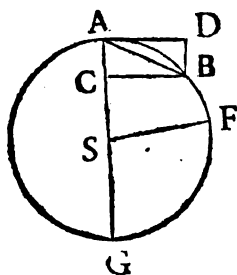
### Scholium.

Quoniam æquabilis arearum descriptio index est centri, quod vis illa respicit, quâ corpus maximè afficitur, quâque retrahitur à motu rectilineo, & in orbita sua retinetur; quidni usurpemus in sequentibus æquabilem arearum descriptionem ut indicem centri, circum quod motus omnis circularis in spatiis liberis peragitur?

### PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

*Corporum, quæ diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere; & esse inter se, ut sunt arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.*

(<sup>1</sup>) Tendunt hæ vires ad centra circulorum per prop. 11. & corol. 2. prop. 1. & sunt inter se ut arcuum æqualibus tempo-



describant, & areæ seu sectores ASF, FSG, & asf, fsg, erunt in singulis circulis ut arcus AF, FG, & af, fg; hoc est ( 5 ) ut tempora quibus describuntur, ac proinde vires quibus corpora A & a, in peripheriis ABGA, abga retinentur, tendunt ad centra S & s. Sint arcus AB, ab, æqualibus temporibus quam minimis descripti, & ductis tangentibus AD, ad, & ad eas perpendicularibus BD, bd, completisque parallelogrammis CD, cd, vires centripetæ in A & a, erunt inter se ut rectæ Db, db, seu ut sinus versî AC, ac, ( 174 ). Verum

(<sup>1</sup>) 182. Corpora duo A & a, circulos ABGA, abga, æquabili motu

poribus quàm minimis descriptorum sinus versi per corol. 4. DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS.  
prop. 1. hoc est, ut quadrata arcuum eorundem ad diametros  
circularum applicata per lem. VII. & propterea, cum hi arcus  
sint ut arcus temporibus quibuscvis æqualibus descripti, & dia-  
metri sint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis  
simul descriptorum quadrata applicata ad radios circularum.

Q. E. D.

Corol. 1. Cum arcus illi sint ut velocitates corporum, vires centripetæ erunt in ratione compositâ ex duplicatâ ratione velocitatum directè, & ratione simplici radiorum inversè. (m)

Corol. 2. (n) Et, cum tempora periodica sint in ratione compositâ ex ratione radiorum directè, & ratione velocitatum inversè; (o) vires centripetæ sunt in ratione compositâ ex ratione radiorum directè, & ratione duplicatâ temporum periodicorum inversè.

Corol. 3. (p) Unde si tempora periodica æquantur, & prop-

rùm ductis chordis AB, ab, est AC: AB = AB: AG, & ac: ab = ab: ag, undè AC =  $\frac{AB^2}{AG}$ , & a c =  $\frac{ab^2}{ag}$ ; cum

igitur chordæ & arcus nascentes æquales sint (per Lem. VII.) erit AC: ac, hoc est, vis centripeta in A, ad vim centripetam in a, ut quadratum arcus evanescentis AB diametro AG divisum, ad quadratum arcus evanescentis ab, diametro ag, divisum; & propterea cum hi arcus &c.

(m) 183. Vis centripeta quâ corpus in peripheriâ circuli uniformiter incedens retinetur, est in omnibus peripheriæ punctis eadem, ut pote semper proportionalis constantis velocitatis quadrato ad radium constantem applicato.

(n) 184. Tempora periodica, hoc est, tempora quibus integræ peripheriæ describuntur, sunt in ratione compositâ ex ratione radiorum directè & ratione velocitatum inversè. Nam (s) velocitates sunt ut peripheriæ ad tempora periodica applicatæ, sed peripheriæ sunt ut radii, ergo velocitates sunt ut radii ad tempora periodica applicati, ac proinde tempora periodica sunt ut

Tem. L

radii directè & velocitates inversè. Si corporum A & a, tempora periodica dicantur T & t, celeritates C & c, radii AS, as, dicantur R & r, erit C: c =  $\frac{R}{T} : \frac{r}{t}$  ideòque T: t =  $\frac{R}{C} : \frac{r}{c}$ .

(o) 185. Vires centripetæ sunt reciproce ut quadrata temporum periodicorum applicata ad circularum radios; nam vires centripetæ corporum A & a, dicantur V & v, erit (per coroll. 1.) V: v =  $\frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$ , sed quoniam (184) C: c =  $\frac{R}{T} : \frac{r}{t}$ ,

adeòque C<sup>2</sup>: c<sup>2</sup> =  $\frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$  erit  $\frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r} =$

$\frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$  ergò V: v =  $\frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2} = t^2 R : T^2 r$   
=  $\frac{r^2}{r} : \frac{T^2}{R}$ .

(p) 186. Unde si tempora periodica æquantur & propterea (184) velocitates sint ut radii, erunt etiam vires centripetæ ut radii, nam cum sit (185) V: v =  $t^2 R : T^2 r$ , si T<sup>2</sup> = t<sup>2</sup>, erit V: v = R: r.

N

Et

propterea velocitates sint ut radii; erunt etiam vires centripetæ ut radii: & contra.

*Corol. 4.* (q) Si & tempora periodica, & velocitates sint in ratione subduplicatâ radiorum; (r) æquales erunt vires centripetæ inter se: & contra.

*Corol. 5.* (f) Si tempora periodica sint ut radii, & propterea velocitates æquales; vires centripetæ erunt reciprocè ut radii: & contra.

*Corol. 6.* (t) Si tempora periodica sint in ratione sesquuplicatâ radiorum, & propterea velocitates reciprocè in radiorum ratione subduplicatâ; (u) vires centripetæ erunt reciprocè ut quadrata radiorum: & contra.

*Corol.*

Et contrâ si vires centripetæ sint ut radii, tempora periodica æquantur. Cum enim sit (185)  $V:v = t^2 R:T^2 r$ , si ponatur  $V:v = R:r$ , erit  $R:r = t^2 R:T^2 r$ , unde  $r t^2 R = R T^2 r$ , adeoque  $t^2 = T^2$ , &  $t = T$ .

(q) 187. Si tempora periodica sint in ratione subduplicatâ radiorum, velocitates erunt in eâdem ratione. Nam (184)

$$C:c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t} \text{ adeoque } C:c = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$$

Undè si fuerit  $T:t = R:r$  ac proindè  $T^2:t^2 = R:r$ , erit  $C:c = R:r$ .

Et contrâ si fuerit  $C:c = R:r$ , erit  $\frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2} = R:r$ , adeoque  $\frac{R}{T^2} = \frac{r}{t^2}$ , &  $R t^2 = r T^2$ , unde  $T:t = R:r$ .

(t) 188. Si & tempora periodica ac proindè velocitates (187) sint in ratione subduplicatâ radiorum, æquales erunt vires centripetæ inter se. Cum sit (185)  $V:v = t^2 R:T^2 r$ , si ponatur  $T^2:t^2 = R:r$ , erit  $t^2 R = T^2 r$ , unde  $V=v$ .

Et contrâ si  $V=v$ , cum sit (185)  $V:v = t^2 R:T^2 r$ , erit  $t^2 R = T^2 r$ , & proindè  $T^2:t^2 = R:r$ .

(f) 189. Si tempora periodica sunt ut radii & propterea (184) velocitates æquales, vires centripetæ erunt reciprocè ut radii. Quoniam enim (per coroll. 1.)

$$V:v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}, \text{ si } C=c, \text{ erit } V:v = \frac{1}{R} : \frac{1}{r}.$$

Et contrâ si fuerit  $V:v = \frac{1}{R} : \frac{1}{r}$ , cum sit (coroll. 1.)  $V:v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$  erit  $\frac{1}{R} : \frac{1}{r} = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$ , adeoque  $C^2 = c^2$ , &  $C=c$ .

(r) 190. Si tempora periodica sint in ratione sesquuplicatâ radiorum, erunt velocitates reciprocè in ratione radiorum subduplicatâ; nam quoniam (184)  $C:c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$ , adeoque  $C:c = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$  si fuerit  $T^2:t^2 = R:r$ , erit  $C:c = \frac{R^2}{R^2} : \frac{r^2}{r^2} = \frac{1}{R} : \frac{1}{r} = r:R$ .

Et contrâ si fuerit  $C:c = r:R$ , erit  $\frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2} = r:R$ , adeoque  $\frac{R}{T^2} = \frac{r}{t^2}$ , &  $R:t^2 = T^2:r$ .

(u) 191. Si tempora periodica sint in ratione sesquuplicatâ radiorum & propterea (190) velocitates reciprocè in radiorum ratione subduplicatâ, vires centripetæ erunt reciprocè ut quadrata radiorum. Nam cum sit (185)  $V:v = t^2 R:T^2 r$ , si fuerit  $T^2:t^2 = R:r$ , erit  $V:v = r^2 R:R^2 r = r^2:R^2$ .

Et contrâ si  $V:v = r^2:R^2$ , erit (185)  $r^2:R^2 = t^2 R:T^2 r$  ac proindè  $t^2 R = T^2 r$ , &  $R:t^2 = T^2:r$ .

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 99

*Corol. 7.* Et universaliter, si  $(x)$  tempus periodicum sit ut  $DEMO-$   
radii  $R$  potestas quælibet  $R^n$ , & propterea velocitas reciprocè  $TU COR-$   
ut radii potestas  $R^{n-1}$ ;  $(y)$  erit vis centripeta reciprocè ut  $PORUM.$   
radii potestas  $R^{2n-1}$ : & contra. **LIBER**  
**PRIMUS.**

*Corol. 8.*  $(z)$  Eadem omnia de temporibus, velocitatibus,  
& viribus, quibus corpora similes figurarum quarumcunque  
similium, centraque in figuris illis similiter posita habentium,  
par-

$(x)$  192. Si tempora periodica sint  
ut radiorum potestates quælibet  $R^n, r^n$ ,  
velocitates erunt reciprocè ut radiorum  
potestates  $R^{n-1}, r^{n-1}$ . Nam ponatur  
 $T:t = R:r^n$ , & quoniam (184)

$$G:c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}, \text{ erit } C:c = \frac{R}{R^n} : \frac{r}{r^n}$$

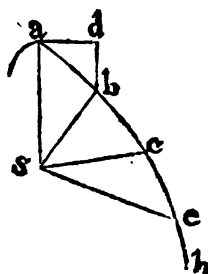
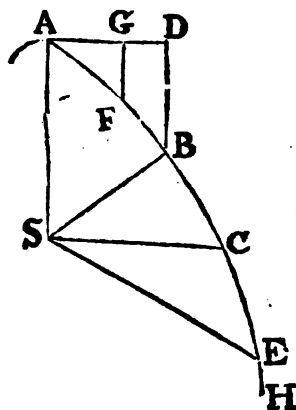
$$= \frac{1}{R^{n-1}} : \frac{1}{r^{n-1}} = r^{n-1} : R^{n-1}.$$

Et contrà si fuerit  $C:c = r^{n-1} : R^{n-1}$ ,  
erit  $\frac{R}{T} : \frac{r}{t} = r^{n-1} : R^{n-1}$ , adeoque  
que  $\frac{R^n}{T} = \frac{r^n}{t}$ , undè  $R^n : r^n = T : t$ .

$(y)$  193. Et universaliter si tempora  
periodica sint ut radiorum potestates quæ-  
libet  $R^n, r^n$ , & propterea (192) velo-  
citates reciprocè ut radiorum potestates  
 $R^{n-1}, r^{n-1}$ , erunt vires centripetæ  
reciprocè ut radiorum potestates  $R^{2n-1},$   
 $r^{2n-1}$ . Nam ponatur  $T:t = R:r^n$ ,  
adeoque  $T^2:t^2 = R^2:r^{2n}$ : & eum sit  
(185)  $V:v = t^2 R : T^2 r$ , erit  $V:v =$   
 $R r^{2n} : r R^2 = r^{2n-1} : R^{2n-1}$ .

Et contrà si fuerit  $V:v = r^{2n-1} : R^{2n-1}$ ;  
 $R^2 : r^2 = t^2 R : T^2 r$ , erit  
 $r^{2n-1} : R^{2n-1} = t^2 R : T^2 r$ , adeoque  
 $t^2 R^2 = T^2 r^2$ , undè  $T^2 : t^2 =$   
 $R^2 : r^2$  &  $T:t = R:r^n$ .

$(z)$  194. Corpora  $A$  &  $a$ , figurarum  
similium  $ABH, abh$ , centra  $S, s$ , in fi-  
guris illis similiter posita habentium, par-  
tes similes  $ABE, abe$ , ità describant  
ut areæ  $ASB, ASC$  &c.  $asb, asc$  &c.  
circa centra  $S, s$ , in singulis figuris de-  
scriptæ temporibus quibus describuntur  
sint respectivè proportionales, & per prop.  
11. vires centripetæ ad centra  $S, s$ , ten-



dent. Per puncta  $A$  &  $a$ , in curvis simi-  
liter posita agantur tangentes  $AD, ad$ ,  
sintque arcus minimi,  $AF, ab$ , eodem  
tempore in utraque curvâ descripti, &  
ductis rectis  $FG, bd$ , radiis vectori-  
bus  $AS, as$ , parallelis, vis centripeta  
in  $A$ , est ad vim centripetam in  $a$ , ut  
 $FG$ , ad  $bd$ , (174). Sumatur autem



# 100 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo- partes describunt; consequuntur ex demonstratione præceden-  
 TU COR- tum ad hosce casus applicatâ. Applicatur autem substituendo  
 PORUM. æquabilem arearum descriptionem pro æquabili motu, & di-  
 LIBER stantias corporum à centris pro radiis usurpando.  
 PRIMUS.

Co-

arcus AB similis ab; (ita ut sit  $as:$   
 $AS = a b : AB$ , ac proinde sit  $AB =$   
 $\frac{ab \times AS}{as}$ ) ducaturque BD radio AS

parallela, erit per coroll. 1. Lem. x1.  
 $FG : BD = AF : AB$ , & quia figuræ ABD  
 & abd, sunt similes, est  $BD : bd = AB : ab$ ,  
 itaque per compositionem rationis est  
 $FG : bd = AF^2 \times AB : AB^2 \times ab = AF^2 :$

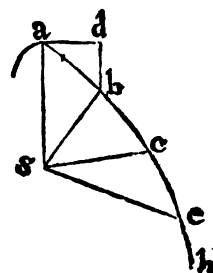
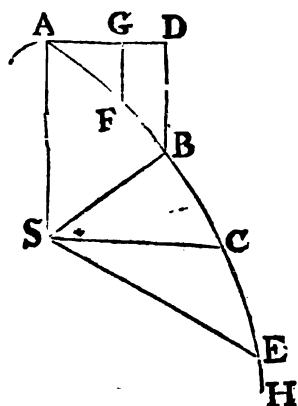
$AB \times a - b$  (& quia  $AB = \frac{ab \times AS}{as}$ )

$= AF^2 : \frac{ab \times AS}{as} \times ab = \frac{AF^2}{AS} : \frac{ab^2}{as}$ .

Cum igitur demonstratum fuerit vires cen-  
 tripetas in A & a, esse inter se ut sunt  
 GF, bd, erunt vires illæ ut quadrata  
 arcuum AF, ab, simul descriptorum ap-  
 plicata ad radios homologos AS, as.

195. Coroll. 1. Quoniam velocitates fi-  
 nitæ corporum A & a, per arcus nascent-  
 es AF, ab, sunt uniformes, erunt il-  
 læ ut arcus AF, ab, æqualibus tempo-  
 ribus descripti (5). Unde vires centri-  
 petæ in A, & a, erunt ut velocitatum in A &  
 a, quadrata, ad radios AS, as applicata.

196. Coroll. 2. Figuræ similes ASE,  
 ase, divisæ concipiantur in innumeros  
 sectores æquales ASB, BSC &c., &  
 asb, bsc, &c. sibi mutuo in duabus figuris  
 similes, & ob æquabilem arearum seu sec-  
 torum in singulis figuris descriptionem,  
 sectores æquales æqualibus temporibus de-  
 scribuntur, ac proinde arcus AB, BC, & ar-  
 cus ab, bc, &c. æqualibus respectivè tem-  
 poribus percurruntur: erit igitur tempus  
 per AB, ad tempus per ab, ut tempus  
 per AE, ad tempus per ae, hoc est,  
 tempora quibus describuntur arcus simi-  
 les AB, ab, sunt ut tempora quibus  
 describuntur alii quicumque similes arcus,  
 AE, ae, adeoque ut tempora periodica.  
 Cum igitur (195) velocitates in A & a,  
 sint inter se ut arcus AB, ab, ad sua



respectivè tempora applicati, erunt quo-  
 que velocitates illæ inter se ut arcus AB,  
 ab, seu ob figurarum similitudinem, ut  
 radii AS, as, ad tempora periodica ap-  
 plicati, id est, celeritates in punctis corres-  
 pondentibus A & a, sunt in ratione composi-  
 tã ex ratione radiorum homologorum di-  
 rectè & ratione temporum periodicorum in-  
 versè, adeoque tempora periodica sunt ut  
 radii directè & velocitates inversè.

197. Coroll. 3. Celeritates in A & a,  
 dicantur

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 101

*Corol. 9.* <sup>a</sup> Ex eâdem demonstratione consequitur etiam; **DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS.**  
quod arcus, quem corpus in circulo datâ vi centripetâ uniformiter revolvendo tempore quovis describit, medius est pro-

dicantur  $C, c$ , vires centripetæ  $V, v$ , radii vectores homologî  $R, r$ ; tempora periodica  $T, t$ , & erit (196)  $C:c = \frac{R}{T} = \frac{r}{t}$ ,

&  $T:t = \frac{R}{C} : \frac{r}{c}$ , &  $C^2:c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$ .

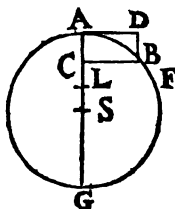
Et quoniam (195)  $V:v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$ ,

erit  $V:v = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2} = t^2 : R : T^2 r =$

$\frac{t^2}{r} : \frac{T^2}{R}$ , hoc est, vires centripetæ sunt

reciprocè ut quadrata temporum periodicorum ad radios homologos applicata. Cum igitur cætera omnia de temporibus, velocitatibus & viribus in circulis corollaria, ex superioribus proportionibus deducta sint, evidens est eadem omnia convenire temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora similes figurarum quarumcumque similium, centraque in figuris illis similiter posita habentium, partes describunt.

(2) 198. Corpus A uniformiter revolvatur in circuli peripheriâ ABGA, & idem vel aliud corpus ex puncto A, per radium AS, eâdem vi centripetâ quâ corpus A in circuli peripheriâ retinetur continuò ita urgeatur ut (vi illâ centripetâ constanti permanente; quemadmodum fit in corporibus vi gravitatis constante cadentibus) corpus illud cadendo percurrat AL, eodem tempore quo corpus A, uniformiter describit arcum AF. Quoniam vis acceleratrix per radium AS, constans est & continuò agit (per hyp.) corpus per AS, motu uniformiter accelerato cadit (25) & spatia percurra sunt ut quadrata temporum quibus percurruntur (27), ducatur per A, tangens AD, & sumpto arcu minimo AB, in tangentem demittatur perpendicularis BD, & compleatur rectangulum CD, eo-



dem tempore quo corpus A, æquabili motu describit arcum AB, per vim centripetam percurrit DB, seu AC, (ex coroll. 3. Prop. 1<sup>a</sup>.) erit igitur AC, ad AL, ut quadratum temporis per AB, ad quadratum temporis per AF, hoc est, ob motum in circulo æquabilem AC:

$AL = AB^2 : AF^2 = \frac{AB^2}{AG} : \frac{AF^2}{AG}$ ; cum

igitur ob arcum nascentem AB, suæ chordæ æqualem, sit  $AC = \frac{AB^2}{AG}$ , erit

quoque  $AL = \frac{AF^2}{AG}$  atque adeò  $AL \times$

$AG = AF^2$  & proinde  $AL : AF = AF : AG$ .

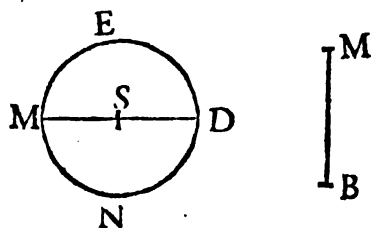
199. Coroll. 1. Velocitas quâ corpus A, peripheriam circuli AFGA, uniformiter describit, æqualis est velocitati quam acquireret cadendo per dimidium radium AS, si vi centripetâ constanti continuò urgeretur æquali illi quâ corpus A in peripheriâ circuli retinetur: Nam sit AL altitudo per quam A cadere debet ut acquirat velocitatem quâ peripheriâ circuli describitur, sitque AF arcus eo tempore descriptus quo A cadit per AL eodem etiam tempore motu æquabili percurreretur, 2 AL per velocitatem eam in L acquisitam (30), adeoque erit  $AF^2 = 2 AL$  siquidem eodem tempore eademque celeritate æquabili percurruntur, sed est semper  $AF^2 = AL \times AG$  (198) cum igitur sit  $2 AL = AF^2$  ac proinde  $4 AL^2 = AF^2$  erit  $4 AL^2 = AL \times AG$  &  $4 AL = AG$  &  $AL = \frac{AG}{4} = \frac{AS}{2}$ .

200. Coroll. 2. Tempus revolutionis per integram peripheriam est ad tempus descensus uniformiter accelerati per dimidium radium, ut peripheria ad radium. Nam eodem tempore quo dimidius radius motu uniformiter accelerato percurritur, totus radius describeretur cum æquabili velocitate lapsa per dimidium radium acquisitâ (30) eâ verò ipsâ celeritate corpus circuli peripheriam

DE Mo- portionalis inter diametrum circuli, & descensum corporis eâdem  
TU COR- datâ vi eodemque tempore cadendo confectum. Scho-  
PORUM.

LIBER (199) describit. Ergo cum spatia eâdem ve-  
PRIMUS. locitate uniformi percursâ, sint ut tempo-  
ra (5) patet propositum.

201. Coroll. 3. Hinc datâ vi centri-  
petâ quâlibet in datâ à centro distantâ,  
facile est reperire velocitatem quâ corpus  
projici debet ut circâ prædictum centrum  
in datâ distantâ circulum uniformiter de-  
scribat; velocitas enim illa æqualis est  
velocitati quam corpus acquireret caden-  
do per dimidiam distantiam à centro, si  
datâ vi centripetâ continuò urgeretur (199).  
Dato autem circuli radio, datur periphe-  
ria, & datâ æquabili in circulo velocitate  
cum peripheriâ, invenitur tempus perio-  
dicum, & arcus dato quovis tempore de-  
scriptus habetur.



202. Coroll. 4. Datis circuli radio &  
velocitate corporis in eo revolventis, fa-  
cilè colligitur proportio vis centripetæ in  
eo circulo ad vim quamlibet notam, qualis  
est vis gravitatis. Primum enim inveniatur  
tempus revolutionis unius in eo circulo per-  
actæ (5), mox inveniatur tempus quo cor-  
pus vi illâ centripetâ continuò sollicitatum  
per dimidium radium caderet (200). Ex  
datâ autem vi gravitatis seu ex dato spatio  
quod grave liberè cadendo, dato quodam  
tempore percurrat, invenitur (27) spatium  
ab eodem gravi percursum eo tempore quo  
corpus vi centripetâ sollicitatum per dimi-  
dium radium cadit, sed vires acceleratrices  
constantes, rationem habent spatiorum  
quæ dato tempore percurrere faciunt (30)  
est ergo vis ea centripeta ad vim gravitatis,  
ut dimidius circuli radius ad spatium id  
quod grave percurreret eo tempore quo

corpus vi centripetâ sollicitatum dimidium  
illum radium percurrit.

Exempli causâ. Corpus M, ope fili MS  
clavo in S alligati, circâ centrum S. uni-  
formiter describat circulum MNDE, in  
plano horizontali positum, eaque sit cor-  
poris revolventis celeritas quæ acquiritur  
à gravi per altitudinem MB cadente,  
queritur ratio vis centripetæ in circulo  
ad vim gravitatis. Tempus quo grave ca-  
dit per altitudinem MB, dicatur T, &  
velocitas in B acquisita, quâ (ex hyp.)  
corpus M circuli peripheriam uniformi-  
ter describit, erit  $\frac{2 MB}{T}$  (30), periphe-  
ria circuli dicatur p, & cum tempus pe-  
riodicum in circulo sit æquale periphe-  
riæ ad velocitatem  $\frac{2 MB}{T}$  applicatæ (5)

erit id Tempus Periodicum  $\frac{p \times T}{2 MB}$ ; jam  
verò est peripheria ad radium (200) ut  
tempus Periodicum ad tempus quo corpus  
M, solâ vi centripetâ constante sollicita-  
tum, dimidium radium MS percurrit, sive  
 $p : MS = \frac{p \times T}{2 MB}$  ad tempus per dimidium

radium quod est idèò  $\frac{T \times MS}{2 MB}$ . Cum  
autem grave tempore T altitudinem MB  
sit emensum, & in motu uniformiter aece-  
lerato spatia percursâ sint ut quadrata tem-  
porum quibus percurruntur (27) erit  $T^2$  ad  
 $\frac{T^2 \times MS^2}{4 MB^2}$ , seu  $4 MB^2$  ad  $MS^2$  ut spa-  
tium MB tempore T percursum ad spatium  
percursum tempore  $\frac{T \times MS}{2 MB}$ , quo corpus,  
M, vi centripetâ percurrit dimidium ra-  
dium, quod erit  $\frac{MS^2 \times MB}{4 MB^2} = \frac{MS^2}{4 MB}$   
est igitur (13) vis centripeta in cir-  
culo ad vim gravitatis ut  $\frac{MS}{2}$ , ad  $\frac{MS^2}{4 MB}$ ,  
sive ut  $2 MB$  ad  $MS$ .

*Scholium.*

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

(<sup>b</sup>) Casus corollarii sexti obtinet in corporibus cœlestibus, (ut seorsum collegerunt etiam nostrates *Wrennus*, *Hookius* & *Hallæus*) & propterea quæ spectant ad vim centripetam decrecentem in duplicatâ ratione distantiarum à centrīs, decrevi fusiùs in sequentibus exponere.

Porro præcedentis propositionis & corollariorum ejus beneficio, colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis est eâ gravitatis. Nam si corpus in circulo terræ concentrico vi gravitatis suæ revolvatur, hæc gravitas est ipsius vis centripeta. Datur autem ex descensu gravium, & tempus revolutionis unius, & arcus dato quovis tempore descriptus, per hujus corol. ix. Et (<sup>c</sup>) hujusmodi propositionibus *Hugenius* in eximio suo tractatu *de Horologio Oscillatorio* vim gravitatis cum revolvantium viribus centrifugis contulit.

(<sup>d</sup>) Demonstrari etiam possunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis describi intelligatur polygonum laterum quocunque. Et si corpus in polygoni lateribus datâ cum velocitate

(<sup>b</sup>) 203. Ex observationibus colligunt astronomi planetas secundarios, ut sunt Jovis vel Saturni Satellites, radiis ad suum planetam primarium ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica esse in ratione sesquuplicatâ distantiarum à centro planetæ primarii; planetas verò primarios radiis ad solem ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica esse in ratione sesquuplicatâ radiorum. Quare casus corollarii VI. in corporibus cœlestibus obtinet, id est, planetarum velocitates sunt reciprocè in ratione subduplicatâ radiorum, & vires centripetæ sunt reciprocè ut quadrata radiorum.

(<sup>c</sup>) 204. *Hugenius* ad calcem tractatus *de horologio oscillatorio*, de viribus centrifugis in circulo earumque cum vi gravitatis

proportionem 13. theorematum sine demonstratione proposuit. Eorum aliqua in corollariis propos. hujusce IV. demonstravit *Newtonus*, viamque aperuit, cui insistendo cætera omnia facili negotio absolvi possunt, quod postea perfecerunt multi insignes Mathematici.

(<sup>d</sup>) 205. Duo intelligantur polygona similia & regularia circulis duobus inscripta, quorum latera numero crescant & longitudine minuantur in infinitum, & corpora duo in polygonorum lateribus æquabili velocitate ferantur, atque ad singulos angulos à circulo reflectantur. Manifestum est corporum in polygonis revolvantium vires centrifugas non esse mensurandas ex solâ velocitate quâ in singulis angulis incurrunt in circulum & quâ ab illo reflectuntur, sed insuper habendam esse rationem frequentię impactuum aut

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

tate movendo ad ejus angulos singulos à circulo reflectatur; vis, quâ singulis reflexionibus impingit in circulum, erit ut ejus velocitas: ideoque summa virium in dato tempore erit ut velocitas illa, & numerus reflexionum conjunctim: hoc est (si polygonum detur specie) ut longitudo dato illo tempore descripta, & aucta vel diminuta in ratione longitudinis ejusdem ad circuli prædicti radium; id est, ut quadratum longitudinis illius applicatum ad radium: ideoque, si polygonum lateribus infinite diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore descripti applicatum ad radium. Hæc est vis centrifuga, quâ corpus urget circulum; & huic æqualis est vis contraria, quâ circulus continuo repellit corpus centrum versus.

P R O-

aut reflexionum; ita ut si eadem fuerit duorum corporum revolvendum celeritas, vires centrifugæ sint ut numeri impactuum aut reflexionum tempore dato peractarum; nam quod plures sunt tempore dato impactus & reflexiones, eò magis corpus circulum urget, ut à centro recedat & viceversa eò magis ad centrum urgetur per circuli reactionem æqualem & contrariam actioni. Quare si varia fuerit corporum in polygonis revolvendum celeritas æqualis, vires centrifugæ erunt ut velocitates & numeri impactuum seu reflexionum tempore dato peractarum conjunctim. Est autem numerus reflexionum tempore dato ut numerus laterum polygoni eo tempore descriptorum. Porro si eadem supponatur in utroque polygono velocitas, numeri laterum eodem tempore descriptorum erunt reciproci ut latera singula; quo enim majora sunt latera, eo minor eorum numerus dato tempore datæque velocitate percurritur; quare manente eadem

in utroque polygono velocitate, numeri reflexionum sunt inversi ut latera, sive ob polygonorum similitudinem, inversi ut radii circulorum. Si verò ponatur idem circulorum radius, & varia in utroque polygono velocitas uniformis, erunt numeri laterum in utroque polygono dato tempore percursorum, directe ut velocitates æquabiles, seu, ut longitudines dato tempore descriptæ (5). Quare variantibus polygoni velocitate & radio, numerus reflexionum est ut velocitas, seu ut longitudo tempore dato descripta applicata ad radium. Cum igitur supra ostensum sit vim centrifugam in circulo, aut vim centripetam ipsi æqualem & contrariam, esse in ratione composita velocitatis & numeri reflexionum dato tempore peractarum, liquet eandem vim centrifugam esse quoque ut quadratum velocitatis radio divisum, & etiam ut quadratum longitudinis seu arcus dato tempore descripti applicatum ad radium.

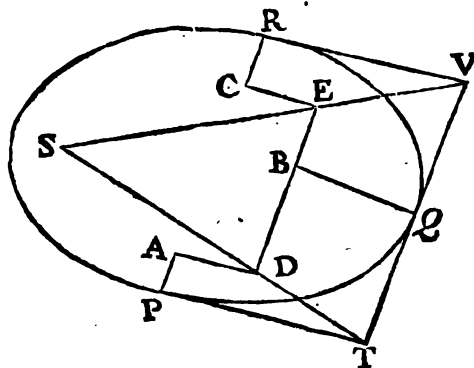
PRINCIPIA MATHEMATICA. 105  
PROPOSITIO V. PROBLEMA I.

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Datâ quibuscunque in locis velocitate, quâ corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus describit, centrum illud invenire.*

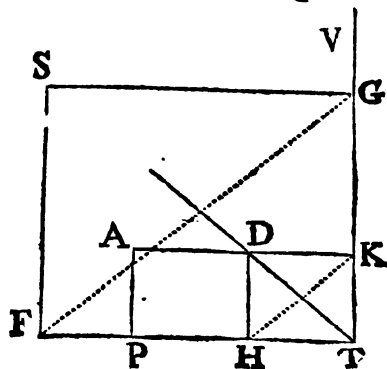
Figuram descriptam tangant rectæ tres  $PT$ ,  $TQV$ ,  $VR$  in punctis totidem  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , concurrentes in  $T$  &  $V$ . Ad tangentes erigantur perpendiculara  $PA$ ,  $QB$ ,  $RC$  velocitatibus corporis in punctis illis  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , à quibus eriguntur, reciproçè proportionalia; id est, ita ut sit  $PA$  ad  $QB$  ut velocitas in  $Q$  ad velocitatem in  $P$ , &  $QB$  ad  $RC$  ut velocitas in  $R$  ad velocitatem in  $Q$ . Per perpendicularorum terminos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ad angulos rectos ducantur  $AD$ ,  $DBE$ ,  $EC$  concurrentes in  $D$  &  $E$ : Et actæ  $TD$ ,  $VE$  concurrent in centro quæsito  $S$ .

Nam perpendiculara à centro  $S$  in tangentes  $PT$ ,  $QT$  demissa (per corol. 1. prop. 1.) sunt reciproçè ut velocitates corporis in punctis  $P$  &  $Q$ ; ideoque per constructionem ut perpendiculara  $AP$ ,  $BQ$  directè, id est ut perpendiculara à puncto  $D$  in tangentes demissa. (\*) Unde facilè colligitur quòd puncta  $S$ ,  $D$ ,  $T$  sunt in unâ rectâ. Et simili argumento puncta  $S$ ,  $E$ ,  $V$  sunt etiam in unâ rectâ; & propterea centrum  $S$  in concursu rectarum  $TD$ ,  $VE$  versatur. *Q. E. D.*



(\*) 206. Puncta  $S$ ,  $D$ ,  $T$ , sunt in unâ rectâ. Demissis enim ex centro  $S$ , in tangentes  $TV$ ,  $TF$ , perpendicularis  $SG$ ,  $SF$ , & ex puncto  $D$ , perpendicularis  $DK$ ,  $DH$ , patet angulos  $FSG$ ,  $HDK$ , lineis parallelis contentos esse æquales & propter laterum  $SF$ ,  $SG$ ,  $DH$ ,  $DK$ , analogiam, triangula  $FGS$ ,  $HKD$ , esse similia, adeoque angulos  $SFG$ ,  $DHK$ , æquari, ac proinde lineas  $FG$ ,  $HK$ , esse parallelas, & triangula  $FTG$ ,  $HTK$ , similia, erit ergò  $TH:TF=HK:FG=DH:SF$ , &  $TK:TG=HK:FG=DK:SG$ . Quare linea  $TD$ , producta transibit per centrum  $S$ .

Tom. I.



O

PRO-

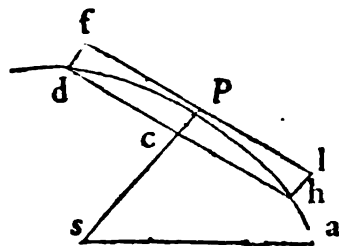
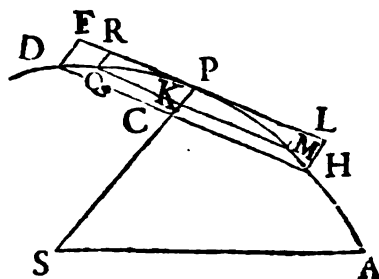
## PROPOSITIO VI. THEOREMA V.

*Si corpus in spatio non resistente circa centrum immobile in orbe quocunque revolvatur, & arcum quemvis jamjam nascentem tempore quam minimo describat, & sagitta arcus duci intelligatur, quæ chordam bisecet, & producta transeat per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcus, ut sagitta directè & tempus bis inversè.*

(<sup>f</sup>) Nam sagitta dato tempore est ut vis (per corol. 4. prop. 1.) & augendo tempus in ratione quâvis, ob auctum arcum in eadem ratione sagitta augetur in ratione illâ duplicatâ (per corol.

rol.

(<sup>f</sup>) 207. Corpora  $P$  &  $p$ , circa virium centra  $S$  &  $s$ , revolvendo, curvas  $APQ$ ,  $apq$ , describant, sintque chordæ minimæ  $DH$ ,  $d h$ , radiis vectoribus  $SP$ ,  $sp$ , bifariam divisæ, & chordis illis evanescentibus, erit  $CH = PH$ , &  $DC = DP$  (per coroll. 1. Lem. VII.) adeoque  $PH = PD$ ; undè puncta  $P$  &  $p$ , sunt in medio arcuum evanescentium  $DPH$ ,  $dph$ , posita. Præterea quoniam punctis  $C$  &  $P$ ,  $c$  &  $p$ , coeuntibus, puncta  $D$  &  $H$ ,  $d$  &  $h$ , simul cum punctis  $P$ ,  $p$ , coincidunt, ultima chordarum evanescentium  $DH$ ,  $d h$ , positio congruit cum tangentium  $FL$ ,  $fl$  positione, ac proinde chordæ evanescentes  $DH$ ,  $d h$ , tangentibus  $FL$ ,  $fl$ , æquidistant, adeoque rectæ  $DF$ ,  $d f$ , radiis  $SP$ ,  $sp$ , parallelæ sagittis  $PC$ ,  $pc$ , evanescentibus æquales sint. His, ad clariorem eorum quæ Newton supponit, intelligentiam positis, demonstrandum est vires centripetas in  $P$  &  $p$ , esse inter se ut sunt sagittæ  $PC$ ,  $pc$ , directè, & inversè ut quadrata temporum quibus describuntur arcus evanescentes  $HPD$ ,  $hpd$ , aut dimidii  $PD$ ,  $pd$ . . . . . Dem. . . . . Si arcus  $PD$ ,  $pd$ , æqualibus temporibus describerentur, sagittæ  $PC$ ,  $pc$ , (per coroll. 1. Prop. 1.) essent ut vires centripetæ in  $P$  &  $p$ . Quod si vires in  $P$  &  $p$ , æquales forent, tempora verò per arcus  $PD$ ,  $pd$ , inæqualia, sint v. gr. sicut  $T$  ad  $t$ , dico sagittas

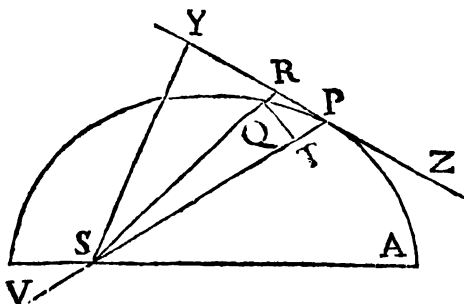


$PC$ ,  $pc$ , fore ut horum temporum quadrata directè; sive ut  $T^2$  ad  $t^2$ . Sit enim arcus  $PQ$ , descriptus eodem tempore  $t$  quo arcus  $pd$ , positis viribus in  $P$  &  $p$ , æqualibus, spatia  $QR$ ,  $fd$ , seu  $PK$ ,  $pc$ , virium illarum actione eodem tempore descripta erunt æqualia; Verùm (per corol.

rol. 2. & 3. lem. xi.) ideoque est ut vis semel & tempus bis. *DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS.*  
Subducatur duplicata ratio temporis utrinque, & fiet vis ut sagitta directè & tempus bis inversè. *Q. E. D.*

(8) Idem facilè demonstratur etià per corol. 4. lem. x.

*Corol. 1.* Si còrpus *P* revolvendo circa centrum *S* describat lineam curvam *APQ*; tangat verò recta *ZPR* curvam illam in puncto quovis *P*, & ad tangentem ab alio quovis curvæ puncto *Q* agatur *QR* distantia *SP* parallela, ac demittatur *QT* perpendicularis ad distantiam illam *SP*: vis centripeta erit reciprocè ut solidum *SP quad. × QT quad.*



$\frac{QR}{SP^2}$ ; si modo solidi illius ea semper fumatur quantitas, quæ ultimo fit, ubi coeunt puncta *P* & *Q*. <sup>(h)</sup> Nam *QR* æqualis est sagittæ dupli arcus *QP*, in cuius medio est *P*, & duplum trianguli *SQP* sive *SP × QT*, tempori, quo arcus iste duplus describitur, proportionale est; ideoque pro temporis exponente scribi potest. *Co-*

II. & III. Lem. xi.)  $PD^2 : PQ^2 = DF : QR$  sive  $fd$ , & ob motum per arcus evanescentes uniformem, sunt arcus *PD*, *PQ* ut tempora quibus describuntur, hoc est ut *T* ad *t*, ideoque  $PD^2 : PQ^2 = T^2 : t^2 = DF : QR$  sive  $fd$ , & quia  $DF = PC$  &  $df = pc$  ergo  $T^2 : t^2 = PC : pc$ , itaque si vires in *P* & *p* sint æquales, erunt sagittæ *PC*, *pc*, ut quadrata temporum quibus arcus *PD*, *pd*, describuntur. Quoniam igitur manentibus temporibus sagittæ sunt ut vires, & manentibus viribus, sagittæ sunt ut temporum quadrata, necessum est ut variantibus viribus atque temporibus sagittæ sint ut vires & quadrata temporum conjunctim. Quamobrem si vires in *P* & *p*, dicantur *V*, *v*, erit  $PC : pc = V : v$  &  $T^2 : t^2 = V : v$ , & dividendo antecedentes per  $T^2$ , & consequentes per  $t^2$ , erit  $V : v = \frac{PC}{T^2} : \frac{pc}{t^2}$ . *Q. e. D.*

(8) 208. Idem facilè demonstratur etià per coroll. 1v. Lem. x. quo statuitur vires esse ut spatia, ipso motus initio, descripta directè & quadrata temporum inversè: Cum enim *FD*, *fd*, seu sagittæ *PC*, *pc*, sint spatia ex virium centripetarum actione descripta iisdem temporibus quibus percurruntur arcus evanescentes *PD*, *pd*, patet per suprà dictum coroll. vires centripetas esse inter se in ratione composita ex directâ ratione sagittarum *PC*, *pc*, & reciproca quadratorum temporum quibus describuntur arcus evanescentes *PD*, *pd*, seu *HD*, *hd*.

<sup>(h)</sup> 209. Nam *QR* æqualis est sagittæ dupli arcus *QP*, in cuius medio est *P*, (207), duplum verò trianguli evanescens *SQP*, (quod per Lem. viii., tanquam rectilineum considerari potest) æquale est facto ex perpendiculari *QT*, in basim

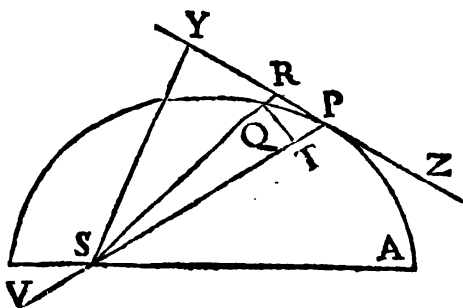


# 108 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Corol. 2.* Eodem argumento vis centripeta est reciproce ut solidum  $\frac{SYq \times QPq}{QR}$ , si modò  $SY$  perpendicularum sit à centro virium in orbis tangentem  $PR$  demissum. (i) Nam rectangula  $SY \times QP$  &  $SP \times QT$  æquantur.

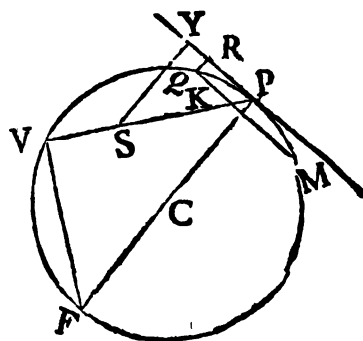
*Corol. 3.* Si orbis vel circulus est, vel circulum concentricè tangit, aut concentricè secat, id est angulum contactus aut sectionis cum circulo quam minimum continet; eandem habens curvaturam eundemque radium curvaturæ ad punctum  $P$ ; & si  $PV$  chorda sit circuli hujus à corpore per centrum virium acta: erit vis centripeta reciproce ut solidum  $SYq \times PV$ . (k) Nam  $PV$  est  $\frac{QPq}{QR}$ .



sim  $SP$ ; cum igitur in eadem curvâ  $APQ$ , arcæ sint proportionales temporibus quibus describuntur, ac proinde rectangulum  $QT \times SP$ , scribi possit loco temporis quo duplus arcus  $QP$ , seu duplum triangulum  $SQP$ , describitur, erit vis centripeta in  $P$ , directe ut  $\frac{QR}{SP^2 \times QT^2}$  & inverse ut  $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ .

(i) 210. Rectangula  $SY \times QP$ , &  $SP \times QT$ , æquantur; nam tangens  $PR$ , cum arcu evanescente  $QP$ , congruit (per Lem. VII) & propterea tangens illa considerari potest tanquam trianguli  $SPQ$ , basis  $PQ$ , producta, &  $SY$ , tanquam perpendicularis ad illam basim productam, quare area dupli trianguli  $SPQ$ , est  $SY \times QP = SP \times QT$ .

(k) 211.  $PV$  est  $\frac{QP^2}{QR}$ . Sit enim circulus osculator  $PQVF$ , & ductâ chordâ  $QM$ , quam alia chorda  $PV$ , per virium



centrum  $S$  acta, bisecat in  $K$ , erit (per prop. 35. lib. 3. Elem.)  $QK^2 = VK \times PK$ ; sed evanescente  $PK$ ,  $VK = VP$ , & (207)  $QR = PK$ , ac (per coroll. 1. Lem. VII)  $QK = QP$ , ergò  $QP^2 = PV \times QR$ , &  $PV = \frac{QP^2}{QR}$ .



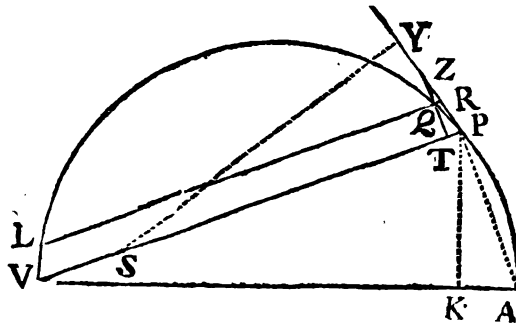


PRINCIPIA MATHEMATICA. III  
PROPOSITIO VII. PROBLEMA II.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Gyretur corpus in circumferentiâ circuli, requiritur lex vis centripe-  
tæ tendentis ad punctum quodcunque datum.*

Esto circuli circumfe-  
rentia  $VQPA$ ; punctum  
datum, ad quod vis ceu  
ad centrum suum tendit,  
 $S$ ; corpus in circumfe-  
rentiâ latum  $P$ ; locus  
proximus, in quem mo-  
vebitur  $Q$ ; & circuli tan-  
gens ad locum priorem



$PRZ$ . Per punctum  $S$  ducatur chorda  $PV$ ; & actâ circuli dia-  
metro  $VA$ , jungatur  $AP$ ; & ad  $SP$  demittatur perpendicu-  
lum  $QT$ , quod productum occurrat tangenti  $PR$  in  $Z$ , ac de-  
nique per punctum  $Q$  agatur  $LR$ , quæ ipsi  $SP$  parallela sit, &  
occurrat tum circulo in  $L$ , tum tangenti  $PZ$  in  $R$ . Et <sup>(1)</sup> ob  
similia triangula  $ZQR$ ,  $ZTP$ ,  $VPA$ ; erit  $RP$  quad. hoc est  
 $QRL$  ad  $QT$  quad. ut  $AV$  quad. ad  $PV$  quad. Ideoque  
 $\frac{QRL \times PV \text{ quad.}}{AV \text{ quad.}}$  æquatur  $QT$  quad. Ducantur hæc æqualia in

$\frac{SP \text{ quad.}}{QR}$ , & punctis  $P$  &  $Q$  coeuntibus scribatur  $PV$  pro  $RL$ .

Sic fiet  $\frac{SP \text{ quad.} \times PV \text{ cub.}}{AV \text{ quad.}}$  æquale  $\frac{SP \text{ quad.} \times QT \text{ quad.}}{QR}$

Ergo (per corol. 1. & 5. prop. vi.) vis centripeta est reciprocè ut  
 $\frac{SP \times PV \text{ cub.}}{AV \text{ quad.}}$ ; id est (ob datum  $AV \text{ quad.}$ ) reciprocè ut

quadratum distantiae seu altitudinis  $SP$  & cubus chordæ  $PV$  con-  
junctim.  $Q. E. I$  Idem

<sup>(1)</sup> 217. Triangula  $ZQR$ ,  $ZTP$ ,  $VAP$ , quorum communis est mensura di-  
midius arcus  $VL$ ,  $QP$ ; quare  $RP:QT$   
similia sunt ob  $QR$ , parallelam  $TP$ ,  
per constructionem, & triangula  $ZTP$ ,  
 $VPA$ , sunt etiam similia ob angulos re-  
ctos  $ZTP$ ,  $VPA$ , & æquales  $VPZ$ ,  
 $= ZP:ZT = AV:PV$ . Est autem  $RP$   
 $= QR \times RL$ , per prop. 36. lib. 3. Elem.  
213.



(<sup>m</sup>) Nam per constructionem hujus propositionis vis prior est ad vim posteriorem ut  $RPq \times PT \text{ cub.}$  ad  $SPq \times PV \text{ cub.}$  id est, ut  $SP \times RPq$  ad  $\frac{SP \text{ cub.} \times PV \text{ cub.}}{PT \text{ cub.}}$ , sive (<sup>n</sup>) ob similitudinem triangula  $PSG, TPV$  ad  $SG \text{ cub.}$

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Corol. 3.* Vis, quâ corpus  $P$  in orbe quocunque circum virium centrum  $S$  revolvitur, est ad vim, quâ corpus idem  $P$  in eodem orbe eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum  $R$  revolvi potest, ut  $SP \times RPq$ , contentum utique sub distantia corporis à primo virium centro  $S$  & quadrato distantiae ejus à secundo virium centro  $R$ , ad cubum rectae  $SG$ , quæ à primo virium centro  $S$  ad orbis tangentem  $PG$  ducitur, & corporis à secundo virium centro distantiae  $RP$  parallela est. (<sup>o</sup>) Nam vires in hoc orbe ad ejus punctum quodvis  $P$  eadem sunt ac in circulo ejusdem curvaturæ.

PRO-

(<sup>m</sup>) 219. Nam per constructionem hujus propof. vis prior est ad vim posteriorem, ( hoc est vis circa  $S$ , ad vim circa  $R$ ) ut  $RP^2 \times PT$  ad  $SP^2 \times PV$ . Scilicet in demonstratione hujus propositionis ( vid.

*fig. Prop.* ( inventum erat  $\frac{QRL \times PV}{AV}$  )

$= QT^2$ , & punctis  $P$  &  $Q$  coëstantibus scribatur  $PV$  pro  $RL$ , & uterque terminus multiplicetur per  $SP^2 \times AV$  erit  $QR \times PV : SP^2 = QT^2 \times SP^2 : AV^2$ , est verò  $QT \times SP$  area cujus arcus est  $QP$ , &  $QR$ , est ejus sagitta, itaque sagitta per cubum chordæ, & quadratum distantiae multiplicata, æqualis est quadrato areæ cui respondet, multiplicato per quadratum Diametri. Quod utique verum erit siue agatur de vi ad  $S$ , siue de vi ad  $R$  tendente (vid. *fig. Cor.*) Quod si sumi intelligantur arcus æquali tempore descripti circa utramque vim, sagittæ eorum arcuum expriment rationem earum virium centripetarum; & areæ illis temporibus æqualibus circa utramque vim descriptæ æquales erunt, nam per *Prop. 1.* tempus Periodicum est ad integram superficiem descriptam, ut tempus quodvis ad aream ipsi respondentem, ut ergo eodem tempore Periodico idem circulus circa utramque vim absolvitur, quæriturque area eidem tempori correspondens, illa area eadem

Tom. I.

erit utriusque vis respectu, ideoque productum quadrati areæ per quadratum Diametri idem erit tam respectu vis  $S$ , quam respectu vis  $R$ , ergo sagitta pertinet ad vim  $S$  multiplicata per cubum ejus chordæ  $PV$ , & quadratum ejus distantiae  $SP$  æqualis erit sagittæ pertinenti ad vim  $R$ , multiplicatæ per cubum ejus chordæ  $PT$  & per quadratum ejus distantiae  $RP$ , ea enim facta, quadrato areæ in quadratum Diametri ducto æqualia sunt, ideo Sagittæ illæ, siue vires in  $S$  &  $R$  erunt reciproce ut illæ quantitates quæ eas multiplicant, hoc est Sagitta in  $S$  est ad Sagittam in  $R$  sicut  $RP^2 \times PT$  :  $SP^2 \times PV$ . Q. E. D.

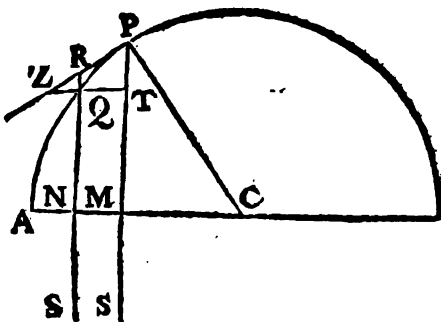
(<sup>n</sup>) 220. Triangula  $PSG, TPV$ , similia sunt, ob angulos  $PSG, SPT$  æquales, quia sunt alterni inter parallelas  $SG, TP$ , & angulos  $VP G, VTP$ , æquales per 32. lib. 3. Elem. unde  $TP : PV = SP : SG = \frac{SP \times PV}{TP} \text{ \& } \frac{SP \times PV}{PT}$

(<sup>o</sup>) 221. Nam vires in hoc orbe ad ejus punctum quodvis  $P$ , eadem sunt ac in circulo orbitam osculante in  $P$ , vis enim illa in  $P$ , est semper eadem ac si corpus in arcu evanescente circuli osculatoris moveretur, cum arcus ille circuli pro arcu orbitæ evanescente usurpari possit.

P

*Moveatur corpus in semicirculo PQA: ad hunc effectum requiritur  
lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum S, ut  
lineæ omnes PS, RS ad id ductæ, pro parallelis haberi possint.*

A femicirculi centro  $C$  agatur femidiameter  $CA$  parallelas istas perpendiculariter secans in  $M$  &  $N$ , & jungatur  $CP$ . Ob ( $P$ ) similia triangula  $CPM$ ,  $PZT$  &  $RZQ$  est  $CPq$  ad  $PMq$  ut  $PRq$  ad  $QTq$ , & ex naturâ circuli  $PRq$  æquale est



rectangulo  $QR \times RN + QN$ , s | s |  
 five coeuntibus punctis  $P$  &  $Q$   
 rectangulo  $QR \times 2 PM$ . Ergo est  $CP q$  ad  $PM quad.$  ut  $QR \times 2 PM$   
 ad  $QT quad.$  ideoque  $\frac{QT quad.}{QR} \text{ æquale } \frac{2 PM cub.}{CP quad.}$ , &  
 $\frac{QT quad. \times SP quad.}{QR} \text{ æquale } \frac{2 PM cub. \times SP quad.}{CP quad.}$  Est ergo  
 (per corollarium 1. & 5. prop. v 1.) vis centripeta reciprocè ut  
 $\frac{2 PM cub. \times SP quad.}{CP quad.}$ , hoc est (neglectâ ratione determinatâ  
 $\frac{2 SP quad.}{CP quad.}$ ) reciprocè ut  $PM cub.$  Q. E. I.

(<sup>9</sup>) Idem facile colligitur etiam ex propositione præcedente.

Sch-

(P) 222. Similia sunt triacula CPM, PZT, anguli enim ad M & T recti æquales sunt, & quoniam anguli ZPT + MPC, & anguli MPC + MCP, recto æquantur; erit etiam MCP = ZPT; & PK = QR x  $\frac{RN + QN}{C}$  (per Prop. 36. lib. 3. Elem.) Cum autem C fit radius circuli & PN sit linea infinita adeoque SM = SP, erunt

$CP, SP, \frac{2SP^2}{CP^2}$ , quantitates constantes;

(9) 223. *Idem facile colligitur ex propositione præcedente quæ constat vim centripetam esse reciprocè ut  $SP^2 \times PV$ . Nam centro virium S in infinitum abundante, omnes SP sunt æquales adeoque constantes, & propterea vis reciprocè ut  $PV$ .*

*Scholium.*

(\*) Et argumento haud multum diffimili corpus invenietur moveri in ellipsi, vel etiam in hyperbolâ vel parabolâ, vi centripetâ, quæ sit reciprocè ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

DE ME-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

(\*) 224. Ut multa de sectionibus Conicis mox erunt dicenda, visum est eas præmittere ex Conicis propositiones quæ sæpius occurrent, ne memorizæ vitio aut fastidio ad alios Autores recurrendi demonstrationem vis Lectores fugiat.

Def. 1<sup>a</sup>. Si Planum quodpiam secet conum, sed per ejus Verticem non transeat, intersectio Coni & istius Plani dicitur *Sectio Conica*.

2<sup>a</sup>. Si ducatur planum per Verticem Coni, parallelum plano secanti, conum ipsum vel secabit, vel tanget, vel totum erit extra eum; Hinc distinguuntur sectionum Conicarum species, dicuntur primo casu *Hyperbola*, 2<sup>o</sup>. *Parabola*, 3<sup>o</sup>. *Ellipses*.

3<sup>a</sup>. Si sint duo Coni similes sibi per Verticem oppositi, illud planum verticale quod unum è Conis secat, alterum etiam secabit, ideo, planum sectionis ipsi Parallelum utrumque etiam Conum secabit, & ex utriusque Coni sectione formabuntur in eo Plano duæ *Hyperbolæ oppositæ*.

4<sup>a</sup>. Si secundum lineas rectas in quibus planum per Verticem Coni ductum secat Coni superficiem, applicentur duo plana Conum tangentia; eorum cum plano Hyperbolarum intersectiones, dicuntur Hyperbolarum *Asymptoti*; nam ut ea plana superficiem Coni jam tetigerunt, nullibi eam superficiem iterum attingent, non ergo attingent Hyperbolam quæ terminatur in superficie Coni & quæ est in plano lineis quas tangunt parallelo.

*Lemma I.* Sit linea ab unâ Asymptoto ad alteram ducta, quæ per Hyperbolam secetur, partes ejus lineæ inter Hyperbolam & Asymptotum utrinque contentæ sunt æquales.

Et si lineæ, inter se Parallelæ, ab unâ Asymptoto ad alteram ducantur, æqualia erunt facta partium utriusque Parallelæ per Hyperbolam sectæ.

Si verò lineæ ab unâ Hyperbolâ ad oppositam ductæ per Asymptotos secetur, partes

ejus lineæ inter Hyperbolam & Asymptotum utrinque contentæ sunt æquales.

Et si lineæ, inter se Parallelæ, ab unâ Hyperbolâ ad oppositam ducantur, æqualia erunt facta partium utriusque Parallelæ per Asymptotum sectæ (*Apoll. lib. 2. Prop. 8. & 16.*)

A

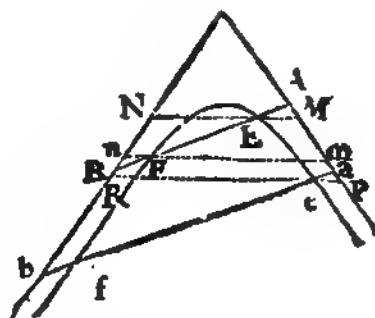
*Demonst.* Primam talis sit linea AB ut planum per eam lineam duci possit basi cono parallelum, cujus sectio cum cono erit circulus CEFD, ducatur planum VCD per verticem Coni VCD plano Hyperbolarum parallelum & secundum lineas VC, VD applicentur plana Conum tangentia, in quibus erunt Hyperbolæ Asymptoti & Tangentes circuli

P 1

C E



DE MO-  
TU COR-  
PORUM  
LIBER  
PRIMUS.

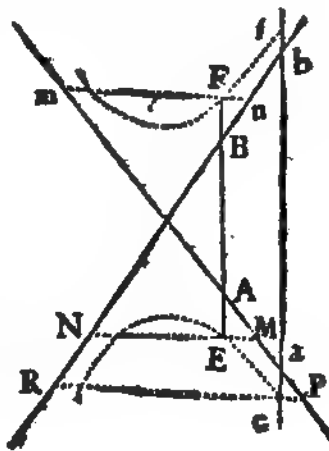


&  $BE : BF = NE : nF$ ; eff.  
ergo per compositionem rationis.  $AE \times$   
 $BE : AF \times BF = EM \times NE : Fm \times nF$ ,  
sed per demonstrationem primi casus est  
 $EM \times NE = Fm \times nF$ , ergo  $AE \times BE$   
 $= AF \times BF$ , unde (per Prop. 16. c. E-  
lem.)  $AF : AE = BE : BF$  & dividen-  
do  $AF - AE$  sive  $EF : AE = BE - BF$   
sive  $EF : BF$ , cum ergo sit  $EF : AE =$   
 $EF : BF$  est  $AE = BF$ .

Ducatur verò linea quævis  $a b$ , priori  $AE$   
parallelæ, & per punctum  $e$  ducatur linea  $PeR$   
lineæ  $ME N$  parallela, similia erunt Trian-  
gula  $AEM$  &  $a e P$ ,  $BEN$  &  $b e R$  ob paral-  
lelas, est ergo  $AE : ae = EM : eP$

&  $BE : be = EN : eR$ , eff.  
ergo per compositionem rationis.  $AE \times$   
 $BE : ae \times be = EM \times EN : EP \times eR$ ,  
sed per casum primum est  $EM \times EN =$   
 $eP \times eR$ , ergo  $AE \times BE = ae \times be$ .

Casus 3us. Si lineæ de quibus agitur,



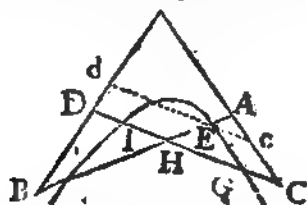
$CEFD$  in punctis  $C$  &  $D$  concurrant illæ  
Tangentes in  $G$ ; ex  $G$  per centrum circuli  
ducatur linea  $GHI$  quæ erit perpendicu-  
laris in chordam  $CD$  eamque bisariam  
secabit, ut etiam ejus Parallelam  $AB$ ,  
& chordam  $EF$  (per 3. 3. Elem.) est. er-  
go  $IA = IB$ , &  $IE = IF$  unde  $IA - IE$   
sive  $AE = IB - IF$  sive  $BF$  & (per 36.  
3. Elem.)  $CA^2 = AF \times AE = AF \times BF$ .

Sit verò linea  $a b$  huic Parallela, sive in  
eadem sive in opposita sectione; simili ra-  
tione ostenderetur esse  $ae = bf$ ; &  $ca^2$   
 $= af \times ae = af \times bf$ . Sed figura  $ACae$  est  
Parallelogramma, est enim tota in plano.  
Tangente Conum, & terminatur per sectio-  
nes planorum Parallelorum, nam  $Cc$  &  $Aa$   
sunt sectiones plani Verticalis & plani Hy-  
perbolarum ipsi Paralleli, &  $CA$  &  $ca$  sunt  
sectiones planorum basi conii Parallelorum;  
est ergo  $CA = ca$  &  $CA^2 = ca^2$ , ac per  
consequens  $AF \times BF = af \times bf$ .

Casus 2us. Quod si linea  $AB$  utcum-  
que sit ducta inter Asymptotas, & Hyper-  
bolam secet in  $E$  &  $F$  erit  $AE = BF$ ; nam  
per  $E$  &  $F$  ducantur lineæ  $ME N$ ,  $mFn$ ,  
tales ut plana per eas ducta sint basi Coni  
parallela. Triangula  $AEM$  &  $AFm$ ,  
 $BFn$  &  $BE n$  erunt similia propter Paral-  
lelas, est ergo  $AE : AF = EM : Fm$

ab una Hyperbolâ ad ejus oppositam ducerentur & per Asymptotas secarentur, eadem prorsus foret demonstratio ac in 1<sup>o</sup> casu, nisi quod in primâ demonstrationis parte, componendo concluderetur, non dividendo.

*Lemma II.* Sint duæ lineæ in Hyperbolarum plano ductæ, quæ in quodam puncto sibi occurrant; facta partium singulæ lineæ sumptarum à puncto concursus usque ad punctum Hyperbolæ, sunt inter se sicut facta partium sumptarum ab Hyperbolâ usque ad utramque Asymptotum.



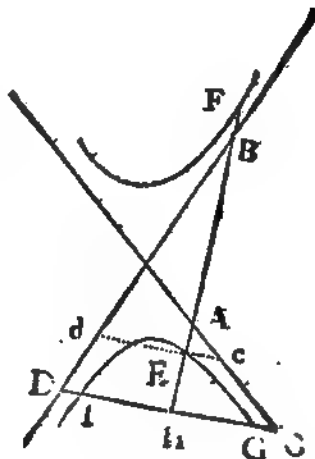
Lineæ A B, D C sibi mutuo occurrant in H, est  $EH \times FH : GH \times IH = AE \times BE : CG \times DG$ .

*Demonstr.* Ducatur per punctum E Hyperbolæ, in quo secatur per lineam A B productam si necesse sit, lineæ c E d, alteri lineæ datæ C H D Parallela; similia erunt Triangula A H C & A E c, B H D & B E d: unde habebuntur hæc proportionēs

AH five AE + EH: AE = HC five CG + GH: c E

& BH five BF + FH: BE = HD five DI + IH: d E, & per compositionem rationis  $AE \times BF + AE \times FH + EH \times BF$  (five AE per Lem. I.) +  $EH \times FH$ :  $AE \times BE = CG \times DI + CG \times IH + GH \times DI$  (five CG per Lem. I.) +  $GH \times IH$ : c E x d E (five CG x DG per Lem. I.) est verò BF + FH + HE = BE, & DI + IH + HG = DG ergo est  $AE \times BE + EH \times FH$ :  $AE \times BE = DG \times CG + GH \times IH$ : CG x DG. & dividendo:  $EH \times FH$ : AE x BE =  $GH \times IH$ : CG x DG ergo alternando EH x FH: GH x IH = AE x BE: CG x DG.

Eadem est demonstratio five lineæ sint in eadem Hyperbolâ, five, una sit in unâ Hyperbolâ altera inter oppositas, five ambæ inter oppositas ducantur. Ergo facta partium &c.



*Lemma III.* Sint duæ Parallele in sectione Conicâ ductæ quæ secantur per lineam quamvis, facta partium uniuscujusque Parallele sumptarum à curvâ ad punctum ejus intersectionis, sunt inter se ut facta partium lineæ secantis sumptarum à curvâ ad punctum intersectionis cum Parallela.

E

17

B' 3

Sine

# 118 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

**DE MÖ-  
TU COR-  
FORUM.  
LIBER  
PRIMUS.**

Sint AB, CD, parallelae sectae per lineam EF in punctis G & H, est  $AG \times GB : CH \times HD = EG \times GF : EH \times HF$ .

Sit V, vertex con, ex eo ducantur VE; VF ad extremitates lineae EF; ducatur in BA, planum VAB, per verticem con, transiens & in CD planum Hyperbolarum ipsi Parallelum, in plano VBA ducatur VG, & in H, HM ipsi VG parallela quae jacebit in plano Hyperbolarum: erunt ergo Triangula VGE & MHE, VGF & IHF similia unde habentur hae proportionibus

$$VG : MH = EG : EH$$

&  $VG : IH = FG : FH$ , & per compositionem rationis

$$VG^2 : MH \times IH = EG \times GF : EH \times FH.$$

Lineae VE, VF ductae per verticem con & punctum in ejus superficie sumptum sunt semper in superficie con, ergo earum intersectiones I & M cum lineae HM in plano Hyperbolarum ducta sunt in ipsa curva Hyperbolica cujus Asymptoti sunt TN, TP parallelae lineis VA, VB; per punctum I in quo linea HM occurrit Hyperbolae ducatur SIR lineis DC & AB parallela, similia erunt Triangula VAG & LRI, VBG & KSI lineis enim parallelis terminantur, erit ergo

$$VG : AG = LI : RI$$

&  $VG : GB = KI : SI$  & per compositionem rationis

$$VG^2 : AG \times GB = LI \times KI : RI \times SI (= PD \times DN \text{ per Lem. I.}) \text{ Sed per Lem. II. est}$$

$$LI \times KI : PD \times DN = MH \times IH : CH \times DH \text{ est ergo}$$

$$VG^2 : AG \times GB = MH \times IH : CH \times DH \text{ & alternando}$$

$$VG^2 : MH \times IH = AG \times GB : CH \times DH.$$

Erat autem  $VG^2 : MH \times IH = EG \times GF : EH \times FH$ , ex prima demonstrationis parte, est ergo  $AG \times GB : CH \times DH = EG \times GF : EH \times FH$ . Q. E. D.

**Caf. 2.** Si punctum F infinite distaret a puncto E, linea FG aequalis censenda foret lineae FH, ideoque  $EG \times FG : EH \times FH = EG : EH = AG \times CB : GH \times DH$ , hoc est ipsae partes secantis forent inter se sicut facta partium parallelarum quas secat.

**Caf. 3:** Si punctum F non foret in eadem sectione in qua est punctum E, sed in opposita, eadem foret demonstratio nisi quod pun-

cta M & I, in eadem Hyperbola forent.

**Caf. 4.** Eadem etiam fiet demonstratio si puncta G & H sint intra extremitates Parallelarum AB, CD, aut intra vertices E & F lineae secantis, siue sint extra.

**Corol. 1.** Sumatur medium lineae secantis puncta E & F sitque c, si intersectio ejus lineae per Parallelam sit intra vertices, erit factum partium ejus aequale quadrato ejus dimidii dempto quadrato ejus portionis a Centro ad intersectionem sumptae, v. gr.

erit  $EG \times GF = c \overline{E^2} - c \overline{G^2}$  ut liquet per

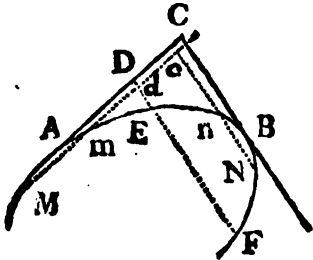
5. 2. **Elem.** Si intersectio ejus lineae sit extra vertices, erit factum ejus partium aequale quadrato portionis ejus a Centro ad intersectionem sumptae dempto quadrato dimidiae lineae, v. gr. foret  $EG \times GF = c \overline{G^2} - c \overline{E^2}$ , ut liquet per 6. 2. **Elem.**

**Corollar. 2.** Ex puncto quovis ductae sint duae Tangentes ad sectionem Conicam, & ex quodam puncto unius ex illis Tangentibus, ducatur linea trans sectionem Conicam alteri Tangenti parallela. Quadratum prioris Tangentis est ad quadratum alterius Tangentis ut quadratum par-

tis

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 119

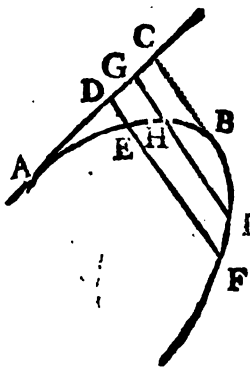
tis in primâ Tangente assumptæ ad factum lineæ Parallelæ alteri tangenti per ejus Partem inter Tangentem & curvam comprehensam (Apol. lib. 3. Prop. 16.)



Sint AC, CB Tangentes sectionis Conicæ ABF, ex D ducatur DEF parallela CB, erit  $\overline{AC}^2 : \overline{CB}^2 = \overline{AD}^2 : \overline{DF} \times \overline{DE}$ .

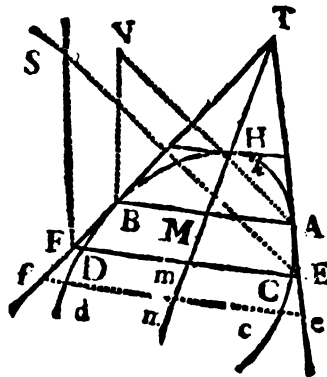
Ducatur Mmc parallela Tangenti AB, & Nnc parallela Tangenti CB, & Mmc lineam DEF secet ind, erit per Lem. sup.  $\overline{cn} \times \overline{cN} : \overline{dF} \times \overline{dE} = \overline{Mc} \times \overline{mc} : \overline{Md} \times \overline{md}$ , est enim Mc linea secans parallelas cN, dF; evanescant arcus Mm, & Nn, coincident lineæ Mmc cum AC & Nnc cum BC, eritque  $\overline{cn} = \overline{cN} = \overline{CB}$ ,  $\overline{dF} = \overline{DF}$ ,  $\overline{dE} = \overline{DE}$ ,  $\overline{Mc} = \overline{mc} = \overline{AC}$ ,  $\overline{Md} = \overline{md} = \overline{AD}$ , ergo erit  $\overline{CB}^2 : \overline{DF} \times \overline{DE} = \overline{AC}^2 : \overline{AD}^2$  & permutando & alternando  $\overline{AC}^2 : \overline{CB}^2 = \overline{AD}^2 : \overline{DF} \times \overline{DE}$ . Q. D. E.

Coroll. 3. Si ex variis punctis Tangentis ducantur lineæ Parallelæ trans sectionem Conicam, Quadrata partium Tangentis sunt inter se ut facta Parallelarum per earum partem in cr Tangentem & curvam interce tam. Sit



AC Tangens ex ejus punctis D & G ducantur Parallelæ DEF, GHI, erit  $\overline{AD}^2 : \overline{AG}^2 = \overline{DF} \times \overline{DE} : \overline{GI} \times \overline{GH}$ ,

nam supponatur in B ea Tangens quæ his DE Mo- lineis sit Parallela secetque priorem in C TU COR- erit per Corollarium superius  $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 : \overline{DF} \times \overline{DE} = \overline{AG}^2 : \overline{GI} \times \overline{GH}$  LIBER ergo alternando,  $\overline{AD}^2 : \overline{AG}^2 = \overline{DF} \times \overline{DE} : \overline{GI} \times \overline{GH}$ . Q. D. E.



Lemma IV. Dicatur sectionis Conicæ Diameter ea linea quæ Parallelas in curva terminatas bifariam dividit: sit ejus Diametri vertex punctum in quo curvæ occurrat; illæ Parallelæ, quas bisecat, ipsi ordinatim applicatæ dicantur, & earum alterutra pars dicatur ordinata illius Diametri; portio Diametri ab ejus vertice ad Ordinatam usque, dicatur ejus abscissa: & denique ea Diameter quæ Parallelas bisecando simul est illis perpendicularis, dicatur Axis.

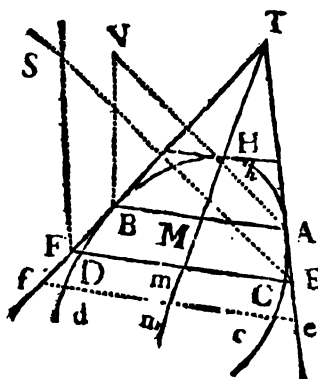
His positis 1°. Linea quæ duas Parallelas bisecabit erit Diameter curvæ: id est cæteras omnes lineas hisce Parallelas etiam bisecabit. (Apol. lib. 2. Prop. 28.)

2°. Linea in Vertice Diametri ducta & Ordinatis Parallela, erit Tangens curvæ in eo Vertice (Apol. Lib. 1. Prop. 17.) & vice versâ ea linea erit Diameter quæ bisecabit lineam quæ erit Parallela Tangenti per ejus verticem ductæ: (Apol. Lib. 2. Prop. 7.)

Denique; Quadrata ordinarum erunt inter se ut facta partium quas secant in Diametro.

Demonst. In extremitatibus lineæ AB ducantur Tangentes quæ concurrant in T, per

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.



per medium M, lineæ AB ducatur TM, sique lineæ DC parallela lineæ BA hinc inde producta donec Tangentibus TB, TA productis si necesse sit in E & F occurrat: Per AB & Verticem conï V ducatur planum VAB, & per EF planum ipsi Parallelum quod Hyperbolam in Cono formabit, erit ergo DC lineæ ad Hyperbolam pertinens, & propter Tangentes BFAE, puncta F & E ad Asymptotos pertinebunt, ergo (per Lem. I.) est EC = FD, sed ob parallelas AB, EF & quia bifariam dividitur AB in M per lineam TM erit ME = MF, itaque ME - EC (five mC) = MF - FD (five mD) ergo lineæ TM, lineam CD lineæ AB parallelam bifariam dividit, idem verò de quavis lineæ cd parallelâ lineæ AB demonstrabitur ergo lineæ MM per medium linearum AB, CD, transiens omnes earum Parallelas in curva terminatas bifariam dividit. Est ergo Diameter curvæ.

1. Linea per Verticem Diametri H ducta, & ordinatis Parallela est tangens curvæ, pone enim illam lineam sectioni iterum occurrere in h, lineæ TM quæ dividit bifariam omnes Parallelas lineæ AB in curva terminatas, deberet bifariam dividere lineam Hh, sed illud absurdum, siquidem illam attingit in ejus extremo H, ergo lineæ per verticem Diametri ducta ordinatis parallela curvam iterum non attingit, est ergo Tangens in puncto H. Vice versâ sit Tangens lineæ AB parallela, & ex medio M lineæ AB per H punctum contactus ducatur lineæ, ea erit Diameter; si enim Dia-

meter quæ tranfit per M ad h non verò ad H pertingeret, ducatur per h lineæ Parallela lineæ AB, ea erit Tangens in h; eritque Parallela Tangenti in H, sed illud est absurdum, ergo lineæ MH est Diameter.

Denique cum Diameter secet Parallelas sunt (juxta Lem. III.) facta partium Parallelarum, ut facta partium quas secant in Diametro, sed partes singulæ Parallelæ à Diametro sectæ sunt utrinque æquales & ordinatæ dicuntur, ergo quadrata Ordinatarum sunt ut facta partium quas secant in Diametro.

Lemma V. E quovis puncto Sectionis Conicæ ducatur ordinata ad Diametrum, & Tangens quæ illi Diametro occurrat in quodam puncto: distantie hujus puncti ab utroque vertice Diametri erunt inter se sicut abscissæ ab utroque vertice Diametri sumptæ (Apollon. l. 1. prop. 34.)

E puncto P curvæ ducatur ordinata PO ad Diametrum AD, & in eâ sumatur punctum M tale ut sit AM : DM = AO : DO, ducaturque lineæ PM, illa in nullo alio puncto F curvæ occurreret, hoc est, erit Tangens in P.

Demonst. ... Ex eo puncto supposito F ducatur ordinata FH, erit MO : MH = PO : PH & MO : MH = PO : FH, sed si F pertineat ad curvam est (per Lem. IV.) AO × OD : AH × HD = PO : FH, ergo AO × OD : AH × HD = MO : MH, & alternando AO × OD : MO = AH × HD : MH. Ducantur autem per A & D lineæ AXDK parallelæ PM quæ secant PO ejusque productionem in E & K, & per P & H ducatur lineæ quæ parallelas AX & DK in I & S, secet, similia erunt Triangula AOE, MOP, DOK ob parallelas, unde habentur hæ proportionnes AO : MO = AE : MP.

& OD : MO = DK : MP & per compositionem rationis erit

$$AO \times OD : MO^2 = AE \times DK : MP^2.$$

Pariter similia sunt Triangula AHI, MHP, DHS, unde est: AH : MH = AI : MP

$$\text{ \& DH : MH = DS : MP.}$$

& per compositionem rationis erit

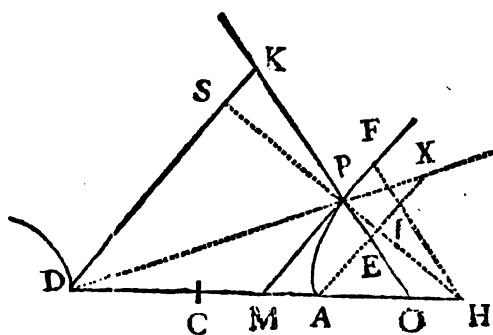
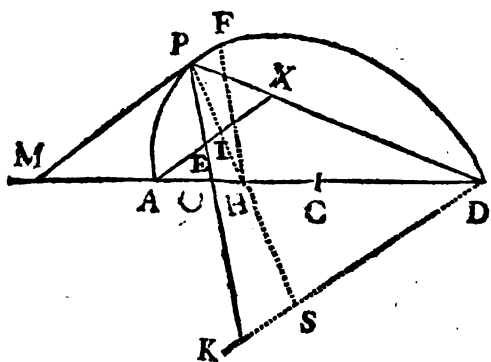
$$AH \times DH : MH^2 = AI \times DS : MP^2.$$

Sed si F pertinet ad curvam invenitur

$$AO \times OD : MO^2 = AH \times DH : MH^2, \text{ foret}$$

$$\text{ergo AE} \times \text{DK} : \text{MP}^2 = \text{AI} \times \text{DS} : \text{MP}^2.$$

five



five  $AE \times DK = AI \times DS$  &  $AE : AI = DS : DK$ , quod absurdum esse in datâ Hypothesi sic evincitur.

Ex P ad Diametri extremitatem D, ducatur PD, quæ lineam AEI (producta si necesse sit) secet in X; ob parallelas PM, XA est  $AM : DM = PX : DP$  &  $PX : DP = XE : DK$ , & ob Triangula similia AOE, DOK est  $AO : DO = AE : DK$ , & quia per Hypothesim est  $AM : DM = AO : DO$ , erit  $XE : DK = AE : DK$  ideoque in datâ Hypothesi  $XE = AE$  & cum sit  $XI : XE = DS : DK$  ob parallelas, erit  $XI : AE = DS : DK$  erat verò ex suppositione quod F est in curva,  $AE : AI = DS : DK$ , foret ergo  $XI : AE = AE : AI$ , &  $AE^2 = XI \times AI$ . Sed  $AE^2$  quadratum dimidii lineæ AX est

Tom. I.

semper majus Rectangulo ejus partium XI DE MO:  $\times AI$  (per 5. 2. Elem.), absurdum ergo est ea esse æqualia, quod tamen sequitur supposito punctum F ad curvam pertinere, ideoque, MP curvam tangit in P. Sed ad idem cujusvis curvæ punctum duas Tangentes rectas duci non posse ex naturâ curvarum liquet, ergo Tangentes in P, ita occurrit Diametro ut sit

$AM : DM = AO : DO$ . Q. E. D.

Cor. 1. Si Diameter AD sit infinita; hoc est punctum D ad infinitum removeatur, DM & DO æqualia censenda sunt, cum ergo sit  $DM : AM = DO : AO$  erit  $AM = AO$ ; sive distantia puncti concursus Tangentis cum Diametro, ab ejus vertice, æqualis erit abscissæ ab eodem vertice sumptæ (Ap. lib. 1. 35.)

Cor. 2. Si Diameter AP sit terminata, ejusque medium sit C sitque PO ordinata fiatque CM,  $CA = CA : CO$ , erit PM tangens in puncto O; Etenim sumendo summam & differentiam terminorum harum rationum est,

$$CM + CA : CA + CO = CM - CA : CA - CO$$

five in primâ ratione ponendo DC pro CA, est  $DM : DO = AM : AO$  aut alternando  $DM : AM = DO : AO$ , ergo (per Lemma) MP erit Tangens in P, est ergo semidiameter media proportionalis inter abscissam à centro sumptam, & partem Diametri à centro ad concursum Tangentis comprehensam. (Apol. Lib. 1. 37.)

Cor. 3. In Puncto P Sectionis Conicæ ducatur Tangens, quæ secet Diametrum in M, & ducatur ordinata PO quæ secet Diametrum in O factum partium Diametri  $AO \times DO$  est æquale facto  $CO \times OM$  ex partibus lineæ à Centro ad Tangentem sumptæ & per ordinatam in O sectæ. Cum enim sit  $CM : CA = CA : CO$  tollendo terminos secundæ rationis à terminis primæ erit  $MA : AO = CA : CO$  [five DC] : CO, unde componendo erit  $MO : AO = DO : CO$ , ideoque  $AO \times DO = CO \times MO$  : & (per 5. vel 6. 2. Elem.) prout O est inter A & D vel ultra, erit  $CO \times MO = AC^2 - CO^2$  vel  $CO^2 - AC^2$ , unde deducitur  $MO = \frac{AC^2 - CO^2}{CO}$  vel  $\frac{CO^2 - AC^2}{CO}$ .

Q

De

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

De Hyperbolâ.

*Theor. I.* Lineæ omnes ab Interfectione Asymptotorum in eorum Angulo ductæ & utrinque productæ, sunt Hyperbolæ utriusque Diametri, & earum portio inter utramque Hyperbolam comprehensa, dicitur Diameter transversa, & bisariam dividitur in Interfectione Asymptotorum quæ idem centrum Hyperbolarum vocatur. Tangente verò in utroque vertice ejusdem Diametri ductæ & inter Asymptotos comprehensæ sunt inter se Parallelæ & æquales, & bisariam dividuntur ab ea Diametro dicunturque ejus Diametri conjugatæ. (*Apol. lib. I. Prop. 30. lib. 2. Prop. 3. & 19.*)

*Demonst.* Ductâ enim quomodocumque lineâ SCT in Angulo Asymptotorum ZCY per earum interfectionem C, si crura CZ & CY sumantur reciprocè proportionalia sinibus Angulorum adjacentium, ducaturque lineâ ZY illa per lineam SCT bisariam dividetur; nam in Triangulo CZY est  $CZ:CY = \sin. Y:\sin. Z = \sin. YCo:\sin. ZCo$  (per const.) & alternando,  $\sin. Y:\sin. YCo = \sin. Z:\sin. ZCo$ . Sed in Triangulo CoY est

$\sin. Y:\sin. YCo = Co:Yo$ ,  
& in Triangulo CMZ est

$\sin. Z:\sin. ZCo = Co:Zo$ ,  
ergo cum duæ priores rationes sint æquales, est  $Co:Yo = Co:Zo$ , ideoque  $Yo = Zo$ .

Omnis autem lineâ HN lineæ ZY parallela similiter bisariam dividetur in O per lineam ST, partes autem ejus inter Hyperbolam & Asymptotum utrinque contentæ sunt æquales, per Lem. I. cum ergo sit semper  $HO = ON$ , &  $HP = GN$  est  $HO - HP = NO - NG$  sive  $OF = OG$ . Ergo lineâ ST, lineas omnes lineæ ZY parallelas, in Hyperbola contentas bisariam secat, est ergo ejus Diameter per Lemma V.

Sint verò A & D puncta in quibus lineâ ST occurrit Hyperbolis, per ea ducantur EAK, FDR parallelæ lineæ ZY inter Asymptotos contentæ, ergo bisecantur in A & D, cum verò sint parallelæ ordinatis Diametro ST sunt Tangentes in verticibus A & D (per Lemma IV.) & inter se Parallelæ.

Dico præterea eas esse æquales, ducantur enim Parallelæ ipsis proximæ b i K, q r: erit  $q \times qr = b i \times Ki$  (per Lem. I.) accedentibusque ordinatis ad Tangen-

tes fit tandem  $fq = FD$ ,  $qr = RD$ ; b i = BA, & K i = KA est ergo  $FD \times RD = BA \times KA$ , sed est  $FD = DR$  &  $BA = KA$  ergo  $FD^2 = BA^2$  &  $FD = BA = KA$ . Unde tandem cum Triangula CAK & CDF sint similia, & sit CA: CD = KA: FD est etiam CA = CD.

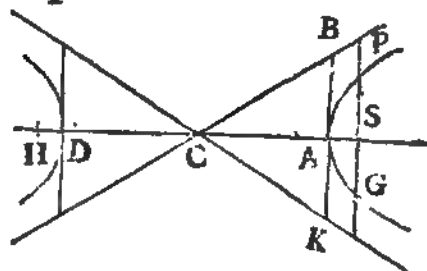
*Theor. II.* Tertia proportionalis Diametro transversæ & Diametro conjugatæ dicatur Latus Rectum; Est Diameter transversa ad Latus Rectum ut factum Abscissarum ab utroque vertice sumptarum, ad quadratum Ordinatæ; Hinc ista curva *transversa* sive excedens dicitur, quia quadratum ordinatæ majus est facto lateris Recti per abscissam à proximo vertice (*Apol. lib. I. Prop. 21.* Coincidit verò hæc propositio cum ista, est quadratum Diametri Transversæ ad quad. Diametri conjugatæ ut factum abscissarum ad quadratum ordinatæ.

*Demonst.* Sit ut prius Diameter transversa DAT, conjugata BAK & ordinata inter Asymptotos contenta HPOGN: sunt (per Lem. II.) facta partium sumptarum in lineis DO, HN à puncto Hyperbolæ ad utramque Asymptotum, sicut facta partium earundem linearum à puncto concursus O, usque ad Hyperbolam sumptarum; hoc est  $AC \times AC:GN \times GH = AO \times DO:PO \times GO$ . Sed  $GN \times GH$  æqualis est quadrato semitangentis BA, sive semidiametri conjugatæ; nam (per Lem. I.) est  $GN \times GH = b i \times Ki$  (& per præced. dem. b i  $\times Ki = BA^2$ ) & est  $PO = GO$  ideo pro-





DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.



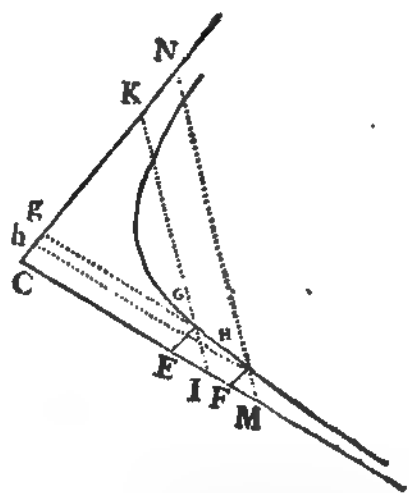
terminos  $2AC : 2AB = 2AB : 2PS$  five  
P G. Sed est per naturam lateris recti  
 $2AC : 2AB = 2AB : L$ , ergo  $L = PG$  :  
&  $\frac{1}{2} L = PS$ , sed cum per Theor. II.  
fit  $PO^2 = \frac{DO}{AB} \times L \times AO$  erit ergo

$PS = \text{five } \frac{1}{4} L = \frac{DS}{AB} \times L \times AS$  &  $\frac{1}{4} L =$   
 $\frac{DS}{AB} \times AS$ , ut itaque DS est major AB,  
erit  $\frac{1}{4} L$ , major AS.



Denique. Ducantur à focus lineæ HP, SP, linea PM bisariam dividat angulum P, dico eam esse Tangentem Hyperbolæ in P; hoc est illam non occurrere Hyperbolæ in alio quovis puncto p; ex HP tollatur HI = DA, erit PI = PS (per hoc Theor.) & ducta IS erit PM perpendicularis in medium N lineæ IS, ex alio quovis puncto p ducantur rectæ p I p S erunt inter se æquales, ob æqualia Triangula p N I, p N S (per 4. 1. Elem.) sed si p esset in Hyperbolæ, esset H p = HI + p S five quia p I = p S esset H p = HI + I p, quod absurdum (per 20. 1. Elem.)

Theor. IV. Si sumantur pro abscissis portiones quævis Asymptoti ab Hyperbo-



læ centro, & Ordinatz sint Parallelæ alteri Asymptoto, Ordinatz erunt suis Abscissis reciprocè proportionales; Et area inter Asymptotum, Hyperbolam, ordinatam Vertici axis occurrentem & ordinatam quamvis comprehensa erit abscissæ hujus ordinatz Logarithmus.

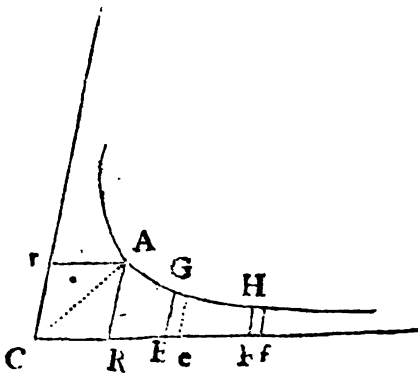
Demonst. Sit C centrum Hyperbolæ, CE CF abscissæ, EG FH ordinatz Asymptoto CN parallelæ, dico quod est CE : CF = FH : EG. Ductis enim per G & H lineis Gg, Hh parallelis Asymptoto CF, & IGK, MHN inter se parallelis trans Hyperbolam, erunt similia Triangula IGE & MHF, GKg & HNh propter Parallelas, ideoque est

IG : MH = GE : HF  
& GK : HN = Gg (five CE) : Hh (five FC)

compositis rationibus est  
IG × GK : MH × HN = GE × CE : HF × FC. Sed, (per Lem. I.) est IG × GK = MH × HN, ergo GE × CE = HF × FC est ergo CE : CF = HF : GE,

cum autem Parallelogrammata CG, CH, sint æquiangula & ea lateribus reciprocis contineri sit demonstratum, sunt æqualia.

Dico denique areas Hyperbolæ esse abscissarum Logarithmos; ex centro C ducatur axis CA, & ex vertice A ducantur lineæ AR Ar Asymptotis Parallelæ, ob Angulum C bisariam divitum & parallelas, erit CR = AR sit AR = 1; & fingantur duæ ordinatz quæ ita moveantur ut abscissæ unius sint sem-



semper potentia eadem n alterius; coincident quidem in R, nam quævis potentia unitatis est semper 1, sed procedendo sit  $CE = x$  debet esse  $CF = x^n$ , erunt ergo  $GE \frac{1}{x}$  &  $HF \frac{1}{x^n}$  est enim

$$CE : CR = AR : GE \text{ five } x : 1 = 1 : \frac{1}{x}$$

$$\& CF : CR = AR : FH \text{ five } x^n : 1 = 1 : \frac{1}{x^n}$$

fluxio autem lineæ CE erit  $dx = Ee$ , & lineæ CF erit  $dx = Ff$ , ideo areæ R G fluxio erit  $dx \times \frac{1}{x} = \frac{dx}{x}$  & areæ

$$RH, n x^n \text{ --- } dx \times \frac{1}{x^n} = \frac{ndx}{x} \text{ sed } \frac{dx}{x} = \frac{ndx}{x} = 1 : n, \text{ sunt ergo fluxiones earum arearum in Ratione constanti } 1 \text{ ad } n,$$

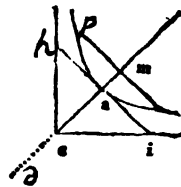
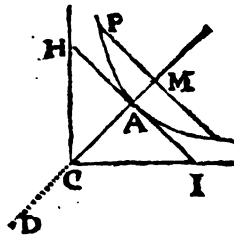
ideoque & areæ integræ R G, R H quæ sunt earum summæ, sunt in eadem ratione 1 ad n, sunt autem 1 & n Exponentes potentiârum abscissarum CE, CF; sunt ergo areæ sicut illi exponentes, sed Logarithmi sunt semper ut Exponentes potentiârum quantitatum quarum sunt Logarithmi, ergo illæ areæ R G, R H, sunt Logarithmi abscissarum CE, CF.

In puncto R ubi abscissa est unitas, area est 0, ut Logarithmis convenit, sitque negativa retrocedendo ab R versus C, simulque cum sint abscissæ minores unitate CR fiunt fractiones.

Theor. V. Si Angulus Asymptotorum sit Rectus, Hyperbola dicitur æquilatera, æqua-

lesque sunt Axes conjugati, ideoque latus Rectum Axis transversæ est æquale : ac (per Theor. II.) facta abscissarum quadrato ordinatarum æqualia sunt, sicut in circulo : Diversæ Hyperbolæ eodem Asymptotorum angulo descriptæ sunt similes : Si verò idem sit Hyperbolæ axis, sed diversus Angulus, erunt ordinatæ ad idem axeos punctum sicut Radices quadratæ Laterum Rectorum Principalium, & in eâ erunt ratione portiones earum Hyperbolarum per Ordinatas terminatarum quarum æquales sunt abscissæ.

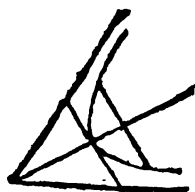
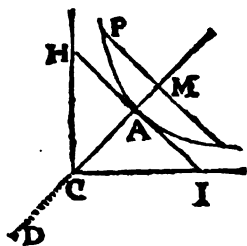
Demonst. Axis transversus est perpendicularis conjugato, dividitque bifariam angulum Asymptotorum; si ergo is angulus sit 90°. ejusque dimidium 45°. Triangulum CAH erit Isosceles & CA = AH, cætera ex his, facillè deducuntur.



Si in duabus Hyperbolis anguli Asymptotorum sunt æquales, ut bifariam dividuntur per axem, similia erunt Triangula CAH, ca h: ideoque  $CA^2 : AH^2 = Ca^2 : ah^2$  sumantur abscissæ AM, am in ratione AD ad a d erit etiam DM: dm in eadem ratione cum sit ergo  $AM : am = AD : ad$

&  $DM : dm = AD : ad$ .  
est  $AM \times DM : am \times dm = AD^2 : ad^2$   
sed est  $CA^2 : AH^2 = Ca^2 : ah^2 = AM \times DM : MP^2 = am \times dm : mp^2$ , & altern.  
 $AM \times DM : am \times dm = MP^2 : mp^2$   
est ergo  $AD^2 : ad^2 = MP^2 : mp^2$  unde est  $MP : mp = AD : ad$ , omnes ergo ordinatæ ac omnia puncta Hyperbolæ determinantur per rationem AD ad ad.

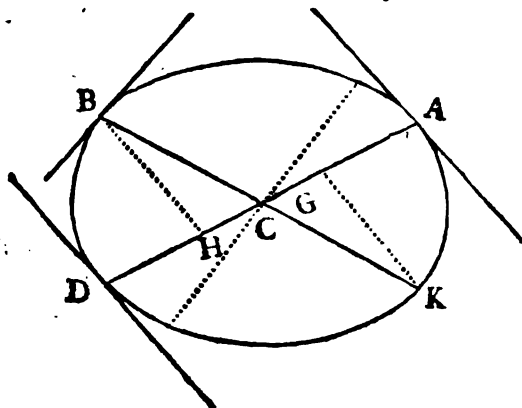
DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.



Sint denique in duabus Hyperbolis æqua-  
les axes transversi, sed diversi Asymptoto-  
rum Anguli; diversa erunt Latera Recta,  
sumantur ergo æquales abscissæ, & quoniam  
Axis est ad latus Rectum sicut factum par-  
tium abscissæ ad quadratum ordinatæ, Axis  
verò & factum partium abscissæ æqualia  
sunt utrinque, eadem erit utrinque ratio La-  
teris recti principalis ad quadratum ordi-  
natæ, erunt ergo ordinatæ quæ ad æqua-  
les abscissas pertinebunt, ut Radices qua-  
dratæ Laterum rectorum principalium, quæ  
ratio est constans, sit ergo utraque abs-  
cissa in portiones infinitè parvas & utrin-  
que æquales divisa singula Parallelogramma-  
ta quam minima super æquales abscissæ por-  
tiones formata erunt in eadem ratione ac  
ordinatæ, ergo areæ Hyperbolarum, quæ  
sunt eorum Parallelogrammorum summæ, in  
eadem erunt ratione, nempe ut Radices  
quadratæ laterum Principalium.

De Ellipsi.

*Theor. I.* Omnes Ellipsis Diametri sese  
bifariam secant in eodem puncto quod dicitur  
centrum Ellipsis, eaque Diametri ordi-  
nata quæ per centrum transit est ipsa Diami-  
ter, quæ respectu Diametri, cuius est ordina-  
ta, conjugata dicitur: (*Apol. I. 1. Prop. 30.*)



*Demonst.* Si per medium C, Diametri El-  
lipsis AD, ducatur linea quævis BK, & per  
puncta B & K ducantur BH, KG ordinatæ  
Diametro AB, erit per *Lemma V.*

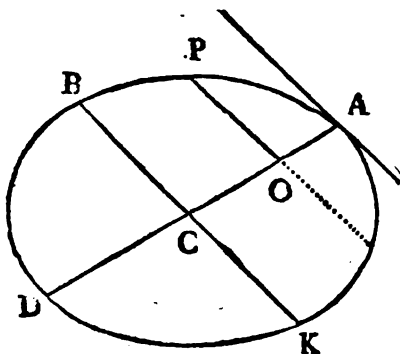
$AG \times GD : AH \times HD = GK^2 : BH^2$  & prop-  
ter Triangula similia GKC, CBH est  
 $GK : BH = CG : CH = BC : CK$ , est ergo  
 $AG \times GD : AH \times HD = CG^2 : CH^2$ , est autem  
(per 5. 2. Elem.)  $AG \times GB = AC^2 - CG^2$   
&  $AH \times HB = AC^2 - CH^2$ , est ergo

$AC^2 - CG^2 : AC^2 - CH^2 = CG^2 : CH^2$ .  
& jungendo terminos secundæ rationis ter-  
minis prioris, est  $AC^2 : AC^2 - CG^2 : CH^2$ ,  
ideo  $CG = CH$ , ac per consequens  $EC = CK$ .  
Omnes ergo lineæ per punctum C transeun-  
tes illic bifariam secantur. Sunt autem sin-  
gulæ Diametri Ellipsis, nam in vertice B du-  
catur Tangens, & per Centrum C linea  
illi parallela, ea dividetur bifariam, cum  
itaque BK bisecet lineam Parallelam Tan-  
genti per ejus verticem ductæ, est Diami-  
ter, per *Lemma V.*

Denique solæ lineæ per Centrum tran-  
sunt

euntes sunt Diametri; fingatur enim Diameter per centrum non transiens, ducatur Tangens in ejus Vertice, & illi Tangenti ducatur Parallela per Centrum C, bifariam dividetur in centro, ergo bifariam non dividetur à Diametro supposita quæ per centrum non transit, ergo male supponitur eam esse Diametrum: Omnes ergo Diametri Ellipsis per centrum transeunt, illicque bifecantur.

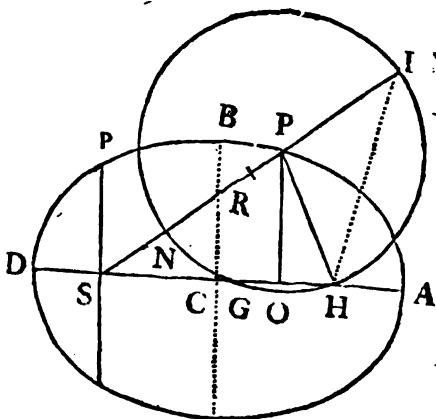
*Theor. II.* Tertia proportionalis Diameter transversæ ejusque conjugatæ dicatur Latus Rectum, erit Diameter transversa ad Latus Rectum, vel quod idem est quadratum diametri transversæ ad quadratum ejus conjugatæ, ut factum abscissarum sumptarum ab utroque Vertice Diametri ad quadratum ordinatæ, inde quadratum Ordinatæ semper minus deprehenditur facto Lateris recti per utramlibet abscissam, undè hæc curva dicitur Ellipsis; ( *Apoll. lib. I. Prop. 21.* )



*Demonst.* Sit Ellipsis Diameter ACD, ejus conjugata BCK est per Lemma IV,  $AC \times CD$  sive  $AC^2 : AO \times DO = BC^2 : PO^2$  & alternando  $AC^2 : BC^2 = AO \times DO : PO^2$ , sed est  $2AC : 2CB = 2CB : L$ , ergo  $4AC^2 : 4CB^2 = AC^2 : CB^2 = 2AC$ ,  $L = AO \times DO : PO^2$ , ergo est  $PO^2 = \frac{L \times AO \times DO}{2AC} = \frac{DO}{2AC} \times L \times AO$  sed ut  $4DO$  est semper minus quam  $2AC$ , est  $PO^2$  semper minus facto Lateris recti per alterutram abscissam.

*Theor. III.* Sit AD axis major, à centro feratur utrinque CH, CS, æquales & tales ut quadratum  $CH^2$  sive  $CS^2$  cum quadrato semiaxis conjugati  $CB^2$  sit æquale qua-

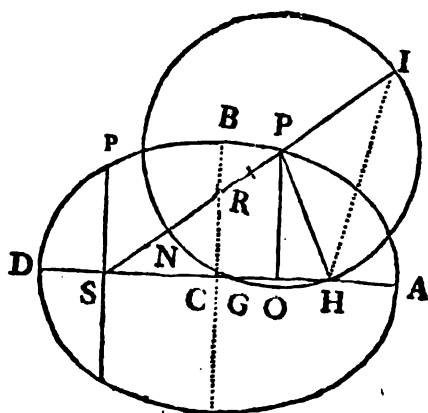
drato semiaxis majoris  $CA^2$ , dicanturque puncta H & S, Foci, summa linearum ab utroque foco ad quodvis punctum Ellipseos ductarum erit semper æqualis Axi majori, ( *Apol. Lib. 3. Prop. 52.* ); & tota linea ordinatim applicata in foco erit æqualis Lateri Recto Principali, quod ergo minus erit quadruplo distantie foci à proximo Vertice.



*Demonst.* Ducatur quævis linea ex foco S, in eâ sumatur  $SI = DA$  & ducta IH ad alterum focum, fiat  $IHP = I$  erit  $IP = PH$ , ideoque  $SP + PH = SP + PI = SI = DA$  sive axi majori: quo posito dico punctum P ad Ellipsim pertinere. Centro P radio PH describatur circulus IHGN habebitur hæc Proportio  $SI : SH = SG : SN$ , sumendo dimidium harum linearum manebit proportio; sit autem  $\frac{1}{2} SI = SR$ ,  $\frac{1}{2} SH = CH$ ;  $\frac{1}{2} SG = \frac{1}{2} SH - \frac{1}{2} GH$  & demissa PO perpendiculari in GH est  $\frac{1}{2} GH = HO$  ergo  $\frac{1}{2} SG = CH - HO = CO$ . Denique  $\frac{1}{2} SN = \frac{1}{2} SI - \frac{1}{2} NI = RI - PI = RP$  est ergo

$SR : CH = CO : RP$  & componendo habetur  $SR : SR + CH = CO : CO + RP$ , rum prioris rationis terminos jungendo terminis secundæ, est:  $SR, SR + CH = CO + SR : CO + RP + SR + CH$  sive quia  $SR = AC = DC$  &  $CH = CS$ , est  $AC : AC + CH = DO : SP + SO$ . At operationibus contrariis factis in eandem proportionem  $SR : CH = CO : RP$ , hoc est, dividendo & postea prioris rationis terminos

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.



minos è terminis secundæ detrahendo substitutionibusque factis erit

AC: AC—CH=AO: SP—SO  
multiplicatis autem terminis utriusque pro-  
portionis est

$$\text{AC}^2: \text{AC}^2 \rightarrow \text{CH}^2 (\text{five BC}^2) = \text{AO} \times \text{DO}, \text{SP}^2 \rightarrow \text{SO}^2,$$

est autem (per 47. i. Elem.)  $SP^2 - SO^2 = OP^2$ , sed est  $AC^2 : BC^2 = AO \times DO$  ad quadratum ordinatæ in O, est ergo PO ipsa illa ordinata, & punctum P ad Ellipsim pertinet.

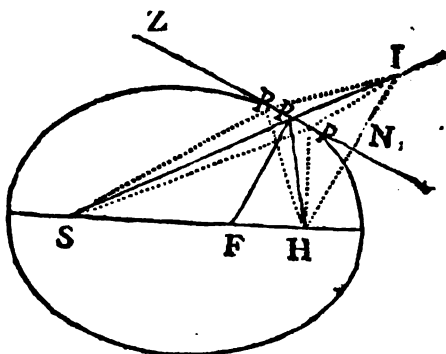
Sit autem  $Sp$  ordinata in foco erit  $AC^2 : BC^2 = AS \times SD : Sp^2$ , est autem (per 5. 2. Elem.)  $AS \times SD = AC^2 - CS^2 = BC^2$ , est ergo  $AC^2 : BC^2 = BC^2 : Sp^2$  five,  $AC : BC = BC : Sp$ , & duplicando omnes terminos:  $2 AC : 2 BC = 2 BC : 2 Sp$ , sed est  $2 AC = 2 BC = 2 BC : L$  ergo  $L = 2 Sp$ , &  $\frac{1}{2} L = Sp$ .

Est autem ( *per Theorema 2.* )  $Sp^2$ , five

$$\frac{1}{4}L^2 = \frac{AS}{2AC} \times L \times DS \text{ \& } \frac{1}{4}L^2 = \frac{AS}{2AC} \times DS$$

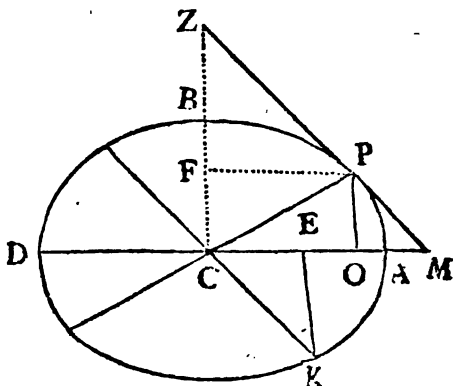
ut ergo est  $AS$  minor  $2 AC$  erit  $\frac{1}{4} L$  minor  $DS$ , hoc est latus rectum minus est quadruplo distantiae foci à proximo Vertice.

*Theor. IV. Tangens Ellipsis bifariam dividit Angulum qui fit inter unam à lineis à foco ductam & productionem alterius: & lineæ ab utroque foco ductæ, æquales faciunt angulos cum Tangente, & si bifariam dividitur angulus quem faciunt lineæ à fo. o ductæ, linea bifecans erit curvæ perpendicularis. (Apol. 48. b. 3. 48.)*



*Demonstr.* Ducantur à focus lineæ SPHP productaque SP in I, dividatur bifariam angulus SPH, dico lineam ZPN non occurrere Ellipti in ullo alio puncto p, sit  $PI = PH$  & ducta IH, erit PN perpendicularis in ejus medium, ex alio quovis puncto p, ducantur pI, pH, quæ erunt æquales ob æqualia Triangula pNI, pNH (per 4. 1. Elem.) sed si p foret in Ellipti, esset  $Sp + pH$ . si ve  $Sp + pI = SI$  quod absurdum (per 20. 1. Elem.)

Est autem  $ZPS = IPN$  (per 15. 1. El.) est  
 $IPN = NPH$ , per const. ergo  $ZPS = NPH$ .  
 Si ergo  $FPS = FPH$  est  $ZPS = FPS$   
 $= NPH + FPH$ , sunt autem omnes si-  
 mul  $\angle$ ales duobus rectis, ergo  $ZPS$   
 $+ FPS$  est Recto  $\angle$ ualis &  $PF$  angulum  
 $SPH$  bifecans est in Tangentem, ideoque  
 in curvam perpendicularis.



*Theor. V.* Sit Diameter quævis AD, & ducantur utriusque duæ aliæ Diametri inter se conjugatæ CP, CK, ex utriusque vertice ducantur ordinatæ KE, PO in priorem AD, factum abscissarum à curvâ sumptarum, unius ver-

vertici respondentium erit æquale quadrato abscissæ à centro sumptæ respondenti Vertici alterius Diametri: Unde quadrata ambarum abscissarum à Centro sumptarum erunt simul æqualia quadrato  $\frac{1}{2}$  Diametri in quam sumuntur, & quadrata ordinarum erunt æqualia quadrato ejus  $\frac{1}{2}$  Diametri conjugatæ. Hinc deducitur summam quadratorum duarum Diametrorum conjugatarum quarumvis esse semper eandem: eas verò Diametros conjugatas esse inter se æquales quarum vertices determinantur per ordinatam erectam in Axem majorem cujus abscissa à centro sumpta sit æqualis radici dimidii quadrati semi Axis majoris.

*Demonst.* ... Sint CP CK Diametri conjugatæ, PO KE ordinatæ ex earum verticibus in Diametrum AD ductæ; PM Tangens Parallela Diametro CK: Triangula POM, KEC erunt similia & PO:KE = MO:CE, vel PO:KE = MO:CE sive quia (per Cor. 3. Lem. V.) est MO =  $\frac{CA^2 - CO^2}{CO}$  est PO:KE =

$$\frac{CA^2 - CO^2}{CO} : CE, \text{ sed per Lemma IV.}$$

est PO:KE = AO:DO:AE:DE sive (per 5. 2. Elem.) = CA:CE:CA:CE est ergo, CA:CE =

$$\frac{CA^2 - CO^2}{CO} : CE, \text{ dividendo primum \& tertium terminum per}$$

$$\frac{CA^2 - CO^2}{CO^2} \text{ est } CO^2 : CA^2 - CE^2 = CA^2 - CO^2 : CE^2 \text{ \& addendo terminos secundæ rationis terminis primæ est } CA^2 : CA^2 =$$

CA:CE = ZP:FP (sive CO) & CK:CE = PM:MO unde compositis rationibus est CK:CE = ZP:PM:CO:MO, sed CO:MO = AO:DO (per Cor. 3. Lem. V.) & AO:DO = CE:CE per præsens Theorema, ergo CK:CE = ZP:PM:CE:CE & CK:CE = ZP:PM sive ZP:CK = CK:PM. Q. E. D.

Quod erat primum. Jamcis ergo quadratis abscissarum CO<sup>2</sup>, CE<sup>2</sup> summa est æqualis CA<sup>2</sup>; nam est CE<sup>2</sup> = CA<sup>2</sup> - CO<sup>2</sup> ergo CE<sup>2</sup> + CO<sup>2</sup> = CA<sup>2</sup> - CO<sup>2</sup> + CO<sup>2</sup> = CA<sup>2</sup>.

Sit BC diameter conjugata diametri AC, est PO<sup>2</sup> =  $\frac{BC^2}{AC^2} \times CA^2 - CO^2$  & KE<sup>2</sup> =  $\frac{BC^2}{AC^2}$

Tom. I.

$$\times AC^2 - CE^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \times AC^2 - AC^2 +$$

$$CO^2 = \frac{BC^2}{AC^2} CO^2, \text{ ergo } PO^2 + KE^2 =$$

$$\frac{BC^2}{AC^2} \times AC^2 - CO^2 + CO^2 = BC^2$$

Sit autem Diameter AC axis, ordinatæ erunt perpendiculares, ergo PO<sup>2</sup> + CO<sup>2</sup> = PC<sup>2</sup>, & CE<sup>2</sup> + KE<sup>2</sup> = CK<sup>2</sup> (per 47. 1. El.) ergo PO<sup>2</sup> + CO<sup>2</sup> + CE<sup>2</sup> + KE<sup>2</sup> = PC<sup>2</sup> + CK<sup>2</sup>, sed PO<sup>2</sup> + KE<sup>2</sup> = BC<sup>2</sup>, CO<sup>2</sup> + KE<sup>2</sup> = AC<sup>2</sup> Ergo PC<sup>2</sup> + CK<sup>2</sup> = AC<sup>2</sup> + BC<sup>2</sup>. Quarumvis Diametrorum conjugatarum quadrata æqualia summam facient ac quadrata axium.

Denique si punctum O in axi ita sit sumptum ut sit  $\frac{1}{2} CA^2 = CO^2$  & sit ducta in O ejus ordinata & per ejus verticem P ducatur Diameter ejusque conjugata, quadratum abscissæ quæ respondebit vertici Diametri conjugatæ erit æquale AO x DO sive AC<sup>2</sup> - CO<sup>2</sup> sed CO<sup>2</sup> =  $\frac{1}{2} CA^2$  per hypothesim, ergo hoc quadratum erit etiam æquale  $\frac{1}{2} AC^2$ , eadem ergo abscissæ ac proinde æquales ordinatæ verticibus utriusque Diametri respondebunt, æquales ergo erunt illæ Diametri conjugatæ siquidem sunt Hypothenusæ æqualium abscissarum & Ordinarum.

Cor. I. Si à vertice Diametri PC, producat Tangens terminata utrinque in M & Z, ad Diametros conjugatas CA, CB productas, erit semi-Diameter CK priori conjugata media proportionalis inter partes Tangentis PM:PZ: Ductis enim ordinatis PF PO, ob similia Triangula CKE, ZFP, POM, est CK:CE = ZP:FP (sive CO) & CK:CE = PM:MO unde compositis rationibus est

CK:CE = ZP:PM:CO:MO, sed CO:MO = AO:DO (per Cor. 3. Lem. V.) & AO:DO = CE:CE per præsens Theorema, ergo CK:CE = ZP:PM:CE:CE & CK:CE = ZP:PM sive ZP:CK = CK:PM. Q. E. D.

Et conversâ per se liquet, nempe quod si duæ Diametri occurrant Tangenti ductæ in Vertice alterius Diametri, ita ut hujus  $\frac{1}{2}$  Diameter conjugata sit media proportionalis inter partes tangentis, duæ illæ priores Diametri erunt inter se conjugatæ.

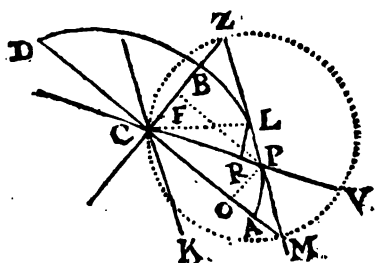
R

Præ-

DE MOTU CORP. LIBER PRIMUS.

DE MOTU  
CORPORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Problema.* Datis tam positione quam magnitudine Ellipseos alicujus non descriptæ duabus Diametris conjugatis invenire positionem & magnitudinem duarum aliarum Diametrorum conjugatarum, quæ faciant inter se angulum quemvis datum.

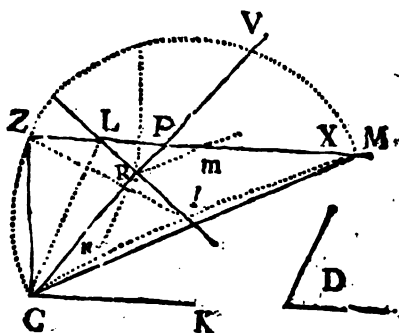


*Primus Casus:* Angulus qui datur sit rectus, h. e. Diametri quæsitæ sint Axes conjugati. Sint verò semi-Diametri datæ CP CK, per verticem P unius ducatur linea alteri CK parallela, quæ ideo erit Ellipsis Tangens in eo puncto. (per Lem. IV.) producat CP in V ita ut sit CP:CK = CK:PV, in medium R lineæ CV erigatur perpendicularis tangentem secans in L, & ex L velut Centro radio LC qui æqualis est LV; describatur circulus transiens per puncta C & V, & Tangentem secans in punctis Z & M, dico lineas ZCM esse in axium positione.

*Demonstr.* Angulus enim ZCM est rectus quia est in semi-circulo per constructionem, præterea quia chordæ CV ZM sese secant in P est CP × PV = ZP × PM (per 35. 3. Elem.) sed CP × PV = CK² per constructionem, ergo CK² = ZP × PM. ideoque, per Corollarii præcedentis conversam, lineæ CZ, CM, cadunt secundum Diametros conjugatas.

*Sec. Casus.* Si angulus datus D rectus non sit, centrum circuli describendi non erit in L sed in alio puncto I ejusdem lineæ RL in medio R lineæ CV perpendicularis: sic verò invenitur: ducatur ex R perpendicularis in Tangentem fiatque cum eâ angulus æqualis dato, & linea eum formans secet Tangentem in m, ducatur LC, & per R linea RN ipsi Parallela, ex C ut centro, radioque æquali Rm secetur RN in N, ductaque CN quæ secet LR in I erit I centrum circuli ex quo si radio IC circulus describatur, is transibit per C & etiam per V (per const. &

1. 3. Elem.) secabit verò Tangentem in punctis Z & M, è quibus ductis CZ, CM habetur Diametrorum quæsitæ positio.

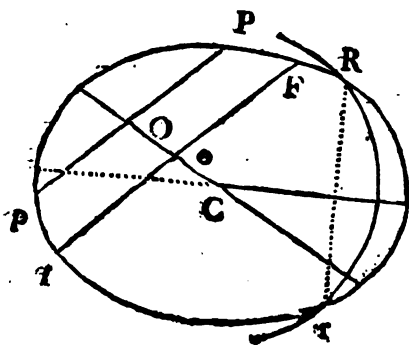


*Demonstr.* Evidens est, sicut in priore hujus demonstrationis parte, lineas CZ CM, cadere secundum Diametros conjugatas, quæstio est utrum faciant in C angulum datum, ex centro I ducatur linea parallela lineæ Rm, dico illam occurrere Tangenti in puncto M, hoc est illam fore æqualem radio IM sive IC, occurrat enim Tangenti in X erit ob Parallelas LR:Rm = LI:IX; sed propter Parallelas RN & LC triangu-  
la NIR CIL, sunt similia, estque LR:IN = LI:IC, & sumptis vel differentiis vel sum-  
mis terminorum utriusque rationis est LR:GN = LI:IC, est verò per constructionem CN = Rm ergo LR:Rm = LI:IC ergo LI:IX = LI:LC, scilicet est IX = IC, hoc est X cadit in M; radius ergo IM cum sit Parallelus lineæ Rm, faciet cum per-  
pendiculari quæ in lineam ZM duceretur eundem angulum quem format linea Rm cum perpendiculari in eandem lineam ductâ, angulum nempe quæsitum: & angulus ZIM ejus erit duplum; sed angulus ZCM est anguli ZIM dimidium, ergo est æqualis angulo quæsito.

Determinatur autem Diametrorum magnitudo, ductis ex P in utramq. Diametrum ordinatis PO, PF lineis CZ, CM, Parallelis; ½ Diametri enim erunt mediæ proportionales inter abscissas à centro, & lineas à centro ad Tangentem sumptas, hoc est, erit CO:CA = CA:CM, & CF:CB = CB:CZ; unde cum cognoscantur CO & CM, CF & CZ determinantur CA & CB.

*Cor. I.* Datis axibus, foci inveniuntur si ex

ex vertice axis minoris, ut centro, cum radio æquali semi axi majori ipse major axis sece-  
tur, & datis focus & axi majori puncta quot-  
libet ad Ellipsim pertinentia inveniri pos-  
sunt, si ab uno foco ducatur ut libet linea  
æqualis axi majori & ab ejus extremitate du-  
catur linea ad alterum focum, fiat in hoc fo-  
co super hanc lineam angulus æqualis angu-  
lo qui fit inter lineas à focus ductas, secabi-  
tur prima linea in puncto ad Ellipsim perti-  
nente.



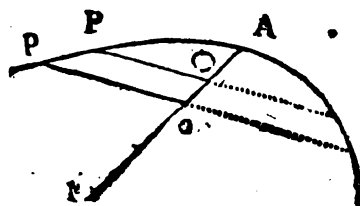
Cor. II. Si Ellipsis sit data, sic inveniuntur  
centrum & Axes: ducantur ut lubet duæ  
Parallæle P p, F f, per earum medium O: o,  
ducatur linea, erit Diameter, ejus medium  
C erit Centrum ex quo describitur circulus  
qui secet curvam in duobus punctis R r du-  
catur per centrum linea perpendicularis  
in lineam R r quæ eam bifariam dividet  
(per 3. 3. Elem.) erit ~~erit~~ Axis, alter axis  
haberetur erigendo lineam huic perpendicu-  
larem in Centro ad curvam usque.

### ***IX. De Parabola.***

**I. Theor.** Omnes Diametri Parabolæ sunt infinitæ & inter se Parallelæ: quadrata ordinarum sunt inter se ut Abscissæ Diametrorum, & cum tertia proportionalis abscessæ & ordinatæ dicatur Latus Rectum, factum lateris Recti per abscissam est æquale quadrato ordinatæ, hincque derivatur nomen hujus curvæ. (*Apol. lib. 1. Prop. 10.*)

*Dem.* Ducatur in basi conì chorda parallela plano Parabolæ, & infinitè parva, per verticem conì & eam chordam ducatur Planum & aliud illi parallelum per unam è lineis Pa-

rabolæ in hoc plano formabitur Hyperbola,  
 sed quam proxima Parabolæ, & cujus centrum  
 tanto magis à Vertice conï removeretur quo  
 minor est chorda per quam transit planum  
 per Verticem conï ductum, evanescat hæc  
 chorda, centrum ejus Hyperbolæ in infinitum  
 abibit, & ut Planum verticale fiet tan-  
 gens cono, coincidēt hæc Hyperbola cum  
 Parabolâ, sed omnes ejus Diametri à pun-  
 cto infinite remoto divergentes erunt Pa-  
 rallelæ & infinitæ, tales ergo etiam erunt  
 Diametri Parabolæ. Præterea ex casu 2<sup>do</sup>.  
 Lem. III. constat, quod si secans infinita plu-  
 res lineas Parallelas in Sectione Conicâ se-  
 cet, abscissæ erunt inter se ut facta partium  
 linearum Parallelarum, sed hæc bisariam di-  
 viduntur à Diametro, sunt ergo Diametri  
 abscissæ sicut quadrata ordinarum.



Fiat  $AO$ ,  $OP = OP : L$  erit  $OP^2 = AO \times L$ ; esto verò quævis alia abscissa  $Ao$  & ordinata  $op$  erit  $AO : Ao = OP^2 : op^2$ , & multiplicando primam rationem per  $L$  erit  $L \times AO : L \times Ao = OP^2 : op^2$ , sed per Hypothesim  $AO \times L = OP^2$  ergo etiam  $L \times Ao = op^2$  hoc est factum Lateris recti per quævis abscissam æquale est quadrato ordinatæ ipsi respondentis.

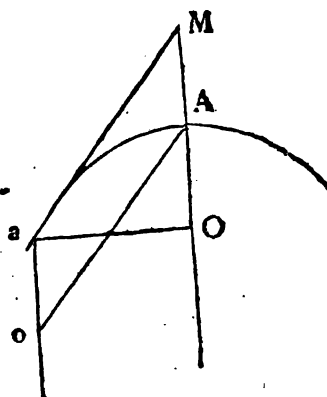
*Cor. I.* Si in Diametrum productam fumatur à Vertice longitudo æqualis lateri Recto, & ab ejus extremo ad extremum abscissæ describatur semi-circulus, & in vertice diametri Parabolæ erigatur Perpendicularis ad circulum utque, erit lxx perpendicularis æqualis ordinatæ ad eam abscissam pertinenti.

Cor. II. Si in Diametro quavis sumatur à vertice quarta pars ejus lateris recti, ordinatum applicata illi puncto erit æqualis lateri recto. Sit enim  $Ao = \frac{1}{4} L$  est  $\frac{1}{4} LL = op^2$ : ergo  $LL = 4 op^2$  &  $L = 2 op$  si tui ordinatum applicatæ in o.

R. 2 • Cor.



DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

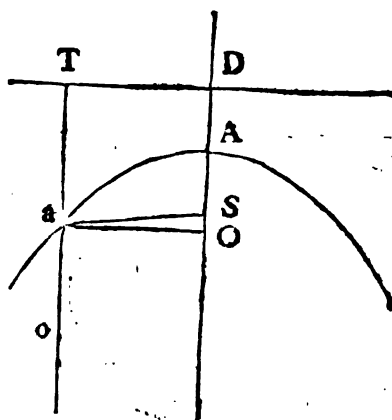


*Cor. III.* Latus Rectum Diametri cuiusvis est æquale Lateri recto axis & quadruplo abscissæ axis determinatæ per ordinatam à vertice Diametri in axem ductam. Ducatur ex vertice a Diametri tangens a M quæ axi occurrat in M & a O ordinata axi, per *Corollarium Lemmatis V.* distantia verticis axis A ad M est æqualis distantie ejusdem verticis ab O, ergo  $MO = \frac{1}{2} AO$ , & (per 47. 1. Elem.) est  $M^2 = MO^2$  (five  $4 AO^2$ )  $+ a O^2$  (five  $L \times AO$ )  $= 4 AO + L \times AO$ ; à vertice A axis ducatur ordinata A o ad Diametrum propositam, evidens est ob parallelas a o, A O, & Tangentem ordinatæ parallelam, esse  $ao = AM$  five  $AO$  &  $o A = a M$ ; sit verò l latus Rectum Diametri a o, erit  $o A^2$ , five  $a M^2 = l \times a o = l \times AO$  sed erat  $a M^2 = 4 AO + L \times AO$  ergo  $l \times AO = 4 AO + L \times AO$ , unde  $l = L + 4 AO$ . Q. E. D.

*Theor. II.* Si in axe sumatur à vertice quarta pars ejus lateris recti, id punctum vocatur Parabolæ focus, si verò ultra verticem eadem feratur longitudo & per punctum in quo cadit ducatur linea axi perpendicularis, dicetur Directrix Parabolæ: Si autem producaturs quævis Diameter ad Directricem, portio ejus inter verticem & Directricem comprehensa est quarta pars lateris Recti ejus Diametri, & est æqualis distantie ejus verticis à foco.

*Demonst.* Ut enim Diameter & axis sunt paralleli, ducta perpendiculari a T à vertice diametri ad directricem erit  $a T = O D =$

$DA + AO$ , est verò D A, quarta pars lateris recti principalis & A O abscissa axis quæ respondet ordinatæ a O à vertice Diametri ductæ, est verò (per Corol. 2. Theor. præced.) latus rectum diametri æquale quadruplo lateris recti & quadruplo A O, hoc est  $= 4 DA + 4 AO$  ergo  $a T = DA + AO$  est quarta pars lateris Recti Diametri a o.

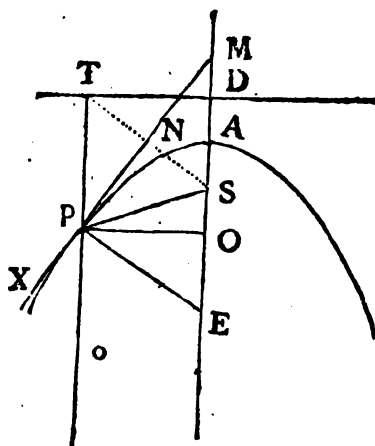
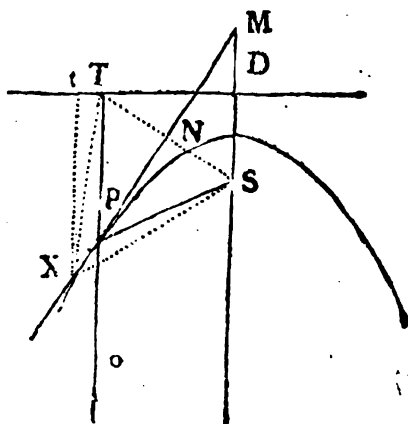


Secundò, E foco Parabolæ S, ad verticem Diametri ducatur S a, sique ducta a O ordinata axi, (per 47. 1. Elem.) est  $S a^2 = SO^2 + a O^2$  &  $a O^2 = 4 DA \times AO$ : ergo  $S a^2 = SO^2 + 4 DA \times AO$ , sed est  $DO^2$  (per 8. 1. El.)  $= SO^2 + 4 DA \times AO$ , ergo  $DO^2 = S a^2$  &  $S a = DO = a T$ .

*Theor. III.* Si à puncto Parabolæ ducatur perpendicularis ad Directricem, & linea ad focum, bifariamque dividatur Angulus quem faciunt, linea eum dividens erit Tangens in eo puncto, quæ si producaturs donec secet axem, portio axis à foco ad occursum Tangentis contenta erit æqualis lineæ à foco ad punctum Parabolæ ductæ: Angulus Diametri cum Tangente erit æqualis angulo lineæ à foco ductæ cum eâ Tangente, ideo ea quæ secundum Diametros ad Parabolam adpellunt ad focum reflectentur, & Angulus Diametri cum lineâ à foco ductâ bifariam dividitur per perpendicularem ad curvam: Si ea perpendicularis secet axem, pars axis inter eam & ordinatam axi ex Vertice Diametri ductam, est æqualis dimidio lateris recti principalis, & pars axis inter eam & Tangentem comprehensa, est dimidium lateris Recti Diametri, ipsa verò per-

perpendicularis est media proportionalis  
inter ea semilatera recta.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.



*Demonst.* Sit  $TD$  directrix, à puncto  $P$  linea  $PT$  perpendicularis in Directricem ducatur, ducatur etiam ad focum linea  $PS$  & denique ducatur linea  $PN$  bifariam dividens angulum  $SPT$ ; illa linea perpendiculariter & bifariam dividet lineam  $ST$  à foco ad punctum  $T$  ductam. Ex quovis puncto  $X$  lineæ  $PN$  ducantur lineæ  $XT$ ,  $XS$ , erunt inter se æquales (*per 4. 1. Elem.*), erit verò  $XT$  directrici obliqua ideoque perpendicularis ab  $X$  in Directricem demissa erit brevior quam  $XT$  ac per consequens brevior quam  $XS$ , ergo id punctum  $X$  vicinius erit Directrici quam foco, erit ergo extra Parabolam, ideoque linea  $PN$  erit Tangens, cum in unico puncto  $P$  Parabolæ occurrat.

Anguli autem  $TPN$ ,  $NMS$  sunt æquales ob Parallelas  $TP$ ,  $MS$ , & per const.  $TPN = NPS$ , ergo  $NMS = NPS$ , est ergo Triangulum  $MSP$  Ifoceles, &  $MS = SP$ .

Anguli autem  $XPo$ ,  $TPN$ , per verticem sunt oppositi, ergo sunt æquales, sed  $TPN = NPS$  per const. ergo  $XPo = NPS$ .

Dividatur bifariam angulus  $SPo$  per lineam  $PE$  ita ut sit  $oPE = EPS$ ; erit  $XPo + oPE = NPS + EPS$  hi qua-

tuor valent duos rectos, ergo  $XPo + oPE$  valent rectum & est  $PE$  perpendicularis in Tangentem.

Est ergo in Triangulo Rectangulo  $MPE$  (ductâ perpendiculari  $PO$ )  $MO : PO = PO : OE = \frac{PC^2}{MO}$ , est verò  $PO = L \times AO$  &

$$MO = 2 AO \text{ ergo } OE = \frac{L \times AO}{2 AO} = \frac{L}{2}$$

Ergo etiam  $EM$  est æqualis dimidio lateris Recti Diametri  $PO$ , est enim ejus Latus Rectum æquale lateri Recto principali & quadruplo abscissæ  $AO$ , est verò  $OE$  dimidium lateris Recti Principalis &  $MO = 2 AO$ , sive dimidium quadrupli  $AO$ , ergo  $EM = \frac{1}{2} l$ .

Est etiam ob Triangulum Rectangulum  $MPE$ ,  $EM : PE = PE : OE$ ; ergo est  $PE$  hoc est perpendicularis in curvam, media proportionalis inter semilatus rectum Diametri & semilatus rectum Axis.

*Theor. IV.* Superficies Parabolica inter curvam, abscissam Axis & ejus ordinatam comprehensa, est ad factum abscissæ per Ordinatum ut duo ad tres, segmentum verò Parabolicum inter curvam & chordam à Vertice ductam terminatum, est ejusdem facti sexta pars.



puncta P, Q, coeunt, &  $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR} =$

$$\frac{AM^2 \times 2PM \times SP^2}{AX^2}. \text{ Est ergo (per co-}$$

roll. I. & V. prop. VI<sup>te</sup>.) in omnibus se-

$$\text{ctionibus conicis vis centripeta reciproce}$$

$$\text{ut } \frac{AM^2 \times PM \times 2SP^2}{AX^2}, \text{ hoc est, dele-}$$

$$\text{to } 2SP^2, \text{ constante, reciproce ut } \frac{AM^2 \times PM}{AX^2}.$$

$$\text{Porro ob similitudinem triangulorum HAX,}$$

$$\text{HMP, est HM: PM = HA: AX = } \frac{PM \times HA}{HM}.$$

$$\& AX^2 = \frac{PM^2 \times HA^2}{HM^2} \& \frac{AM^2 \times PM}{AX^2} =$$

$$\frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2}, \text{ vis igitur est etiam in om-}$$

$$\text{ni sectione conicâ reciproce ut } \frac{AM^2 \times HM}{PM \times HA^2}.$$

In Parabolâ (per prop. 35. lib. 1. Conic.

Appoll. five Cor. 1. Lem. V. de Conicis)

$$HA = AM, \& HM = 2AM, \& \text{ (per prop. 20. lib. 1. Conic. Appoll. quæ est}$$

$$\text{Theor. I. de Parabola) } AM, \text{ adeoque } \& HM$$

$$\text{est semper ut } PM^2. \text{ Ergo vis centripeta}$$

$$\text{in parabolâ erit reciproce ut } \frac{4AM^4}{PM \times AM^2}$$

$$\text{five ut } \frac{AM^2}{PM}, \text{ hoc est, ut } \frac{PM^4}{PM} = PM^3;$$

$$\text{hoc est, reciproce ut cubus ordinatæ PM.}$$

In Ellipfi & Hyperbolâ, si latus re- DE Mò-

ctum axis AB, dicatur L, erit (ex prop. 21. lib. 1. Conic. Appoll. five Theor. II. TU COK-

$$\text{de Ellip.) } PM^2: AM \times MB = L: AB \text{ PORUM.}$$

$$\text{ac proinde } AM = \frac{PM^2 \times AB}{L \times MB}, \& AM^2 \text{ LIBER}$$

$$= \frac{PM^4 \times AB^2}{L^2 \times MB^2}, \& \frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2} \text{ PRIMUS.}$$

$$= \frac{PM^3 \times AB^2 \times HM^2}{L^2 \times MB^2 \times HA^2}, \text{ unde deletâ ra-}$$

$$\text{tione constanti } \frac{AB^2}{L^2}, \text{ erit vis centripeta re-}$$

$$\text{ciprocè ut } \frac{PM \times HM}{MB^2 \times HA^2}; \text{ verùm (per prop.}$$

37. lib. 1. Conic. Appoll. sup. Cor. 2. Lem. V.)

posito centro sectionis C, est CM: CA

$$= CA: CH, \text{ adeoque dividendo vel com-}$$

$$\text{ponendo CM: AM = CA: HA, ac proinde}$$

$$\text{addendo vel detrahendo terminos secundæ}$$

$$\text{rationis è terminis prioris MB: HM = CA: HA}$$

$$\& \frac{HM}{MB \times HA} = \frac{1}{CA} \& \frac{HM^2}{MB^2 \times HA^2} = \frac{1}{CA^2}$$

$$\text{quæ est quantitas constans. Erit igitur}$$

$$\text{etiam in hyperbolâ & Ellipfi adeoque in}$$

$$\text{omni sectione conicâ vis centripeta reci-}$$

$$\text{procè ut } PM^3; \text{ seu reciproce ut cubus or-}$$

$$\text{dinatæ PM; deletâ nimirum, in expressiõne}$$

$$\text{vis centripetæ suprâ inventâ, quantitate}$$

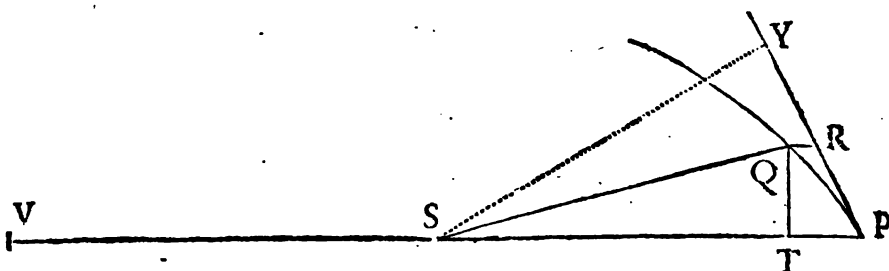
$$\frac{HM^2}{MB^2 \times HA^2}, \text{ constans.}$$

136 PHILOSOPHIÆ NATURALIS  
PROPOSITIO IX. PROBLEMA IV.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

Gyretur corpus in spirali PQS secante radios omnes SP, SQ, &c. in angulo dato: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum spiralis.

(<sup>t</sup>) Detur angulus indefinite parvus PSQ, & ob datos om-



nes angulos dabitur specie figura SPRQT. Ergo datur ratio  $\frac{QT}{QR}$ , estque  $\frac{QT \text{ quad.}}{QR}$  ut QT, hoc est (ob datam specie figuram illam) ut SP. Mutetur jam utcumque angulus PSQ, & recta QR angulum contactus QPR subtendens mutabitur (per lemma XI.) in duplicatâ ratione ipsius PR vel QT. Ergo manebit  $\frac{QT \text{ quad.}}{QR}$  eadem quæ prius, hoc est ut SP. Quare  $\frac{QT \times SP}{QR}$  est ut SP cub. ideoque (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta est reciprocè ut cubus distantiae SP. Q. E. I.

(<sup>t</sup>) 225. Ob omnes angulos datos, dabitur specie figurâ SPQRT, & ipsius latera omnia erunt inter se in datâ seu constanti ratione, ergò datur ratio  $\frac{QT}{QR}$ , estque proinde  $\frac{QT}{QR} \times QT$ , ut QT hoc est, ob datam rationem QT, ad SP, erit  $\frac{QT^2}{QR}$ , ut SP, mutetur jam utcumque angulus PSQ, & manebit  $\frac{QT^2}{QR}$ , ut SP. Nam QR, ubi angulus PSR constans est, dicitur a, & QT dicatur b; ubi verò angulus PSR utcumque mutatur, QR di-

catur x, & QT dicatur y, & erit per Lem XI. a: x = b<sup>2</sup>: y<sup>2</sup>, adeoque  $\frac{b^2}{a} = \frac{y^2}{x}$  hoc est  $\frac{y^2}{x}$  seu  $\frac{QT^2}{QR}$  eadem manet quæ prius, nimirum ut SP. Quoniam autem evanescente angulo PSR, sive coeuntibus punctis Q, P, recta SR, rectæ SP parallela evadit, erit per coroll. 1. & v. prop. VI.<sup>æ</sup> vis centripeta reciprocè ut  $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR}$ , ac proinde substituendo SP, loco  $\frac{QT^2}{QR}$ , vis centripeta erit reciprocè ut SP.

*Idem aliter.*

(<sup>1</sup>) Perpendicularum SY in tangentem demissum, & circuli spiralem concentricè secantis chorda PV sunt ad altitudinem SP in datis rationibus; ideoque SP cub. est ut SYq x PV, hoc est (per corol. 3. & 5. prop. VI.) reciprocè ut vis centripeta.

LEMMA XII.

*Parallelogramma omnia circa datæ ellipses vel hyperbolæ diametros quasvis conjugatas descripta esse inter se æqualia.*  
Constat ex conicis. (<sup>1</sup>)

PROPOSITIO X. PROBLEMA V.

*Gyretur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ellipses. (<sup>2</sup>)*

(<sup>1</sup>) 226. Sit circuli spiralem osculantis in P chorda per centrum virium S ducta PV, demissumque in tangentem perpendicularum SY, & ob angulum SYP, rectum, & SPY, datum, dabitur specie triangulum SPY. Ergò datur ratio SY ad SP, & in virium centripetarum formulis SP scribi potest pro SY. Præterea datur ratio PV ad SP, nam (210)  $SY \times \frac{SP \times QT}{SY} = SP \times QT$ , adeoque  $QP = \frac{SP \times QT}{SY}$ ;

undè ob rationem  $\frac{SP}{SY}$  datam, QP scribi potest pro QT. Verùm (211)  $PV = \frac{QP^2}{QR}$ , ergò PV, est ut  $\frac{QT^2}{QR}$ . Cùm

igitur ex demonstratis in Prop. IX.  $\frac{QT^2}{QR}$  sit ut SP, erit etiam PV, ut SP, & propterea SP, loco PV, substitui potest in formulis.

227. Scholion. Propositio IX. facile demonstratur etiam per formulam *Hermani* (214),  $v = dp : p : dz$ ; est enim in hoc casu  $SP = z$ ,  $SY = p$ ; & si ratio  $\frac{SY}{SP}$  da-

ta dicatur  $\frac{a}{b}$ , erit  $\frac{a}{b} = \frac{p}{z}$  ergo  $az = bp$ ,

Tom. I.

& (160)  $adz = bdp$ , &  $\frac{dp}{dz} = \frac{a}{b}$ ;

undè  $v = \frac{a}{bp}$ ; hoc est, ob datam  $\frac{a}{b}$

vis centripeta v, est directè ut  $\frac{1}{p^2}$ , hoc

est reciprocè ut  $p^2$ , aut quia  $p = \frac{za}{b}$ ,

v erit ut  $\frac{1}{z^2}$  directè, reciprocè autem

ut  $z^2$ , deletis nimirum constantibus.

(<sup>1</sup>) Demonstratio hujus Lemmatis inferius traderetur ubi nempe NEWTONUS eo Lemmate ad solutionem proximi Problematum utetur.

(<sup>2</sup>) 228. Gyretur corpus in Hyperbolâ, invenietur Lex vis centralis spectantis centrum Hyperbolæ simili modo, nisi quod vis illa ejus centri respectu sit centrifuga, quoniam centrum Hyperbolæ non est intra Hyperbolam constitutum, sed Hyperbola versus illud convexitatem obvertit; Legatur, si lubet, utraque solutio hujus Problematum & ad figuram infra positam in quâ Hyperbola descripta est referatur, liquebit verè dici de Hyperbolâ ea quæ NEWTONUS de Ellipsi statuit.

S

Ex

# 138 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

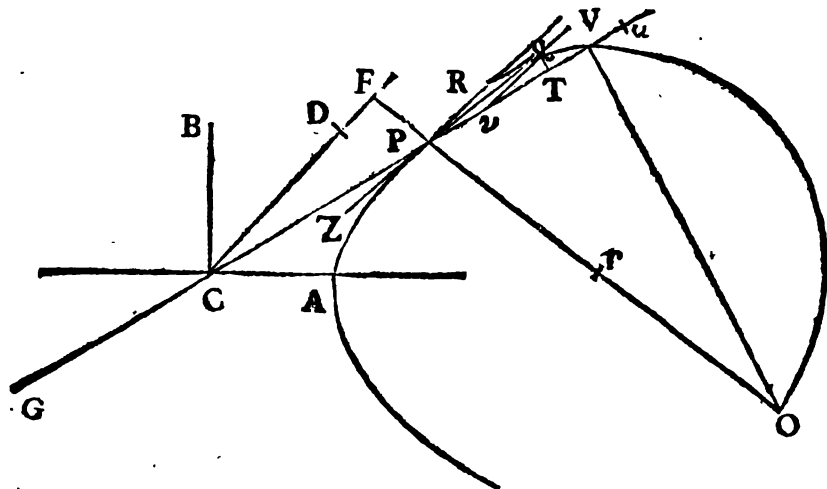
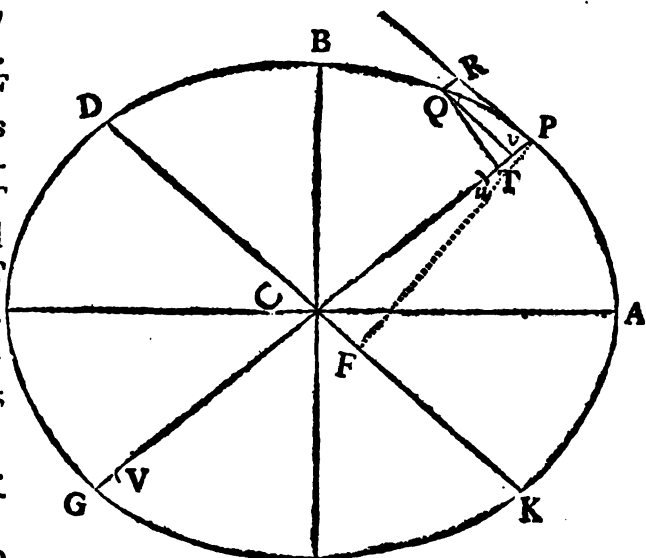
Sunto  $CA, CB$  semiaxes ellipseos;  $GP, DK$  diametri aliæ con-  
jugatæ;  $PF, QT$  perpendiculara ad diametros;  $Qv$  ordinatim  
applicata ad diametrum  $GP$ ; & si compleatur parallelogram-  
mum  $QvPR$ , erit ((<sup>a</sup>) ex conicis) rectangulum  $PvG$  ad  
 $Qv$  quad. ut  $PC$  quad. ad  $CD$  quad. & (ob similia triangu-  
la

$QvT, PCF$ )  $Qv$   
quad. est ad  $QT$  quad.  
ut  $PC$  quad. ad  $PF$   
quad. & conjunctis  
rationibus, rectan-  
gulum  $PvG$  ad  $QT$   
quad. ut  $PC$  quad. ad  
 $CD$  quad. &  $PC$   
quad. ad  $PF$  quad.  
id est,  $vG$  ad  
 $QT$  quad.

$\frac{Pv}{Pv} \text{ ut } PC$   
quad. ad  $\frac{CDq \times PFq.}{PCq.}$

Scribe  $QR$  pro

$Pv$ , & (per lemma XII. (<sup>b</sup>))  $BC \times CA$  pro  $CD \times PF$



(<sup>a</sup>) Ex Conicis, per 21. 1. lib. Apoll.  
Vide sup. Lemna IV. de Conicis.

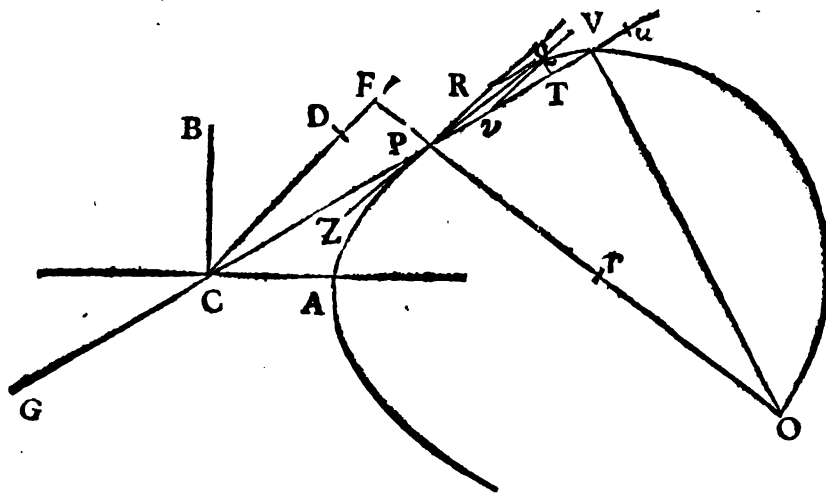
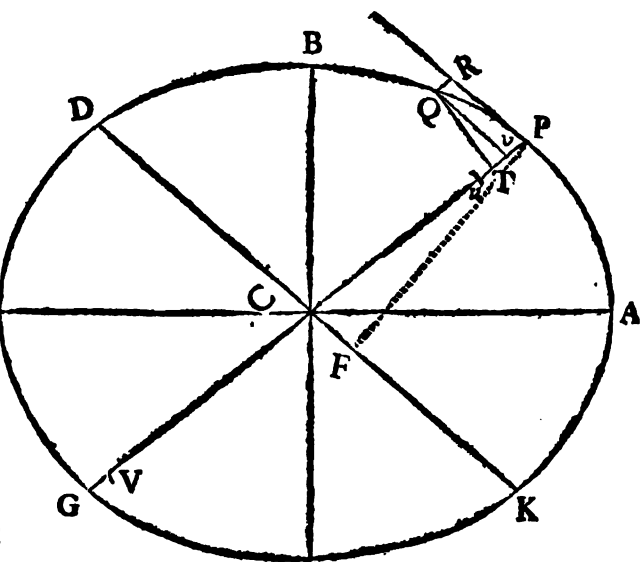
(<sup>b</sup>) 229. Parallelogramma omnia cūcā  
data Ellipseos vel Hyperbolæ Diametros quas-  
vis





DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*DC quad. ad PC qu.*  
Et quoniam ex conicis est *Qv quad. ad Pv G* ut *DC quad. ad PC quad.* erit *Qv quad.* æquale *Pv x uV*. Adde rectangulum *u Pv* utrinque, & prodibit quadratum chordæ arcûs<sup>(c)</sup> *PQ* æquale rectangulo *V Pv*; <sup>(d)</sup> ideoque circulus, qui tangit sectionem conicam in *P* & transit per punctum *Q*, tran-



(c) Adde Rectangulum u P v utrinque, & prodibit quadratum chordæ arcûs P Q, æquale rectangulo V P x P v. Nam (per construct.) est quadratum chordæ arcus P Q = Q T<sup>2</sup> + P T<sup>2</sup>, sed est Q T<sup>2</sup> = Q v<sup>2</sup> - T v<sup>2</sup>, five quia T v = T u est Q T<sup>2</sup> = Q v<sup>2</sup> - T u<sup>2</sup>, ideo quadratum chordæ arcus P Q = Q v<sup>2</sup> - T u<sup>2</sup> + P T<sup>2</sup>, est verò P T<sup>2</sup> - T u<sup>2</sup> = P T + T u P T - T u five P T - T v = P u x P v, ergo quadratum chordæ arcus P Q = Q v<sup>2</sup> + P v x P u.

Quod si Rectangulo  $Pv \times uV$  addas idem  
rectangulum  $Pv \times Pu$ , est  $Pv \times Vu + Pv$   
 $\times uP = Pv \times VP$ , erat verò  $Qv^2 = Pv$   
 $\times uV$ , ergo  $Qv^2 + Pv \times Pu$  five quadra-  
rum chordæ arcus  $PQ$  erit aequale Rectangulo  
 $Pv \times VP$ , five  $VPv$ .

(d) Ideoque circulus qui tangit sectionem in P, & transit per punctum Q, transibit etiam per punctum V; nam ductis circuli illius chordis QP, QY, angulus

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 141

fit etiam per punctum  $V$ . Coeant puncta  $P$  &  $Q$ , & ratio  $uV$  ad  $vG$ , quæ eadem est cum ratione  $DCq$  ad  $PCq$ , fiet ratio  $PV$  ad  $PG$  seu  $PV$  ad  $2PC$ ; ideoque  $PV$  æqualis erit  $\frac{2DCq}{PC}$

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS.

Proinde vis, quâ corpus  $P$  in ellipfi revolvitur, erit reciprocè ut  $\frac{2DCq}{PC}$  in  $PFq$  (per corol. 3. prop. vi.) hoc est (ob datum  $2DCq$  in  $PFq$ ) directè ut  $PC$ . *Q. E. I.*

*Corol. 1.* Est igitur vis ut distantia corporis à centro ellipseos ( $c$ ) & vicissim, si vis fit ut distantia, movebitur corpus in el-

lus  $PQv = QPR$ , (ob parallelas  $Qv$ ,  $PR$ )  
 $= QYP$  (per 32. 3. *Elem.*) ac proinde duo  
 triangula  $PQv$ ,  $PYQ$ , quæ communem  
 habent angulum,  $QPY$ , & æquales  $PQv$ ,  
 $PYQ$ , similia sunt, &  $Pv : QP = QP :$   
 $PY$ . Undè  $PY = \frac{QP^2}{Pv}$ ; quare cum

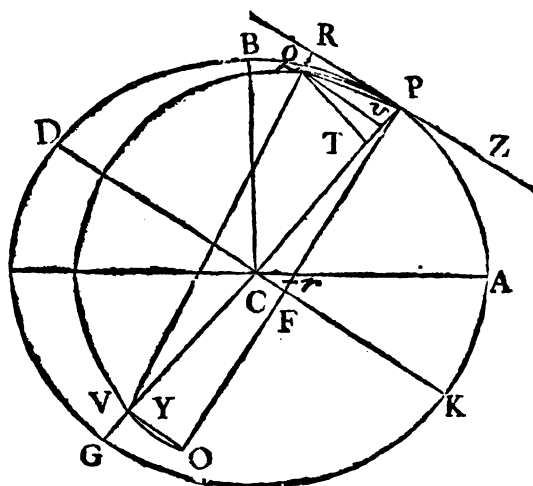
fit  $Pv \times PV = QP^2$ , ideoque  $PV = \frac{QP^2}{Pv}$   
 erit  $PV = PY$ .

230. *Coroll. 1.* . . . Ducantur circuli sectionem conicam osculantis diameter  $PO$ , & chorda  $VO$ , & ob similitudinem triangulorum  $PFC$ ,  $PVO$ , erit  $PF : PC = PV : PO = \frac{PC \times PV}{PF}$ , sed per secundam demonstrationem Newtonianam  $PV = \frac{2DC^2}{PC}$ , ergò  $PO = \frac{2DC^2}{PF}$ , ac pro-

indè radius osculi  $Pr = \frac{1}{2}PO = \frac{DC^2}{PF}$ , &

$PF : DC = DC : Pr$ . Quare datis diametris conjugatis eorumque angulo  $PCD$ , facillè invenitur radius circuli sectionem conicam osculantis in diametri cujuscvis extremo.

231. *Coroll. 2.* . . . Datis radio osculi  $Pr$ , semidiametro sectionis conicæ  $PC$ , & positione tangentis  $PR$ , seu angulo  $PCD$ , diametrorum conjugatarum, datur altera semidiameter conjugata  $DC$ , & describi potest sectio. His enim quæ diximus datis, datur quoque perpendicularis  $PF$ , ac proinde  $DC$ , media proportionalis inter  $Pr$ , &  $PF$ , (230) datas. Datis utem diametris conjugatis earumque angulo, sectio conica describi potest; ut notum est ex Sectionum Conicarum elementis.



232. *Coroll. 3.* Hinc etiam problema V. aliter solvitur. Cùm enim sit vis cen-

tralis (212) ut  $\frac{CP}{Pr \times PF}$ , sitque  $PF = \frac{BC \times CA}{CD}$ , (per Lem. XII.) &  $Pr = \frac{DC^2}{PF}$  (230). His valoribus in formula

$\frac{CP}{Pr \times PF}$ , substitutis, ea fit  $\frac{CP}{BC^2 \times CA^2}$  hoc est, ob constantem quantitatem  $BC^2 \times CA^2$ , vis est directè ut  $PC$ .

( $c$ ) Et vicissim si vis fit ut distantia, movebitur corpus in Ellipfi centrum habente in Centro Virium &c., ut hæc convertia demonstretur sequentia sunt præmittenda.

DE Mo- lipſi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo,  
TU COR- in quem utique ellipſis migrare poteſt,

PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

233. *Lemma I.* Ducatur in puncto contactus perpendicularis in Tangentem, ad axem terminatam, & à Centro ducatur ipſi Parallela ad Tangentem uſque, harum linearum factum erit æquale quadrato ſemi-Axis.

Ex P ducatur perpendicularis in Tangentem PK, ducatur ordinata PO perpendicularis in axem, & in C, ducatur CQ, Parallela, P, & CV, parallela PO, triangula POK CQV, erunt ſimilia, ergo erit  $PO:PK = CQ:CV$ , ergo  $PK \times CQ = PO \times CV$ . ſimilia etiam ſunt Triangula CMV, OMP, erit ergo  $CM:MO = CV:PO$ ; ſed (per Cor.

2. Lem. V. de Conicis) eſt  $CM = \frac{CA^2}{CO}$

& (per Cor. 3. ejuſdem Lem.)  $MO = \frac{AO \times DO}{CO}$  & (per Theor. I I. tam de

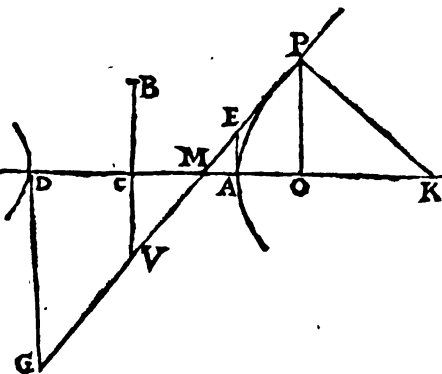
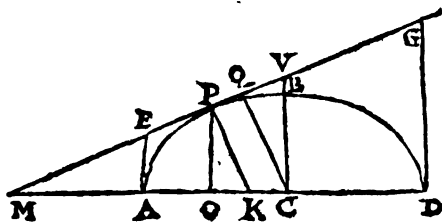
Hyp. quàm de Ellip.) eſt  $CA^2:AO \times DO = CB^2:PO^2$  ergo eſt  $CM:MO$

$= \frac{CA^2}{CO} : \frac{AO \times DO}{CO} = CA^2:AO \times DO$

$= CB^2:PO^2 = CV:PO$ , ideoque  $CB^2 \times PO = PO^2 \times CV$  utrumque vero dividendo per PO eſt  $CB^2 = PO \times CV$ , erat verò  $PK \times CQ = PO \times CV$ . Ergo  $PK \times CQ = CB^2$ . Q. E. D.

234. *Lemma II.* Sit PM, Sectionis Conicæ Tangens, CA axis, CB ejus conjugatus, in utroque axeos primæ Vertice erigantur perpendiculares AE, DG, ad Tangentem uſque, factum earum  $AE \times DG$ , erit æquale quadrato ſemi-Axis.

*Demonſt...* Ducta PO ordinata ad axem & CV ad Tangentem uſque ipſi Parallela, erit (per Cor. 2. Lemm. V. De Conicis)  $CO:CA = CA:CM$ . Dividendo verò, eſt  $CA - CO$  vel  $CO - CA$ , ſive AO ad CA ſive CD, ſicut  $CM - CA$  vel  $CA - CM$ , ſive MA ad CM, hoc eſt  $AO:CD = MA:MC$ , jungendo terminos primæ rationis terminis ſecundæ hæc non mutatur, eſtque  $MA:MC = MA + AO$  (ſive MO):  $MC + DC$ , (ſive MD) hoc eſt alternando  $MA:MO = MC:MD$  ſed ob parallelas eſt  $MA:MO = AE:PO$  &  $MC:MD = CV:DG$  ergo eſt  $AE:PO = CV:DG$  & eſt  $AE \times DG = PO \times CV$  ſed per Lemma præcedens eſt  $PO \times CV = CB^2$ . Ergo eſt  $AE \times DG = CB^2$ . Q. E. D.



235. *Lemma III.* Ducantur à focis perpendiculares in Tangentem Sectionis Conicæ, earum factum erit æquale quadrato ſemi-Axis.

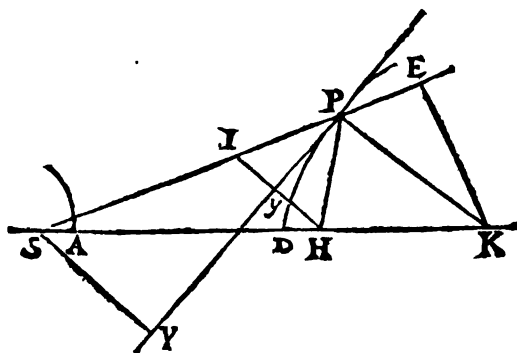
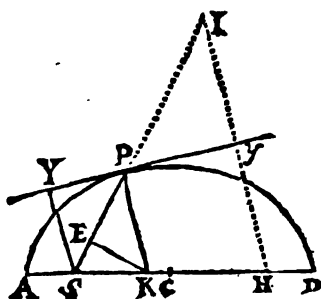
*Demonſt...* Sint illæ perpendiculares SY, Hy, ducantur in utroque vertice axeos tranſverſæ lineæ AE, DG, perpendiculares axi uſque ad Tangentem, & ducantur à focis S & H, ad earum extremitates lineæ SE SG & HG HE.

Triangula EAS, SDG, EHG, GHy ſimilia inter ſe, ut & Triangula GDH, HAE; GSE, ESY: Primò, ſimilia ſunt Triangula EAS, SDG quia latera EA & AS, SD & DG circa angulos rectos A & D poſita proportionalia ſunt, nam (per Lemma præced.) eſt  $EA \times DG = CB^2$ , & per naturam focorum (& per 5. vel 6. 2. Elem.) eſt  $AS \times SD = CB^2$  ergo eſt  $EA \times DG = AS \times SD$  ideoque  $EA:AS = SD:DG$ ; Eadem ratione probatur Triangula GDH, HAE eſſe ſimilia, ob latera proportionalia GD & TH, HA & AE circa angulos rectos A & D poſita, eſt enim ut prius  $EA \times DG = CB^2 = DH \times HA$  ideoque  $DG:DH = HA:EA$ .

Secundò Triangula SDG, EGH ſunt ſimilia, latera enim GH & HE, GD & DS



DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.



$$= \frac{2Hy \times SY}{SI} \text{ sed } Hy \times SY = CB^2 \text{ \& SI}$$

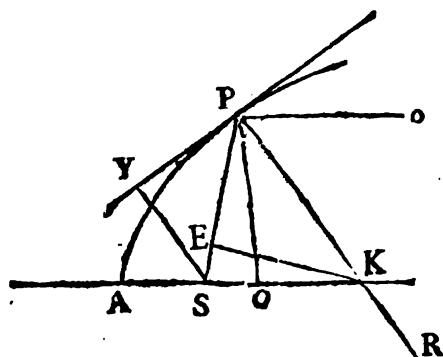
$$= 2AC, \text{ ergo } PE = \frac{2CB^2}{2AC} \text{ \& } 2PE = \frac{4CB^2}{2AC}$$

$$\text{sed Latus Rectum } L \text{ est } \frac{4CB^2}{2AC}, \text{ ergo } 2PE = L, \text{ five } PE \text{ est dimidium lateris Recti.}$$

$$237. 1. \text{ Coroll. Ex eo quod est } PS : PK = SY : PE \text{ five } \frac{1}{2}L, \text{ est } SY = \frac{L \times PS}{2PK} \text{ \& } PK$$

$$= \frac{L \times PS}{2SY}.$$

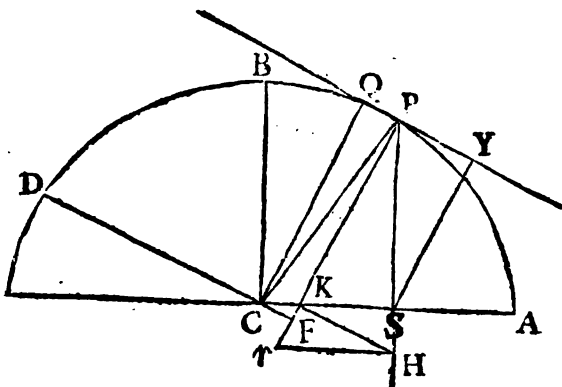
238. 1. Cor. Hoc Lemma cum suo Corollario de Parabola etiam verum est, sed aliter demonstratur, ducta ordinata POTriangula PKO, PKE sunt æqualia, propter Angulos rectos in O & E; latus PK commune, & angulum PKO angulo KPE æqualem, ducto enim Diametro Po, erit OPK æqualis PKO ob Parallelas AK & Po sed oPK est etiam æqualis angulo KPE quia perpendicularis dividit bifariam angulum SPo (per Theor. III. de Parab.) ergo angulus PKO = KPE, & (per 26. 1. Elem.) Triangulum PKO est æquale Triangulo PKE ideoque PE = KO,



sed KO est æqualis semilateri recto (per Theor. III. de parab.) ergo & PE.

239. Lemma V. In omni sectione conicâ cujus focus S, PY, tangens in P, SY & PK, tangenti perpendiculares, L, latus rectum, est radius osculi  $Pr = \frac{4PK^2}{L^2}$

$$= \frac{L \times SP}{2SY} \dots$$



Dem. : : : Sit APB ellipsis cujus semiaxes AC, BC, semidiametri conjugatæ PC, DC, ac proinde DF, tangenti PY parallela, atque adeo PF, QC, tangenti perpendiculares æquales sunt. Est (per Lem. XII. Newt.)  $CD : BC = AC : PF$ , &  $CD^2 : BC^2 = AC^2 : PF^2$ , ideoque est  $CD^2 = \frac{BC^2 \times AC^2}{PF^2}$

Et quia  $BC^2 = CQ \times PK$  five  $PF \times PK$  (233.) est  $CD^2 = \frac{PF \times PK}{PF^2} \times AC^2 = \frac{PK \times AC^2}{PF}$ ; sed est  $Pr = \frac{CD^2}{PF}$  (230.)

ergo

ergo est  $Pr = \frac{PK \times AC^2}{PF^2}$ ; est autem

$AC:BC=BC:\frac{1}{2}L$ , ergo  $BC^2=\frac{1}{2}L \times AC$ , ideoque  $PF \times PK = \frac{1}{2}L \times AC$ ,

ergo  $PF = \frac{L \times AC}{2PK}$  &  $PF^2 = \frac{L^2 \times AC^2}{4PK^2}$

idque substituat in valore  $Pr$  mox re-  
perto erit  $Pr = \frac{4PK^3}{L^2}$ , & quia  $PK =$

$\frac{L \times SP}{2SY}$  (237.) erit  $\frac{4PK^3}{L^2} = \frac{L \times SP^3}{2SY^3}$

$= Pr$ . Q. e. 1<sup>ma</sup>.

Idem eodem prorsus modo demonstra-  
tur in hyperbolâ. Q. e. 2<sup>ma</sup>.

In Ellipfi crescente focorum distantia

manet  $Pr = \frac{4PK^3}{L^2} = \frac{L \times SP^3}{2SY^3}$ , adeoque

idem etiam verum est cum focorum distan-  
tia infinita evadit, seu cum Ellipsis in Pa-  
rabolam mutatur. Q. e. 3<sup>ma</sup>.

240. Coroll. 1... Ex his facillima ori-  
tur constructio pro determinando radio  
curvaturæ in quavis sectione conicâ. Ex K,  
enim super PK, erigatur perpendicularis  
KH, cum PS concurrans in H, ex H  
erigatur super PH perpendicularis Hr,  
erit Pr, radius curvaturæ. Nam ob an-  
gulos rectos PKH, PHr, & lineas PK,  
SY, parallelas est  $SP:SY=Pr:PH=$   
 $PH:PK$ , atque inde  $SY^2:SP^2=PK:Pr$ ;

adeoque  $Pr = \frac{PK \times SP^2}{SY^2}$  sed  $SY =$

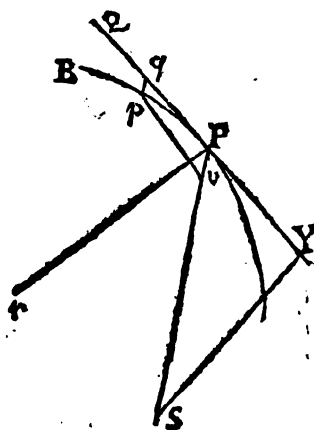
$\frac{L \times SP}{2PK}$  (237), ergo  $Pr = \frac{4PK^3}{L^2}$ , ac  
proinde Pr est radius osculi (239.).

241. Coroll. 2.... Quoniam in ver-  
ticebus sectionum conicarum principalibus  
 $SP=SY$ , erit ibi  $Pr = \frac{L \times SP^3}{2SY^3} = \frac{L}{2}$ ,  
seu radius osculi æqualis dimidio lateris  
recti principalis.

242. Theor. Datis in puncto P, vis cen-  
tripetæ quâ corpus curvam PpB describit  
quantitate absolutâ, vis illius directione PS,  
velocitate corporis, & positione tangentis  
PQ, datur curvæ PpB curvatura in P,  
seu radius osculi Pr.

Dem... Sit curvæ PpB, & circuli oscu-  
latoris arcus infinitesimus Pp, & quoniam  
velocitas corporis P revolvens finita sup-  
ponitur, vis centripeta constans est, & il-  
lius directio sibi parallela per arcum Pp,

Tom. I.



adeoque arcus ille est portio parabolæ cu-  
jus tangens PQ, & diameter PS (ex notâ  
40â.) Quoniam autem vis centripetæ quan-  
titas absoluta in P, data est, datumque proin-  
dè spatium quod corpus vi illâ constante,  
dato tempore percurreret, & præterea cor-  
poris P velocitas, ac tangentis PQ po-  
sitione data sunt, data est ratio qp sive Pv  
ad Pq sive pv, data ergo est parabola  
quam corpus P describeret, si vis centri-  
petæ eadem maneret & directionem habe-  
ret lineæ PS perpetuò parallelam. Cum  
igitur datus sit radius circuli parabolam da-  
tam in dato puncto osculantis (239.) dat-  
ur Pr, radius osculi in puncto P. Q. e. d.

243. Coroll. Hinc datis in puncto P,  
curvaturâ seu radio osculi Pr, positione tan-  
gentis PQ, velocitate corporis, & vis cen-  
tripetæ directione PS, datur vis illius quan-  
titas absoluta in P; nam propter datas posi-  
tionem Tangentis, & vis directionem, datur  
ratio SP ad SY & SP ad SY, sive  $\frac{SP^3}{SY^3}$  &

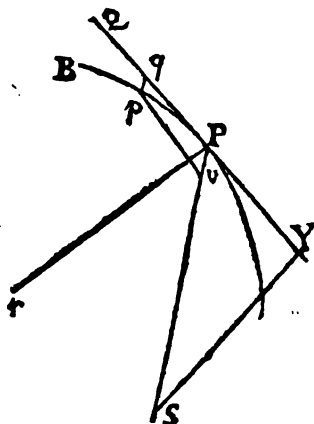
propter datum  $Pr = \frac{L \times SP^3}{2SY^3}$  datur  $\frac{L}{2}$  sive

L Latus rectum principale Parabolæ cujus  
arcus Pp est portio, PS Diameter & PQ  
Tangens unde datur tota Parabola & Latus  
rectum Diametri PS; Denique cum data sit  
velocitas corporis in P datur lineola Pq,  
vel pv dato tempore descripta, datur ergo  
abscissa Pv sive qp quæ est vis centripetæ  
quantitas absoluta.

Datis verò in P, vis centripetæ quantitate  
absolutâ, vis illius directione PS, positione  
tangentis PQ, radio osculi Pr, sive datâ  
curvaturâ, datur velocitas corporis in P;

T

&



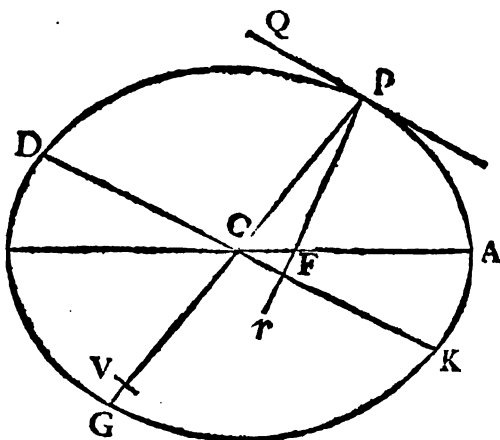
& generatim si ex his quinque, nimirum; vis centripetæ quantitate absolutâ, illius directione, velocitate corporis, positione tangentis & curvaturâ, quatuor data fuerint, quintum determinatum est.

244. *Theor.* Corpus P, circa centrum virium S datum revolvendo, curvam PpB describat, sintque data, vis centripetæ quantitas absoluta in puncto P, data lex secundum quam in variis à centro S distantis vis centripetæ agit, positio tangentis PQ, & curvatura in P, determinata ac unica est curva PpB, quam corpus P, circa centram virium S, potest describere... *Dem.* Quoniam datur centrum virium S & punctum P, datur quoque positio rectæ PS, hoc est, directio vis centripetæ, ac proinde ex cæteris etiam datis (243.) datur velocitas quâ corpus in puncto P movetur; sed datis in puncto P, vis centripetæ quantitate absolutâ, positione tangentis seu rectæ secundum quam projicitur corpus, velocitate projectionis determinatur proximum punctum p, tangentis in eo puncto p positio, corporis P in eo velocitas, ut & novâ distantia à centro pS, sed datâ lege vis centripetæ in variis à Centro distantis, datur iterum in puncto novo p, vis centripetæ, unde proximum punctum etiam determinabitur, ex his ergo datis omnia puncta curvæ PpB, successivè determinantur; ergo data ac unica est curva quam corpus P, his datis describere potest. *Q. e. D.*

*Coroll.* Iisdem manentibus, si describatur nova curva quæ curvam PpB quam corpus P describit osculetur in P, quæque proinde eandem habet tangentem PQ,

ut potè radio osculi PR, perpendicularem; impossibile est ut datis iis quæ numero 244. posuimus, corpus P, hanc novam curvam a priori diversam describat, hoc est, verba NEWTONI ferè usurpando, orbes duo se mutuo osculantes eadem vi centripetâ describi non possunt.

245. Hisce positis tandem probabimus quòd si vis centripetæ sit ut distantia à centro, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in centro virium, aut fortè in circulo in quem Ellipsis migrat focus coeuntibus.



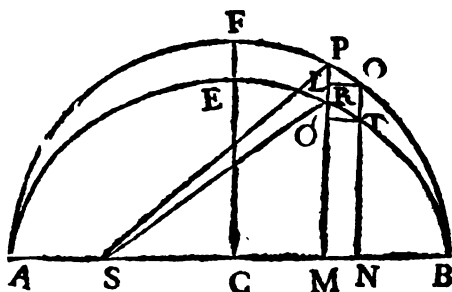
Data sint centrum virium C, & vis centripetæ quantitas absoluta, data à centro distantia CP, & corpus datâ cum velocitate secundum directionem datam rectæ PQ projiciatur, erit PQ tangens curvæ describendæ. Si fuerit CP ad tangentem PQ normalis, & velocitas quâ corpus P, projicitur æqualis velocationi quam idem corpus solâ vi centripetâ, ut est in P, constante sollicitatum acquireret, cadendo per dimidium radium PC, curva describenda erit circulus cujus centrum C, & radius CP (201.) si verò talis non fuerit velocitas projectionis, corpus P, aliam curvam describet, in quâ tangens PQ, non semper erit ad radium vectorem CP perpendicularis, cum hæc sit solius circuli proprietas, ut notum est. Sit ergò PQ ad radium vectorem CP obliqua, per centrum C ducatur recta CK, ipsi PQ par. l.





DE MO- directè, & corporum velocitates in verticibus principalibus in-  
TU COR- versè; hoc est, ut axes illi minores directè, & ordinatim appli-  
PORUM. catae ad idem punctum axis communis inversè; & propterea  
LIBER (ob æqualitatem rationum directarum & inversarum) in ratio-  
PRIMUS. ne æqualitatis.

Scho-



tionem habet semiaxis FC, ad alterum semiaxem EC. Q. e. D.

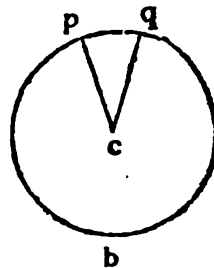
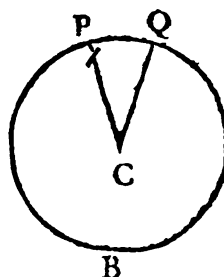
248. Coroll. 1.... Idem eodem prorsus modò demonstratur, si AFB fuerit Ellipsis communem axem AB, habens cum Ellipsi AEB. Et generatim duæ quævis figuræ AFB, AEB, quarum semiordinatæ QN, TN, sunt in datâ ratione & quarum est communis diameter AB, sunt inter se in ratione datâ ordinarum QN, TN.

249. Coroll. 2. Area circuli cuius diameter est medius proportionalis inter duos Ellipsis axes æqualis est areæ Ellipsis. Nam fit  $EC:R = R:FC$ , & radio R, describatur circulus, illius circuli area, erit ad aream circuli AFB, ut  $R^2$  ad  $FC^2$ , adeoque ut EC ad FC; Quare cum Ellipsis AEB, eandem habeat rationem ad circulum AFB (247), manifestum est aream circuli radio R, descripti æqualem esse areæ Ellipsis AEB.

250. Coroll. 3.... Quoniam  $R^2 = FC \times EC$ , & areæ circulorum sunt ut radiorum quadrata, erunt areæ Ellipsium ut axium rectangula.

251. Coroll. 4.... Patet etiam in Ellipsis vel ellipsi & circulo aut etiam in quibuscumque curvis quarum ordinatæ QN, TN, datam habent rationem, & quarum

est diameter communis AB, aream MRB, esse ad aream correspondentem MPB, ut est EC, ad FC, seu ut RM ad PM; sed ductis ex quocumque diametri puncto S, rectis SP, SR, est etiam triangulana SMR, ad triangulum SMP, ut MR ad MP, ob communem utriusque trianguli altitudinem MS; ergò sector SBR, est ad sectorem SBP, in ratione datâ EC, ad FC.

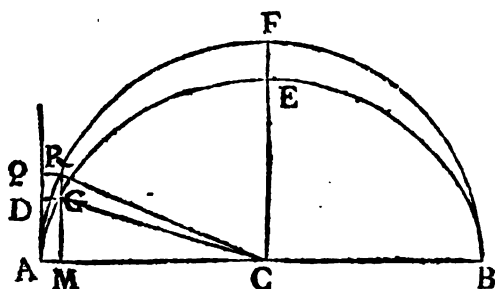


252. Theor. Corpora duo P, p, circa virium centra C, c, revolvendo, orbitas PQB, pqb, describant; tempus periodicum in orbitâ PQB, est ad tempus periodicum in alterâ orbitâ pqb, ut area PQBP, ad aream pqbp, directè & sectores PCQ, pcq, simul descripti inversè.... Dem.... ob æquabilem arearum circa centra C, c, descriptionem (prop. I.) tempus periodicum T, in orbe PQB, est ad tempus t, quo describitur sector PCQ, ut area PQBP, ad sectorem PCQ, & similiter tempus t, quo describitur sector pqc, est ad tempus periodicum θ, in orbe pqb, ut sector pcq, ad aream pqbp, hoc est  $T:t = PQBP \text{ area} : PCQ$ , &  $t:\theta = pcq : pqbp \text{ area}$ , unde per compositionem rationum & ex æquo  $T:\theta = PQBP \times pcq : pqbp \times PCQ$ . Q. e. D.

*Scholium.*

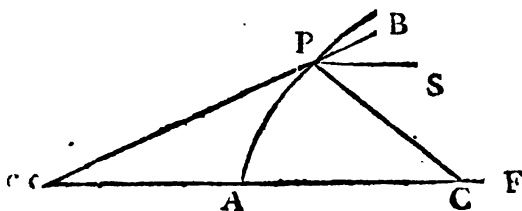
DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

Si ellipsis centro in infinitum abeunte vertatur in parabolam, corpus movebitur in hac parabola; & vis ad centrum infinitè distans jam tendens evadet æquabilis. Hoc est theorema *Galilæi*. (e) Et si conic sectio parabolica (inclinatione plani ad conum sectum mutata) vertatur in hyperbolam, movebitur corpus in hujus



milis Ellipsi A, & axem unum communem habens cum Ellipsi B, tempora periodica in Ellipsis similibus A & C, sunt æqualia (per corol. 3. & 8. prop. I V. Newt.) & tempora periodica in ellipsis C, & B, axem alterum communem habentibus sunt etiã æqualia (253.) tempora igitur periodica in Ellipsis quibuscvis A & B sunt æqualia Q. e. D.

253. Si corpora duo Ellipses AEB; AFB, quarum est axis communis AB, describant, viribus ad centrum Ellipsium C tendentibus, tempora periodica erunt æqualia.... Dem.... Sint arcus AR, AG, infinitesimi eodem tempore descripti, AQ tangens ad verticem A, QR, DG, axi AB, parallelæ, & quoniam vires centrales sunt ut QR, DG (prop. VI.) & ob communem distantiam à centro AC, æquales sunt vires, seu eadem vis (prop. X.) erit  $QR = DG$ , sectores verò ACG, ACR, sunt ut GM, RM, seu EC, FC, (251.) & areæ Ellipsium AEB, AFB, sunt etiã ut EC, FC, (247. 248.) quare cum tempora periodica in illis Ellipsis sint ut areæ AEB AFB directè & sectores ACG, ACR, inversè (252.) erunt eadem ut EC ad FC directè, & EC ad FC inversè, hoc est, ut  $EC \times FC$  ad  $FC \times EC$ , ac proinde in ratione æqualitatis. Q. e. D.



254. His positis facile demonstratur æqualia esse revolutionum in Ellipsis universis circum centrum idem factarum periodica tempora. Nam duæ quævis ellipses circa idem centrum descriptæ dicantur A, & B, describatur tertia Ellipsis C, si

(e) 255. Et si conic sectio parabolica (inclinatione plani ad conum sectum mutata), vertatur in hyperbolam movebitur corpus in hujus perimetro vi centripetâ in centrifugam versâ. Cùm enim Ellipsis centrum C, à vertice A, in plagam F abit, vis centripetâ directio est per lineas PC, PF, à puncto P, ad centrum, & ubi infinita evadit distantia PC, atque PS, ad centrum ducta axi parallela fit, Ellipsi in parabolam mutatâ, directio est à puncto P, ad S, secundum lineam PS; mutatâ in Hyperbolam parabolâ, & centro ad alteram verticis A partem translato in c, vis centralis directio est secundum lineam PB, à P ad B, hoc est, à centro C, ad P, adeoque in centrifugam versâ (228.)

DE MO- hujus perimetro vi centripetâ in centrifugam versâ. Et quemad-  
TU COR- modum in circulo vel ellipsi si vires tendunt ad centrum figu-  
PORUM. ræ in abscissâ positum, hæ vires augendo vel diminuendo ordi-  
LIBER natas in ratione quâcunque datâ, vel etiam mutando angulum  
PRIMUS. inclinationis ordinarum ad abscissam, semper augentur vel di-  
minuuntur in ratione distantiarum à centro, si modo tempora  
periodica maneant æqualia; (f) sic etiam in figuris universis si  
ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione quâcunque datâ,  
vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore pe-

256. Ex quibus sequitur hæc generalis  
Lex; Si corpus revolvatur in sectione conicâ, & vis centralis tendat ad sectionis centrum, aut à centro, vis illa erit directè ut distantia à centro, & contrâ si vis fuerit ut distantia à centro, corpus movetur in sectione conicâ. (245. 246.)

(f) 257. In figuris universis, si ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione datâ vel angulus ordinationis mutetur, manente tempore Periodico, vires augentur vel minuuntur in ratione distantiarum à Centro. Hujus veritas sequentium Lemmatum ope patebit.

*Lemma.* In figurâ quâvis A Q D, cujus diameter A D, ad hanc diametrum ordinatæ Q E, N G, augeantur vel minuuntur in ratione datâ Q E, ad P E, vel ad angulum quemvis datum P E D, inclinentur, novaque describatur curva A P D, per novarum ordinarum extrema transiens, sitque centrum virium C, in diametro positum utrique curvæ commune, rectæ P H, Q h, quæ curvas in punctis correspondentibus Q, P, tangunt, ad idem diametri punctum H convergunt.... *Dem...* Ductis rectis P t, Q v, diametro A D parallelis, erit Q v = G E, = P t, & (per hypothesim) n v : m t = E Q : E P, unde & alternando n v : E Q = m t : E P, & coeuntibus punctis n & Q, m & P, erit propter similitudinem triangulorum n v Q & Q E h m t P & P E H

$$n v : E Q = Q v (G E) : E h$$

$$m t : E P = P t (G E) : E h$$

Cùm ergo sit n v : E Q = m t : E P, erit G E : E h = G E : E h, ideoque E H = E h,

ac proinde tangentes ad idem diametri punctum H convergunt. Q. e. D.

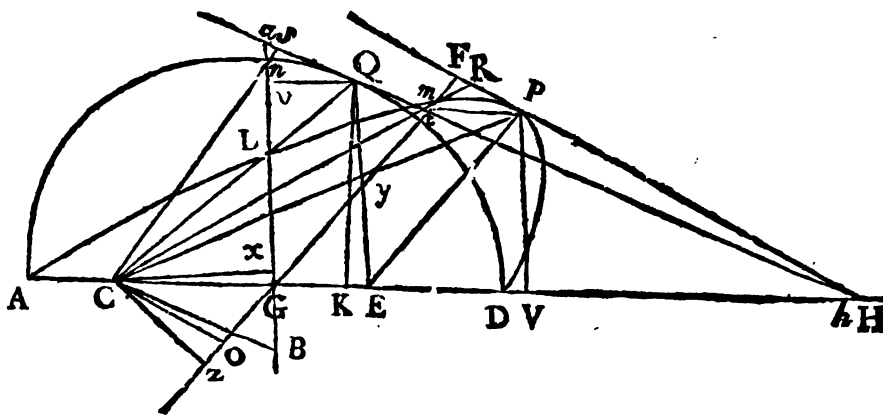
258. *Lemma.* Iisdem manentibus sector evanescens, C Q n, est ad sectorem C P m, in alterâ curvâ correspondentem ut area A Q D, ad aream A P D... *Dem...* ob parallelas G m & E P, G n, & E Q, est G y : C G = E P : C E & C G : G L = C E : E Q undè ex æquo G y : G L = E P : E Q = G m : G n (per const.) & hinc G m — G y : G n — G L = y m : L n = G m : G n = E P : Q E. Ex puncto C, demittantur in G m, & G n, perpendiculares C z, C x; & ex punctis P & Q, in diametrum A D, perpendiculares P V, Q K, & erit triangulum C y m : triang. C L n = y m × C z : L n × C x = G m × C z : G n × C x. Verum ob similia triangula C z G, & P V E, C x G & Q K E, est C z : C G = P V : P E, & C G : C x = Q E : Q K : atque adeò per compositionem rationum C z : C x = P V × Q E : Q K × P E = P V × G n : Q K × G m (per const.) cum ergo sit triangulum C y m : triang. C L n = G m × C z : G n × C x = G m × P V × G n : G n × Q K × G m = P V : Q K, & P V sit ad Q K, ut parallelogrammum G E P m, ad parallelogrammum G E Q n, hoc est, (per Lem. IV.) & per construct. ut area A P D, ad aream A Q D; ergò triangula C y m, C L n, sunt in ratione arearum A P D, A Q D; at punctis m & P, n & Q coeuntibus, sector C P m, æquatur triangulo C y m, & sector C Q n triangulo C L n; sunt igitur sectores illi evanescentes ut areæ A P D, A Q D, directè. Q. e. d.

259. *Theor.* Iisdem manentibus, si tempora

## 151

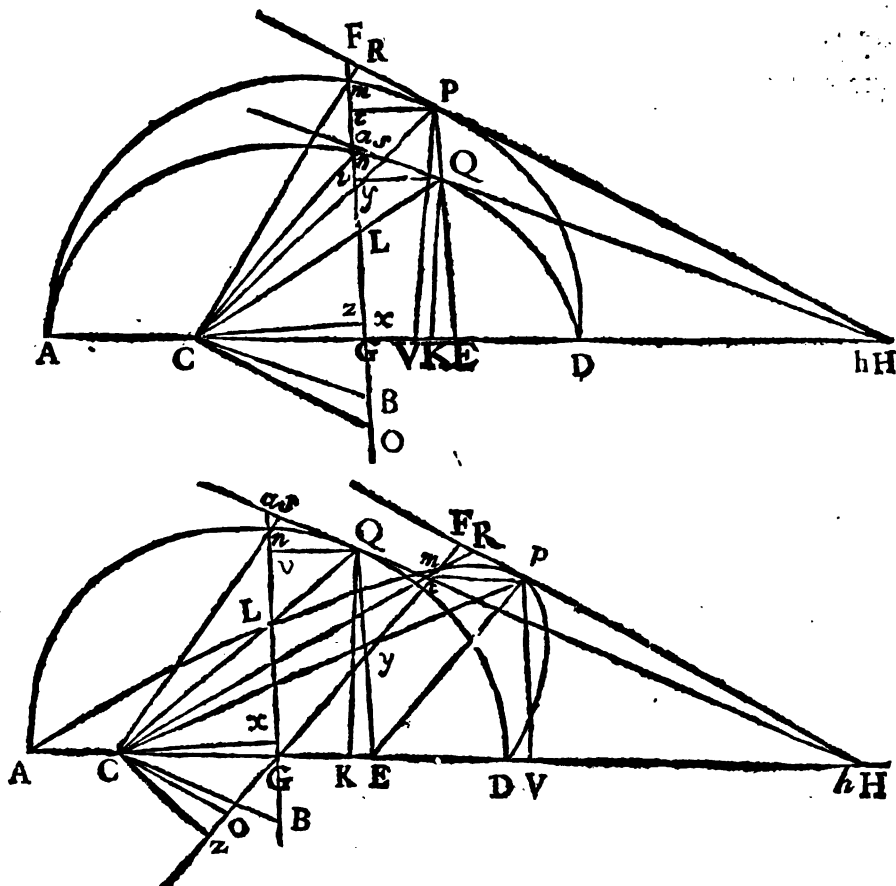
TU COR-  
 PORUM.

LIBER  
PRIMUS.



*Demonst.* Figura A Q D rectis ex cen-

tro C ductis in sectores innumeros inter se æquales, ut C Q n, & figura A P d, in totidem sectores correspondentes, ac proinde etiam inter se æquales (258), ut C P m divisæ intelligantur; & ob eundem secto-



fectorum in utraq̃ue figurâ numerum, æqua-  
bilem illorum descriptionem (*prop. I.*) &  
æqualia tempora periodica, sectores CP m  
CQ n, æquali tempore describuntur. Qua-  
re (*per prop. VI.*) Vires centripetæ in  
punctis P & Q, sunt inter se ut rectæ m R,  
n S, punctis m & P, n & Q coeuntibus;  
verum propter Parallelas QE, a G & PE,  
FG, est, a G : FG = QE : PE, ( 257 )  
& quia n G & m G in eadem sunt ratio-  
ne, iis ex a G & FG subductis manent a n  
ad Fm sicut QE ad PE; ductis autem  
ex C, Parallelis CB CO ad tangentes  
a H FH, Triangula BCG & OGC sunt  
similia triangulis a GH, FGH unde est

$$\text{BG: a G} = \text{GC: GH}$$

$$\text{\& OG: FG} = \text{GC: GH} \text{ ideoque}$$

$BG:OG=aG:FG=QE:PE=nG:$   
 $mG$  & jungendo terminos primæ & secundæ  
 rationis terminis ultimæ est  $Bn:Om=$   
 $QE:PE=a:n:Fm$ . Denique quia ob  
 $CB, CO, Tangentibus aH FH Paralle-$   
 $las, similia etiam sunt Triangula, a n S$   
 &  $nCB, FmR$  &  $mCO$ , est

$$B_n : n a = C_n : S_n$$

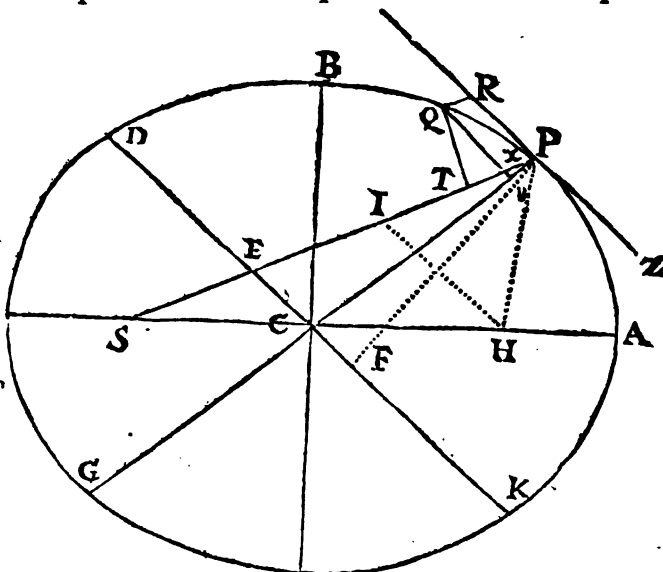
& est  $Fm : mO = Rm : mC$ , & Compositis Rationibus est  $Bn \times Fm : na \times mO = Cn \times Rm : Sn \times mC$ , sed quia  $Bn : Om = an : Fm$ , est  $Bn \times Fm = an \times Om$ , ergo etiam  $Cn \times Rm = Sn \times mC$ , ideoque  $Cn : Cm = Rm : Sn$ ; siue distantia à Centro in eadem sunt ratione ac vires Centrales.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM. •  
LIBER  
PRIMUS.

LIBER  
PRIMUS.

*Revolvatur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripeta tenden-  
tis ad umbilicum ellipseos.*

Esto ellipſeos umbilicus  $S$ . Agatur  $SP$  ſecans ellipſeos tum dia-  
 metrum  $DK$  in  $E$ , tum ordinatim applicatam  $Qv$  in  $x$ , & com-  
 pleatur parallelogrammum  $QxPR$ . Patet  $EP$  æqualem eſſe ſe-  
 miaxi majori  $AC$ , eo quod, actâ ab altero ellipſeos umbilico  
 $H$  lineâ  $HI$  ipſi  $EC$  parallelâ, ob æquales  $CS$ ,  $CH$  æquen-  
 tur  $ES$ ,  $EI$ , (8)  
 adeo ut  $EP$  ſemi  
 ſumma ſit ipſa-  
 rum  $PS$ ,  $PI$ , id  
 eſt (ob parallelas  
 $HI$ ,  $PR$ , &  
 angulos æquales  
 $IPR$ ,  $HPZ$ )  
 ipſarum  $PS$ ,  $PH$ ,  
 quæ conjunctim  
 axem totum  $2AC$   
 adæquant. Ad  
 $SP$  demittat-  
 ur perpendiculari-  
 ſ  $QT$ , & ellip-  
 ſeos latere recto



prin-

(s) 260. Quia (per prop. 48. lib. 3. Conic. Apoll. sup. Theor. IV. de Ellipsi) æquales sunt anguli quos rectæ PH, PS, constituunt cum tangente PR, & ob parallelas HI, PR, æquales quoque sunt

anguli alterni  $\angle PIH$ ,  $\angle PHI$ , æquales erunt  
 rectæ  $PI$ ,  $PH$ , adeoque  $EP = \frac{PS + PH}{2}$   
 =  $AC$ , (prop. 52. lib. 3. Conic. Apoll.  
*superius Theor. III. de Ellip.*).

**V**

DE MO-  
TU COR-  
PORUM

**LIBER  
PRIMUS.**

[illegible]

is

(1) 261. In Ellipsi & hyperbolâ latus  
rectum principale  $L = \frac{2BC^2}{AC}$  nam 2 AC:

$$2BC = 2BC:L, \text{ und } L = \frac{4BG^2}{2AC} = \frac{2BC^2}{AC}.$$

(i) Per constructionem  $QR = Px$ ; sed propter Triangula similia  $Pxv$ ,  $PEC$   $Px: Pv = PE(AC): PC$ , ergo  $QR: Pv = AC: PC$ .

(<sup>1</sup>) Per naturam Conicorum, facta partium Diametri sunt ad quadrata Ordinatum ut Diametri transversæ quadratum ad quadratum ejus conjugatæ (*Vide superius de Conicis Theor. II. de Ellipsi & de Hyperbolâ.*

(1) Est  $CA^2:PF^2=CD^2:CB^2$ ;  
nam per Lem. XII.  $PF \times CD = AC \times BC$ ;  
adeoque  $PF^2 \times CD^2 = CA^2 \times BC^2$ ;  
ac proinde  $CA^2:PF^2=CD^2:CB^2$ .

(=) 262. Scriptis seorsim analogiis,  
res clara fit.

$$L \times QR : L \times P \vee = A \dot{C} : PC$$

$$L \times P_v : G_v P = L : G_v$$

$$G \vee P : Q \vee ^2 = P C ^2 : C D ^2$$

$$QV^2:QT^2=CD^2:CB^2.$$

Unde conjunctis his omnibus rationibus;  
 $L \times QR : QT^2 = AC \times L \times PC^2 \times$   
 $CD^2 : PC \times Gv \times CD^2 \times CB^2$ , hoc  
 est, ob  $AC \times L = 2BC^2$ ,  $L \times QR :$   
 $QT^2 = 2PC : Gv$ , & ob  $2PC = Gv$ ,

$$L \times QR = QT^2, \text{ \& } L = \frac{QT^2}{QR}.$$

tis  $Q$  &  $P$  coeuntibus æquantur  $2PC$  &  $Gv$ . Ergo & his proportionalia  $L \times QR$  &  $QT$  quad. æquantur. Ducantur hæc æqualia in  $\frac{SPq}{QR}$ , & fiet  $L \times SPq$  æquale  $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ . Ergo (per *corol. 1. & 5. prop. vi.*) vis centripeta reciprocè est ut  $L \times SPq$ , id est, reciprocè in ratione duplicata distantiae  $SP$ . *Q. E. I.*

DE MOTU CORPORUM.  
LIBER PRIMUS.

*Idem aliter.*

Cum vis ad centrum ellipseos tendens, quâ corpus  $P$  in ellipti illâ revolvi potest, sit (per *corol. 1. prop. x.*) ut  $CP$  distantia corporis ab ellipseos centro  $C$ ; ducatur  $CE$  parallela ellipseos tangenti  $PR$ ; & vis, quâ corpus idem  $P$  circum aliud quodvis ellipseos punctum  $S$  revolvi potest, si  $CE$  &  $PS$  concurrant in  $E$ , (<sup>n</sup>) erit ut  $\frac{PE \text{ cub.}}{SPq}$  (per *corol. 3. prop. vii.*) hoc est, si punctum  $S$  sit umbilicus ellipseos, ideoque  $PE$  detur, ut  $SPq$  reciprocè. *Q. E. I.*

Eâdem brevitate, quâ traduximus problema quintum ad parabolam, & hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem problematis, & usum ejus in sequentibus non pigebit casus cæteros demonstratione confirmare.

P R O.

(<sup>n</sup>) Nam (per *Coroll. III. Prop. VII.*) vis tendens ad centrum  $C$ , quam exponat recta  $CP$ , est ad vim tendentem ad aliud punctum  $S$ , quam exponat recta  $AS$ , ut  $CP \times SP^2$  ad cubum rectæ quæ à centro  $A$  ad Tangentem  $RPZ$  duceretur parallela ad lineam  $SP$  à secundo virium centro ad punctum  $P$  curvæ ductam, quæ quidem recta æqualis foret  $PE$ , quoniam ipsi esset Parallela & inter easdem Paral-

lelas  $DCRPZ$ , adeoque  $CP \times SP^2$ :  $PE$  =  $CP : A = \frac{PE}{SP^2}$ ; hoc est, si punctum  $S$  sit umbilicus Ellipseos, adeoque  $PE = AC$  (260) detur, erit vis ut  $SP^2$  reciprocè; hic autem supponitur talem esse vim ad centrum  $C$  tendentem ut tempora periodica circa centra  $C$ , &  $S$ , æqualia sint, quod supponi potest.



DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

## PROPOSITIO XII. PROBLEMA VII.

*Moveatur corpus in hyperbolâ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.*

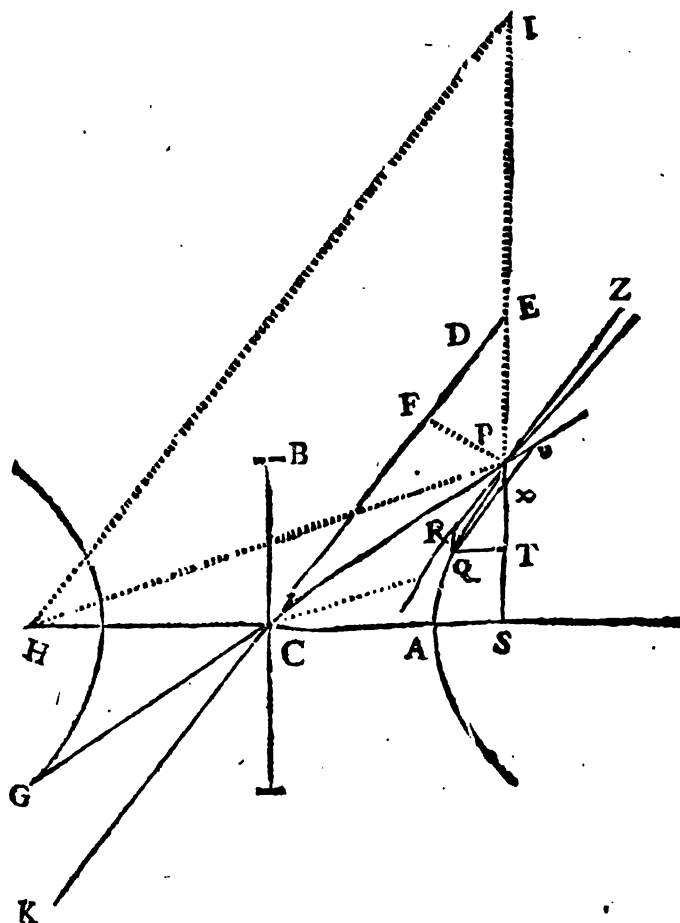
Sunto  $CA$ ,  $CB$  semiaxes hyperbolæ;  $PG$ ,  $KD$ , diametri alia conjugatæ;  $PF$  perpendicularum ad diametrum  $KD$ ; &  $Qv$  ordinatim applicata ad diametrum  $GP$ . Agatur  $SP$  secans cum diametrum  $DK$  in  $E$ , tum ordinatim applicatam  $Qv$  in  $x$ , & compleatur parallelogrammum  $QRPx$ . (°) Patet  $EP$  æqualem esse semiaxi transverso  $AC$ , eo quod, actâ ab altero hyperbolæ umbilico  $H$  lineâ  $HI$ , ipsi  $EC$  parallelâ, ob æquales  $CS$ ,  $CH$  æquentur  $ES$ ,  $EI$ ; adeo ut  $EP$  semidifferentia sit ipsarum  $PS$ ,  $PI$ , id est (ob parallelas  $IH$ ,  $PR$  & angulos æquales  $IPR$ ,  $HPZ$ ) ipsarum  $PS$ ,  $PH$ , quarum differentia axem totum  $2AC$  adæquat. Ad  $SP$  demittatur perpendicularis  $QT$ .

Et hyperbolæ latere recto principali (seu  $\frac{2BCq}{AC}$ ) dicto  $L$ , erit

$L \times QR$  ad  $L \times Pv$  ut  $QR$  ad  $Pv$ , seu  $Px$  ad  $Pv$ , id est (ob similia triângula  $Pxu$ ,  $PEC$ ) ut  $PE$  ad  $PC$ , seu  $AC$  ad  $PC$ . Erit etiam  $L \times Pv$  ad  $Gv \times Pv$  ut  $L$  ad  $Gv$ ; & (ex naturâ conicorum) rectangulum  $GvP$  ad  $Qv$  quad. ut  $PCq$  ad  $CDq$ ; & (per corol. 2. lem. VII.)  $Qv$  quad. ad  $Qx$  quad. punctis  $Q$  &  $P$  coeuntibus sit ratio æqualitatis; &  $Qx$  quad. seu  $Qv$  quad. est ad  $QTq$  ut  $EPq$  ad  $PFq$ , id est, ut  $CAq$  ad  $PFq$ , sive (per lem. XII.) ut  $CDq$  ad  $CBq$ : & conjunctis his omnibus rationibus  $L \times QR$  fit ad  $QTq$  ut  $AC \times L \times PCq \times CDq$ , seu  $2CBq \times PCq \times CDq$  ad  $PC \times Gv \times CDq \times CBq$ , sive ut  $2PC$  ad  $Gv$ . Sed punctis  $P$  &  $Q$  coeuntibus æquantur  $2PC$  &  $Gv$ . Ergo & his propor-

(°) 263. Eff  $SE = SP + PE$  & ob æquales  $ES$ ,  $EI$ , est  $PI = EI + PE = ES + PE = SP + 2PE$ , ac proinde  $PI - SP = 2PE$ , ac  $PE$  est semidifferentia ipsarum  $PS$ ,  $PI$ ; sed angulus  $HPR = RPS$ , angulus enim interceptus inter lineas à focus ad punctum Hyperbolæ ductas bifariam dividitur per Tangentem (per prop. 48. lib. 3. Conic. Apoll. vide Theor. V. de Hyp.)

&  $RPS = EPZ$  (per 15. 1. Elem.) adeoque  $IPR = HPZ$ ; & ob parallelas  $IH$ ,  $PR$ , angulus  $PHI = HPR = IPZ = HIP$ , unde  $HP = PI$ , adeoque  $EP$ , est semidifferentia ipsarum  $PS$ ,  $PH$ ; & quia differentia rectarum  $PS$ ,  $PH$ , axem totum  $2AC$ , adæquat (per prop. 51. lib. 3. Conic. Apoll. Vide sup. Theor. IV. de Hyperb.) est  $EP = AC$ .



portionalia  $L \times QR$  &  $QTq$  (P) æquantur. Ducantur hæc æqualia in  $\frac{SPq}{QR}$ , & fiet  $L \times SPq$  æquale  $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ . Ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta reciprocè est ut  $L \times SPq$ , id est, reciprocè in ratione duplicatâ distantiae  $SP$ . Q. E. I.

*Idem aliter.*

Inveniatur vis, quæ tendit ab hyperbolæ centro  $C$ . Prodiabit hæc distantiae  $CP$  proportionalis. Inde vero (per corol. 3. prop.

(P) 264. Notandum est quod in hyperbola sicut in Ellipsi, (ut liquet ex demonstratione Prop. X. & XI.) latus rectum

principale sive  $L = \frac{QT^2}{QR}$ .



tripetâ in centrifugam versâ movebitur in hyperbolâ oppositâ. DE MOTU CORP. PRIMUS.

LEMMA XIII.

(<sup>1</sup>) *Latus rectum parabolæ ad verticem quemvis pertinens est quadruplum distantie verticis illius ab umbilico figuræ.*  
Patet ex conicis.

LEMMA XIV.

*Perpendiculum, quod ab umbilico parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium est proportionale inter distantias umbilici à puncto contactus & à vertice principali figuræ.*

Sit enim  $AP$  parabola,  $S$  umbilicus ejus,  $A$  vertex ptinpalis,  $P$  punctum contactus,  $PQ$  ordinatim applicata ad diametrum principalem,  $PM$  tangens diametro principali occurrens in  $M$ , &  $SN$  linea perpendicularis ab umbilico in tangentem. Jungatur  $AN$  & ob æquales  $MS$  &  $SP$ ,  $MN$ , &  $NP$ ,  $MA$  &  $AO$  parallelæ erunt rectæ  $AN$  &  $OP$ ; & inde triangulum  $SAN$  rectangulum erit ad  $A$ , & simile triangulis æqualibus  $SNM$ ,  $SNP$ : ergo  $PS$  est ad  $SN$  ut  $SN$  ad  $SA$ . Q. D. E.

Corol. 1.  $PSq$  est ad  $SNq$  ut  $PS$  ad  $SA$ .

(<sup>1</sup>) Corol. 2. Et ob datam  $SA$  est  $SNq$  ut  $PS$ .

Corol. 3. Et concursus tangentis cujusvis  $PM$  cum rectâ  $SN$ , quæ ab umbilico in ipsam perpendicularis est, incidit in rectam  $AN$  quæ parabolam tangit in vertice principali.

P R O-

(<sup>1</sup>) 266. Dem. Illius demonstrationem jam superius in Compendio de Conicis, Theor. IV. de Parabolâ dedimus.

(<sup>1</sup>) Cum sit (per coroll. 1.)  $SA \times BS^2 = SN^2 \times PS$ , adeoque  $SA \times PS =$

$SN^2$ ; erit ob datam  $SA$ ,  $SN^2$  ut  $PS$ , id est, variationes quadrati  $SN^2$ , in eadem parabolâ erunt ut variationes rectæ  $SP$  five ut distantia à focis.

## PROPOSITIO XIII. PROBLEMA VIII.

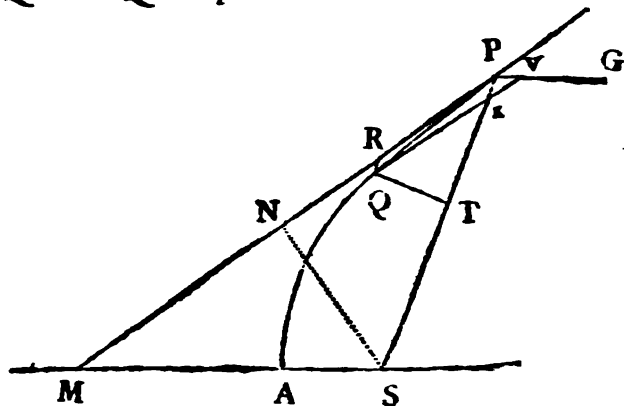
*Moveatur corpus in perimetro parabolæ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.*

Maneat constructio lemmatis, sitque  $P$  corpus in perimetro parabolæ, & à loco  $Q$ , in quem corpus proxime movetur, age ipsi  $SP$  parallelam  $QR$  & perpendicularem  $QT$ , necnon  $Qv$  tangenti parallelam, & occurrentem tum diametro  $PG$  in  $v$ , tum distantia  $SP$  in  $x$ . Jam ob similia triângula (\*)  $Pxv$ ,  $SPM$ , & æqualia unius latera  $SM$ ,  $SP$ , æqualia sunt alterius latera  $Px$  seu  $QR$  &  $Pv$ . Sed ex conicis quadratum ordinatæ  $Qv$  æquale est rectangulo sub latere recto & segmento diametri  $Pv$ , id est (per lem. xiii.) rectangulo  $4PS \times Pv$ , seu  $4PS \times QR$ ; & punctis  $P$  &  $Q$  coeuntibus, ratio  $Qv$  ad  $Qx$  (per corol. 2. lem. vii.) fit ratio æqualitatis. Er-

go  $Qx$  quad. eo in casu æquale est rectangulo  $4PS \times QR$ . Est autem (ob similia triângula  $QxT$ ,  $SPN$ )  $Qxq$  ad  $QTq$  ut  $PSq$  ad  $SNq$ , hoc est (per corol. 1. lem. xiv.) ut  $PS$

ad  $SA$ , id est, ut  $4PS \times QR$  ad  $4SA \times QR$ , & inde (per prop. ix. lib. v. elem.) (\*\*)  $QT^2$  &  $4SA \times QR$  æquantur.

Ducantur hæc æqualia in  $\frac{SPq}{QR}$ , & fiet  $\frac{SPQ \times QTq}{QR}$  æquale  $SP$



(\*) \* Nam ob parallelas  $MP$  &  $Qv$ ,  $MS$  &  $PG$ , est angulus  $vPx = PSM$  &  $Pxv = QxT = MPS$ .

(\*\*) 267. Quoniam latus rectum principale  $L = 4AS$ , & est  $4AS \times QR =$

$QT^2$ , erit etiam in parabolâ ut in cæteris Sectionibus conicis (264), latus rectum principale  $L = \frac{QT^2}{QR}$ .

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 161

$SP \times 4SA$ : & propterea (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis DE Mo-  
centripeta est reciprocè ut  $SP \times 4SA$ , id est, ob datam  $4SA$  TU COR-  
reciprocè in duplicatâ ratione distantiae  $SP$ . Q. E. I. PORUM.

Corol. 1. (\*) Ex tribus novissimis propositionibus consequens PRIMUM.  
est, quod si corpus quodvis  $P$  secundum lineam quamvis rectam  
 $PR$  quâcunque cum velocitate exeat de loco  $P$ , & vi centri-  
petâ, quæ reciprocè proportionalis quadrato distantiae locorum  
à centro, simul agitetur; movebitur hoc corpus in aliquâ sec-  
tionum conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra.  
Nam datis umbilico, & puncto contactus, & positione  
tangents, describi potest sectio conica, quæ curvaturam datam  
ad punctum illud habebit. Datur autem curvatura ex datâ vi  
centripetâ, & velocitate corporis: & orbes duo se mutuo tangen-  
tes eâdem vi centripetâ eâdemque velocitate describi non possunt.

Co-

(\*) 268. Si corpus moveatur in aliquâ  
sectionum conicarum umbilicum habente  
in centro virium, vis centripeta erit reci-  
procè proportionalis quadrato distantiae  
locorum ab umbilico, & contra si vis cen-  
tripeta fuerit quadrato distantiae à centro  
virium reciprocè proportionalis, corpus  
movebitur in aliquâ sectionum conicarum...

Dem... Prima pars propositionis à NEW-  
TONO eleganter demonstrata, potest adhuc  
aliter & generatim demonstrari. Vis

centripeta ut  $\frac{SP}{SY \times R}$  (212.) sed in

omni sectione conicâ  $R = \frac{L \times SP}{2SY}$  (239.)

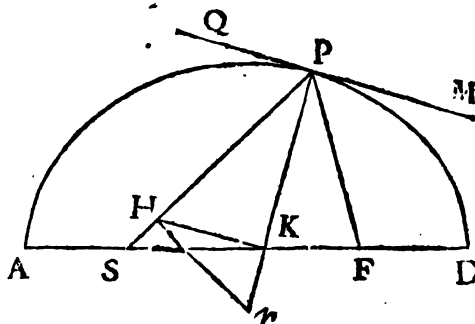
Ergò  $\frac{SP}{SY \times R} = \frac{2SY \times SP}{SY \times L \times SP} = \frac{2}{L \times SP^2}$

hoc est, ob datam  $\frac{2}{L}$ , vis est ut  $\frac{1}{SP^2}$ .

Q. e. IUM.

Corpus  $P$ , datâ cum velocitate secun-  
dum directionem datam  $PQ$  projiciatur,  
sitque vis centripetæ ad punctum  $S$  ten-  
dentis quantitas absoluta data in puncto  
dato  $P$ , in variis à centro distantis ea  
vis sit semper in ratione inversâ quadrati  
distantiæ à centro  $S$ , si ea fuerit corporis  
 $P$  velocitas quam vi centripetâ ut est in

Tom. I.



$P$  uniformiter urgente acquireret caden-  
do per  $\frac{1}{2} SP$  & præterea  $PS$  sit ad  $PQ$   
perpendicularis, corpus  $P$  circulum descri-  
bet cujus centrum  $S$  & radius  $PS$  (201.)  
Si verò alia fuerit velocitas, aut  $PS$  ad  
 $PQ$  obliquâ, corpus  $P$  aliam describet  
orbitam in quâ tangens  $PQ$ , non semper  
erit ad radium vectorem  $SP$  perpendicularis.  
Sit igitur  $PQ$  ad  $SP$  obliqua, datur  $Pr$ ,  
radius circuli orbitam à corpore  $P$  de-  
scribendam osculantis in  $P$ ; ex  $r$  in  $PS$   
demittatur perpendicularis  $rH$ , & ex  $H$   
in  $Pr$  perpendicularis  $HK$ , jungaturque  
 $X$   $SK$ ;

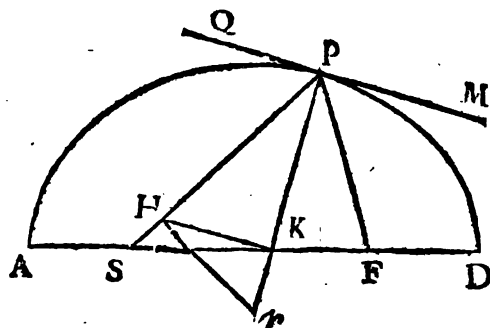
DE MO-  
TUS COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Corol. 2.* Si velocitas, quâcum corpus exit de loco suo  $P$ , ea sit, quâ lineola  $PR$  in minimâ aliquâ temporis particulâ describi possit; & vis centripeta potis sit eodem tempore corpus idem movere per spatium  $QR$ : movebitur hoc corpus in conicâ aliquâ sectione; cujus latus rectum principale est quantitas illa  $(\gamma)$

$\frac{QTq}{QR}$ , quæ ultimo fit, ubi lineolæ  $PR$ ,  $QR$  in infinitum diminuuntur. Circulum in his corollariis refero ad ellipsin; & casum excipio, ubi corpus rectâ descendit ad centrum.

P R O-

$SK$ ; Deindè fiat angulus  $QPF$  complementum ad duos rectos anguli  $QPS$ , & si fuerit  $PF$  parallela ipsi  $SK$ , describatur parabola cujus umbilicus  $S$ , axis  $SK$ , & punctum perimetri  $P$ , data sunt. Si verò  $PF$  ipsi  $SK$  occurrat in puncto aliquo  $F$ , tunc focus  $S$ , &  $F$ , & perimetri puncto  $P$  datus describatur Hyperbola, si puncta  $S$  &  $F$  cadant ad eandem partem puncti  $K$ , & Ellipsis si cadant ad partes contrarias, & corpus  $P$  movebitur in sectione conicâ per eam constructionem descriptâ. Nam (per construct.) angulus  $QPF$ , est complementum anguli  $QPS$ , ad duos rectos; sed angulus  $SPM$ , est quoque ejusdem anguli  $QPS$ , complementum ad duos rectos, ac proindè  $QPF = SPM$ , ergò subducto communi angulo  $SPF$ , erit angulus  $QPS = FPM$ , adeoque  $QP$ , tangens sectionis in  $P$ , (prop. 48. Lib. 3. Conic. Apoll. & per Theor. III. aut IV. de Hyp. Ell. & Parab.) Cum igitur sectionis axis sit  $SK$ , &  $PK$  ad tangentem  $PQ$  normalis (per constr.) erit  $Pr$  radius curvaturæ sectionis in puncto  $P$ , (239.) eadem igitur est sectionis conicæ & orbitæ quam corpus  $P$  describit tangens atque curvatura in puncto  $P$ , porro sectio conica  $DPA$  describi potest vi aliquâ centripetâ ad umbilicum  $S$  tendente quæ sit semper reciprocè proportionalis quadrato distantie ab illo puncto  $S$  (per superius demonstrata) & ex datis corporis alicujus  $A$  sectionem describentis, velocitate in puncto  $P$ , directione tangentis  $PQ$ , directione vis  $PS$ , & curvaturâ sectionis conicæ in  $P$ , datur vis centripetæ quantitas absoluta in puncto  $P$ ,



(242.) quâ corpus  $A$  in sectione conicâ retinetur in  $P$ , ponamus velocitatem corporis  $A$  eandem cum velocitate projectionis corporis  $P$  orbitam suam describentis, tùm eadem erit ejus orbitæ & Sectionis Conicæ curvatura in  $P$ , idem virium centrum  $S$ , idem punctum  $P$ , eadem tangens  $PQ$ , eadem velocitas projectionis, eadem lex vis centripetæ, ac proindè eadem illius quantitas absoluta in puncto  $P$ , tam in sectione conicâ quàm in orbitâ à corpore  $P$  describendâ. Cùm igitur corpus  $P$ , iis positis unicam curvam describere possit & quidem sectionem conicam  $DPA$  possit describere, eam reverâ describet (244.) Q. e. 2<sup>um</sup>.

2<sup>am</sup>. hujulce propositionis partem formulis analyticis invenerunt Hermannus & Bernoullius in Monumentis Academiæ Parisiensis, an. 1710.

(1) \* Pater ex notâ 267.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA VI.

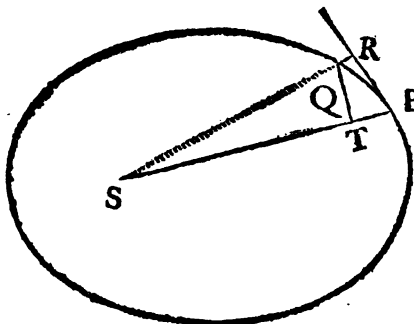
DE MOTU CORP-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta sit reciproce in duplicatâ ratione distantiae locorum à centro; dico quod orbium latera recta principalia sunt in duplicatâ ratione arearum, quas corpora radiis ad centrum ductis eodem tempore describunt.

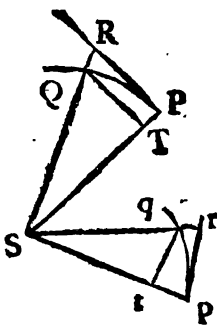
(<sup>2</sup>) Nam (per corol. 2. prop. XIII.) latus rectum  $L$  æquale est quantitati  $\frac{QTq}{QR}$ , quæ ultimo fit, ubi coeunt puncta  $P$  &  $Q$ . Sed linea minima  $QR$  dato tempore est ut vis centripeta generans, hoc est (per hypothefin) reciproce ut  $SPq$ . Ergo

$\frac{QTq}{QR}$  est ut  $QTq \times SPq$ , hoc est, latus rectum  $L$  in duplicatâ ratione areæ  $QT \times SP$ .  $Q. E. D.$

Corol. (<sup>a</sup>) Hinc ellipſeos area tota, eique proportionale rectangulum sub axibus est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti, & ratione temporis periodici. Namque area tota est ut area  $QT \times SP$ , quæ dato tempore describitur, ducta in tempus periodicum.



(<sup>2</sup>) 269. Sint in Hypothefi propositionis XIV. duarum ſectionum conicarum arcus quam minimi  $PQ$ ,  $pq$ , ſimul deſcripti,  $L$ ,  $l$ , earundem latera recta, (& per prop. VI. & Hyp.)  $QR : qr = SP^2 : SP^2$ . Sed (267.)  $\frac{QT^2}{QR} : \frac{qt^2}{qr} = L : l$   
 $= \frac{QT^2}{SP^2} : \frac{qt^2}{SP^2} = QT^2 \times SP^2 : qt^2 \times SP^2$ .



Sunt autem  $QT \times SP$ ,  $qt \times sp$ , ut ſectores evaneſcentes  $SQP$ ,  $sqp$ , ergò latera recta  $L$ ,  $l$ , ſunt in duplicatâ ratione arearum ſimul deſcriptarum; nam areæ quævis ſimul deſcriptæ ſunt ſemper ut ſectores  $SQP$ ,  $sqp$ , ſimul deſcripti, ob æquabilem circâ centrum virium  $S$  arearum deſcriptionem in utrâque ſectione conicâ. Hinc in analogiis loco quadrati areæ dato tempore deſcriptæ ſubſtitui poteſt ſectionis latus rectum & contrâ, dummodo id fiat in Hypothefi propoſitionis.

(<sup>2</sup>) 270. Hinc Ellipſeos area tota eique proportionale rectangulum ſub axibus (250.) eſt in ratione compositâ ex ſubduplicatâ ratione lateris recti & ratione temporis periodici.



## PROPOSITIO XV. THEOREMA VII.

*Iisdem positis, dico quod tempora periodica in ellipsis sunt in ratione sesquuplicatâ majorum axium.*

(b) Namque axis minor est medius proportionalis inter axem majorem & latus rectum, atque ideo rectangulum sub axibus est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti & sesquuplicatâ ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum (*per corol. prop. XIV.*) est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti & ratione periodici temporis. Dematur utrobique subduplicata ratio lateris recti, & manebit sesquuplicata ratio majoris axis eadem cum ratione periodici temporis. *Q. E. D.*

(c) *Corol.* Sunt igitur tempora periodica in ellipsis eadem ac in circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus ellipseon.

P R O-

*dic.* Namque tempus periodicum (252.) est ut area tota directè & area tempore dato descripta inversè, adeoque area tota est ut area  $QT \times SP$  quæ dato tempore describitur (hoc est, (269.) ut radix quadrata lateris recti) ducta in tempus periodicum.

(b) 271. Sit Ellipsis axis major  $A$ ; minor  $B$ , Latus rectum  $L$ , tempus periodicum  $T$ ; & quoniam  $A:B = B:L$ , erit  $B^2 = A \times L$ ,  $B = A^{\frac{1}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$ ,  $A \times B = A^{\frac{3}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$ , sed rectangulum  $A \times B$ , (270.) est

ut  $T \times L^{\frac{1}{2}}$ , ergò  $A^{\frac{3}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$  est ut  $T \times L^{\frac{1}{2}}$ , & dividendo utrumque terminum per  $L^{\frac{1}{2}}$  erit  $A^{\frac{3}{2}}$  ut  $T$ .

(c) 272. Circulus est species ellipsis cujus foci cum centro coincidunt & Latus rectum cum diametro; sed tempora periodica in Ellipsis quæ axem majorem æqualem habent sunt æqualia (271.) ergò in Ellipsi & circulo cujus diameter seu axis æquatur axi majori ellipsis, tempora periodica æquantur.

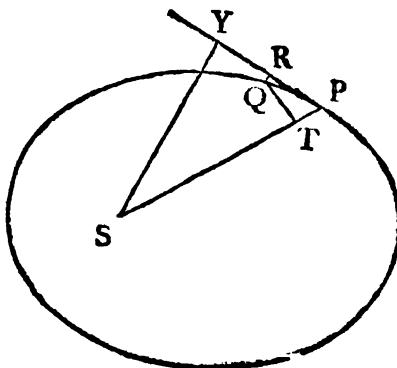
PROPOSITIO XVI. THEOREMA VIII.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Iisdem positis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tan-  
gant orbitas, demissisque ab umbilico communi ad has tangen-  
tes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum sunt in  
ratione compositâ ex ratione perpendicularorum inversè, & subdu-  
plicatâ ratione laterum rectorum principalium directè.*

Ab umbilico  $S$  ad tangen-  
tem  $PR$  demitte perpendicu-  
lum  $SY$ , & velocitas corporis  
 $P$  erit reciprocè in subdupli-  
catâ ratione quantitatis  $\frac{SY}{L}$ .

Nam velocitas illa est ut arcus  
quam minimus  $PQ$  in datâ  
temporis particulâ descriptus,  
hoc est (*per lem. VII.*) ut  
tangens (<sup>d</sup>)  $PR$ , id est, ob



proportionales  $PR$  ad  $QT$  &  $SP$  ad  $SY$ , ut  $\frac{SP \times QT}{SY}$ , five  
ut  $SY$  reciprocè &  $SP \times QT$  directè; estque  $SP \times QT$  ut area  
dato tempore descripta, id est (*per prop. XIV.*) in subduplicatâ  
ratione lateris recti. *Q. E. D.*

*Corol. 1.* (<sup>e</sup>) Latera recta principalia sunt in ratione com-  
positâ ex duplicatâ ratione perpendicularorum, & duplicatâ ratio-  
ne velocitatum.

*Corol. 2.* Velocitates corporum, in (<sup>f</sup>) maximis & minimis ab  
umbilico communi distantis, sunt in ratione compositâ ex ratio-  
ne

(<sup>d</sup>) \* Velocitas est ut tangens  $PR$ ;  
sed ob angulos ad  $T$  &  $Y$  rectos & an-  
gulos  $QPT$ ,  $YPS$ , punctis  $P$ ,  $Q$ , coeun-  
tibus æquales, triangulum evanescens  
 $QPT$ , simile erit triangulo  $PSY$ , adeo-  
que  $QP(PR):QT=SP:SY$ , &  $PR$   
 $= \frac{SP \times QT}{SY}$ .

(<sup>e</sup>) \* Velocitatis quadratum  $c^2$ , est di-  
rectè ut  $\frac{L}{SY^2}$  (*prop. XVI.*) ergo  $L$  est ut  
 $c^2 \times SY^2$ .

(<sup>f</sup>) \* Maximæ & minimæ distantie sunt  
axis partes ab umbilico ad vertices principa-  
les contentæ, adeoque cum illic axis sit per-  
pen-

# 166 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO-NE distantiarum inversè, & subduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè. Nam perpendiculara jam sunt ipsæ distantiae.

LIBER  
PRIMUS.

*Corol. 3. (g)* Ideoque velocitas in conicâ sectione, in maximâ vel minimâ ab umbilico distantia, est ad velocitatem in circulo in eadem à centro distantia in subduplicatâ ratione lateris recti principalis ad duplam illam distantiam.

*Corol. 4. (h)* Corporum in ellipsis gyrantium velocitates in mediocribus distantis ab umbilico communi sunt eadem, quæ corporum gyrantium in circulis ad easdem distantias; hoc est (*per corol. 6. prop. 1v.*) reciprocè in subduplicatâ ratione distantiarum. Nam perpendiculara jam sunt semi-axes minores, & hi sunt ut mediæ proportionales inter distantias & latera recta. Componatur hæc ratio inversè cum subduplicatâ ratione laterum rectorum directè, & fiet ratio subduplicata distantiarum inversè.

*Corol. 5.* In eadem figurâ; vel etiam in figuris diversis, quarum latera recta principalia sunt æqualia, velocitas corporis est reciprocè ut perpendicularum demissum ab umbilico ad tangentem.

*Corol. 6. (i)* In parabolâ velocitas est reciprocè in subduplicatâ ratione distantiae corporis ab umbilico figuræ; in ellipsi

ma-

pendicularis tangenti, ipsa perpendiculara ad tangentem in maximis & minimis distantis sunt ipsæ distantiae; mediocres distantiae sunt distantiae ab umbilico ad vertices axis minoris Ellipseos, adeoque semiaxi majori æquantur.

(g) \* Nam circulus ille (272.) est ellipsis cujus latus rectum est ipsa diameter, ideoque est ipsa dupla distantia ab umbilico seu centro, quare cum eadem ponatur distantia tam in conicâ sectione quàm in circulo, velocitates sunt in subduplicatâ ratione laterum rectorum, hoc est in subduplicatâ ratione lateris recti sectionis conicæ, ad duplam illam distantiam quæ est latus rectum circuli.

(h) \* Sit  $A$  corporis in Ellipsi gyrantis mediocris distantia ab umbilico, sit etiam

circuli radius  $A$ ; semiaxis minor, seu perpendicularis demissa ex umbilico in tangentem axi majori parallelam sit  $B$ , latus rectum  $L$ , & circuli latus rectum (272.) erit  $2A$ , velocitas in Ellipsi sit  $C$ , in circulo  $c$ , & erit (*per prop. xv.*)  $C^2$ :

$$c^2 = \frac{L}{B^2} : \frac{2A}{A^2} = L \times A : 2B^2$$
; sed ex Conicis distantia à foco ad extremitatem semiaxis minoris (quæ est mediocris distantia) est æqualis semiaxi majori, est ergo distantia  $A$  semiaxis major, ideoque cum ex conicis sit  $A : B = 2B : L$ , est  $2B^2 = A \times L$ , ergo  $C^2 = c^2$ , &  $C = c$ .

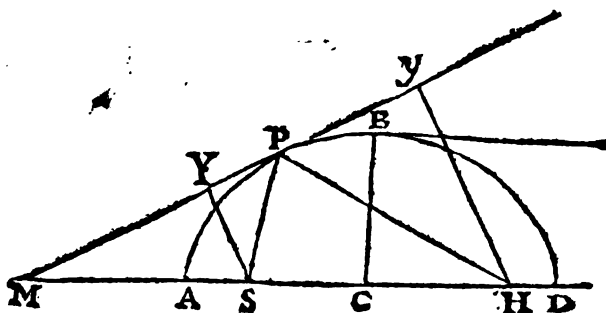
(i) In parabolâ velocitas est reciprocè in subduplicatâ ratione distantiae corporis ab umbilico figuræ; cum enim velocitas sit reciprocè ut perpendicularum demissum ab umbilico

bili-

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 167

magis variatur, in hyperbolâ minus quàm in hac ratione. Nam DE MO-  
(per corol. 2. lem. XIV.) perpendiculum demissum ab um-TU COR-  
bilico ad tangentem parabolæ est in subduplicatâ ratione dif-PORUM.  
tantia. In hyperbolâ perpendiculum minus variatur, in ellip-LIBER  
fi magis. PRIMUS.

Co-



bilico ad Tangentem, per præced. Coroll.;  
& (per Cor. 2. Lem. XIV.) quadratum  
ejus perpendiculi sit semper in Parabolâ  
ut distantia à foco, erit velocitas recipro-  
ce ut radix quadrata illius distantia à fo-  
co, five in subduplicatâ ratione distantia  
&c.

276. Lemma. Sit Ellipsis APB, cujus  
axis major AD, foci S & H, semiaxis mi-  
nor BC; My tangens in P, SY & Hy  
in tangentem perpendiculares; ob an-  
gulos YPS, HPY, æquales (prop. 48.  
lib. 3. Conic. Apoll. sup. Theor. IV.  
de Ellip.) similia sunt triangula SPY,  
HPY, undè SP : SY :: HP : HY  
 $\frac{SY \times HP}{SP} = \frac{SY \times HP}{SP}$ , ac proindè SY x Hy =  $\frac{SY^2 \times HP}{SP}$   
= BC<sup>2</sup> (ex conicis. Vid. sup. n. 236.)  
sed HP + SP = AD (prop. 52. lib.  
3. Conic. Apoll. sup. Theor. III. de Ellipfi)  
unde est HP = AD - SP ergò  $\frac{SY^2 \times AD - SP}{SP}$   
= BC<sup>2</sup>; & SY<sup>2</sup> =  $\frac{BC^2 \times SP}{AD - SP}$ . Ergò in  
Ellipfi, SY<sup>2</sup> variatur in ratione  $\frac{BC^2 \times SP}{AD - SP}$   
five ob quantitatem BC<sup>2</sup>, constantem in

ratione  $\frac{SP}{AD - SP}$ :

Crescat distantia SP, minor fiet AD - SP,  
fi non mutaretur denominator fractionis

$\frac{SP}{AD - SP} = SY^2$ , cresceret SY<sup>2</sup> sicut SP, cum  
autem minuatür denominator Sp crescente;

eo ipso major fit valor fractionis  $\frac{SP}{AD - SP}$

ergo crescente SP, SY<sup>2</sup> magis crefcit  
quàm in solâ ratione SP, ergo perpendi-  
culum in ellipfi magis variatur quam in  
subduplicatâ ratione distantia SP.

In Hyperbolâ verd, quoniam HP - SP  
= AD (prop. 51. lib. 3. Conic. Apoll.  
Theor. III. de Hyp.) & HP = AD + SP,

eodem modo reperitur SY<sup>2</sup> =  $\frac{BC^2 \times SP}{AD + SP}$

& crescente SP, crefcit etiam AD + SP, si  
idem maneret denominator crefceret SY<sup>2</sup> si-  
cut SP, denominatore aucto, fractio  $\frac{SP}{AD + SP}$

fit minor quam eo manente, sed ea expri-  
mit valorem quadrati perpendiculi SY,  
ergo SY<sup>2</sup> minus crefcit quàm SP five  
perpendiculum in Hyperbolâ minus variatur  
quam in subduplicatâ ratione distantia SP.

*Corol. 7.* (\*) In parabolâ velocitas corporis ad quamvis ab umbilico distantiam est ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem à centro distantiam in subduplicatâ ratione numeri binarii ad unitatem; (1) in ellipsi minor est, in hyperbolâ major quàm in hac ratione. Nam per hujus corollarium secundum velocitas in vertice parabolæ est in hac ratione, & per corollaria sexta hujus & propositionis quartæ servatur eadem proportio in omnibus distantiiis. Hinc etiam in parabolâ velocitas ubique æqualis est velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam distantiam, in ellipsi minor est, in hyperbolâ major.

Co-

(\*) 277. Sit latus rectum parabolæ  $L$ , adeoque distantia foci à vertice  $\frac{1}{4} L$ , & ex umbilico tanquam centro ac radio  $\frac{1}{4} L$ , describatur circulus, ejus latus rectum seu diameter erit  $\frac{1}{2} L$ ; unde velocitas corporis in vertice parabolæ erit ad velocitatem corporis in illo circulo revolventis ut  $\sqrt{L}$  ad  $\sqrt{\frac{1}{2} L}$ , hoc est, ut  $\sqrt{2}$  ad 1. (*corol. 2. hujusce Prop.*) sed per *corol. 6.* velocitas in vertice parabolæ est ad velocitatem in aliâ quavis ab umbilico distantia  $SP$ , ut  $\sqrt{SP}$  ad  $\sqrt{\frac{1}{4} L}$ , & (*per corol. 6. prop. IV.*) velocitas in circulo cujus radius  $\frac{1}{4} L$ , est etiam ad velocitatem in alio circulo cujus radius  $SP$ , ut  $\sqrt{SP}$ , ad  $\sqrt{\frac{1}{4} L}$ ; quare velocitas in vertice parabolæ est ad velocitatem in eadem parabolâ ad distantiam  $SP$ , ut velocitas in circulo cujus radius  $\frac{1}{4} L$ , ad velocitatem in circulo cujus radius est  $SP$ , ac proinde alternando velocitas in vertice parabolæ est ad velocitatem in circulo radio  $\frac{1}{4} L$  descripto, hoc est,  $\sqrt{2}$  ad 1, ut velocitas in parabolâ in distantia  $SP$ , ad velocitatem in circulo ad eandem à centro seu umbilico distantiam descripto.

278. Hinc etiam in parabolâ velocitas ubique æqualis est velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam distantiam; nam velocitas in circulo cujus radius  $\frac{1}{2} SP$  est ad velocitatem in circulo cujus ra-

dus  $SP$ , ut  $\sqrt{2}$  ad 1, (*per coroll. 6. prop. IV.*) sed velocitas in parabolâ ad distantiam  $SP$ , est ad velocitatem in circulo cujus radius  $SP$ , etiam ut  $\sqrt{2}$ . ad 1, velocitas igitur in parabolâ ad distantiam  $SP$ , æquatur velocitati in circulo cujus radius  $\frac{1}{2} SP$ .

(1) 279. In Ellipsi velocitas corporis ad quamvis ab umbilico distantiam est ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem à centro distantiam in minore ratione quam  $\sqrt{2}$  ad 1; in Hyperbolâ in ratione majore. Sit enim Ellipsis vel hyperbolæ latus rectum  $L$ , distantia ab umbilico  $SP$ , perpendicularum ad tangentem sectionis in puncto  $P$  demissum  $SY$ ;  $SP$ , sit radius circuli,  $C$  sit velocitas in Ellipsi vel hyperbolâ ad distantiam  $SP$ ;  $C$ , velocitas in circulo,

& erit (*per prop. XVI.*)  $c^2 : C^2 = \frac{L}{SY^2}$

$\frac{2SP}{SP^2} = L \times SP : 2SY^2$ ; sed (276)  $2SY^2$

$= \frac{2BC^2 \times SP}{AD \mp SP}$ , ergo  $c^2 : C^2 = L \times SP :$

$\frac{2BC^2 \times SP}{AD \mp SP} = L \times AD \mp SP : 2BC^2$ ;

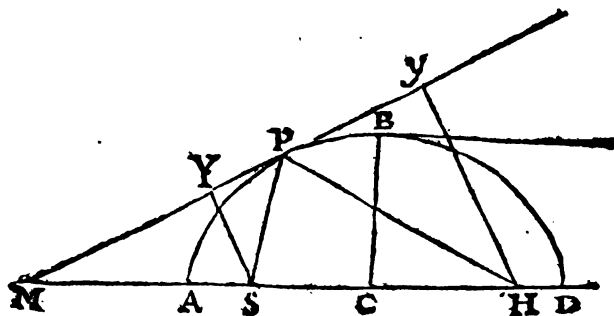
& ob  $L \times AD = 4BC^2$  seu  $BC^2 = \frac{L \times AD}{4}$ , est  $c^2 : C^2 = 2AD \mp 2SP : AD$ ;

undè in Ellipsi in quâ  $2SP$  habet signum —, ratio  $c^2$  ad  $C^2$ , minor est quam ratio

*Corol. 8.* Velocitas gyrantis in sectione quâvis conicâ est ad DE Mo-  
velocitatem gyrantis in circulo in distantia dimidii lateris recti <sup>TU COR-</sup>  
principalis sectionis, ut distantia illa ad perpendiculum ab um- <sup>FORUM.</sup>  
bilico in tangentem sectionis demissum. <sup>LIBER</sup> (m) Patet per corolla- <sup>PRIMUS.</sup>  
rium quintum.

*Corol. 9.* (n) Unde cum (per corol. 6. prop. IV.) veloci-  
tas gyrantis in hoc circulo sit ad velocitatem gyrantis in circulo  
quovis alio reciprocè in subduplicatâ ratione distantiarum; fiet ex  
æquo velocitas gyrantis in conicâ sectione ad velocitatem gyran-  
tis in circulo in eâdem distantia, ut media proportionalis inter  
distantiam illam communem & semissem principalis lateris recti  
sectionis, ad perpendiculum ab umbilico communi in tangentem  
sectionis demissura.

P R O-



ratio 2, ad 1, & ratio c ad C, minor  
quam ratio  $\sqrt{2}$ , ad 1; in hyperbolâ ma-  
jor ob  $\perp SP$  (276.)

280. *Coroll.* Quoniam distantia ab al-  
tero sectionis foco HP = AD  $\mp$  SP,  
erit  $c^2 : C^2 = 2 HP : AD = HP : \frac{1}{2} AD$ ,  
hoc est, velocitas in Ellipsi & hyper-  
bolâ ad quamvis ab umbilico seu centro  
virium distantiam SP est ad velocitatem in  
circulo ad eandem distantiam in ratione  
subduplicatâ distantiarum HP ab altero um-  
bilico ad semiaxem majorem.

(m) \* Nam iste circulus & sectio Co-  
nica idem latus rectum habent, quia in cir-  
culo distantia à Centro semidiametro  
æquatur & tota diameter est latus Rectum,  
ideo velocitates sunt reciprocè ut perpen-

Tom. I.

dicula in Tangentem demissa (per Cor. 5:  
huiusce) sed in circulo semidiameter per-  
pendiculo æquatur, ergo velocitates in sec-  
tione & in circulo sunt ut semi-diameter  
circuli ad Perpendiculum &c.

(n) 281. Sit C velocitas corporis gy-  
rantis in circulo ad distantiam dimidii  
lateris recti  $\frac{1}{2} L$ , c velocitas in sectione  
conicâ ad distantiam SP, K velocitas in  
circulo ad eandem distantiam SP, & erit  
(per coroll. 8.)  $c^2 : C^2 = \frac{1}{4} L^2 : SY^2$   
(& per cor. 6. prop. IV.)  $C^2 : K^2 = SP : \frac{1}{2} L$ .  
unde, ex æquo,  $c^2 : K^2 = SP \times \frac{1}{4} L^2 : SY^2 \times \frac{1}{2} L$   
 $= SP \times \frac{1}{2} L : SY^2$ . Fiat  $SP : m$   
 $= m : \frac{1}{2} L$ , & erit  $m^2 = SP \times \frac{1}{2} L$ ,  
ac proinde  $c^2 : K^2 = m^2 : SY^2$  &  $c : K = m : SY$ .

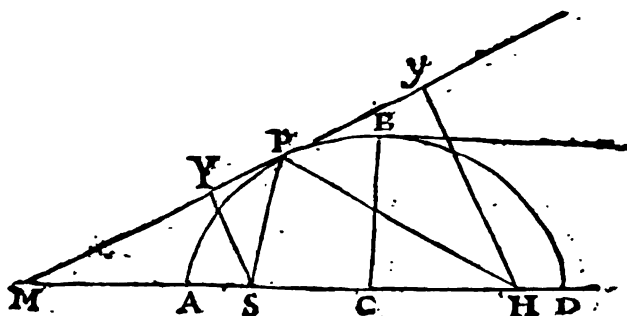
Y

282,

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Posito quod vis centripeta sit reciprocè proportionalis quadrato distantiae locorum à centro, & quod vis illius quantitas absoluta sit cognita; requiritur linea, quam corpus describit de loco dato cum datâ velocitate secundum datam rectam egrediens.*

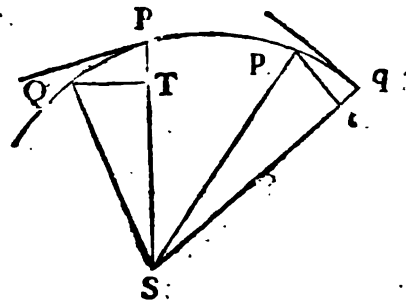
Vis centripeta tendens ad punctum  $S$  ea sit, quâ corpus  $p$  in orbitâ quâvis datâ  $pq$  gyretur, & cognoscatur hujus velocitas in loco  $p$ . De loco  $P$  secundum lineam  $PR$ :



282. Sit C, centrum E<sup>l</sup>lipsis, CB Te-  
mianis mi<sup>o</sup>r, foci S & H, tendatque vis  
centripeta ad focum S, velocitas in P  
erit ad velocitatem in B, in subduplicatâ  
ratione distantiz HP:à foco H, ad dis-  
tantiam SP ab altero foco seu centro  
virium S; Nam velocitas in P dicatur  
v, velocitas in B dicatur c, & erit (*per cor. 5.  
prop. XVI.*) C:c=CB:SY, adeoque C<sup>2</sup>:c<sup>2</sup>  
=CB<sup>2</sup>:SY<sup>2</sup>, hoc est, ob CB<sup>2</sup>=SY×  
Hy (235.) C<sup>2</sup>:c<sup>2</sup>=SY×Hy:SY<sup>2</sup>=  
Hy:SY; sed ob familia triangula SPY, HPY,  
Hy:SY=HP:SP. Ergo C<sup>2</sup>:c<sup>2</sup>=HP:SR,  
& C:c=HP<sup>1/2</sup>:S, SP<sup>1/2</sup> Q. e. D.

Theorema illud invenit clarissimus Geometra Abrahamus de Moivre.

283. Velocitas angularis corporis P, in quavis orbita QPp, revolventis seu angulus PSQ, quem radius vector SP, dato tempore minimo describit est directi-  
 onis QT perpendicularis ad radium vecto-  
 rem SP, & distantia SP inversa, dum pun-  
 cta Q & P coeunt, nam linea perpen-  
 dicularis QT pro arcu circuli haberi po-  
 test, unde angulus PSQ =  $\frac{QT}{SP}$  (153.)



284. *Coroll. 1.* Hinc velocitas angularis in eadem orbita est ubique reciproce in duplicatâ ratione distantie SP à centro virium S. Nam sectores PSQ, pSq; eodem tempulculo descripti sunt æquales (*prop. 1.*). Undè Q T × SP = q t × Sp, adeoque Q T : q t = Sp : SP, & hinc  $\frac{QT}{SP} : \frac{qt}{Sp} = \frac{Sp}{SP} = Sp^2 : SP^2$ .

285. *Coroll.* 2 ... Velocitates angulares in sectionibus conicis circa umbilicum communem seu centrum virium descriptis sunt inter se ut radices quadratæ laterum rectorum principalium directè & quadratè dif-

exeat corpus  $P$  cum datâ velocitate, & mox inde, cogente vi centripetâ, deflectat illud in conic sectionem  $PQ$ . Hanc

igitur recta  $PR$  tanget in  $P$ .

Tangat itidem

recta aliqua  $pr$

orbitam  $pq$  in  $p$ ,

& si ab  $S$  ad eas

tangentes demit-

ti intelligantur

perpendiculara, e-

rit (per corol.

1. prop. XVI) la-

tus rectum prin-

cipale conic sectionis ad latus rectum principale orbitæ in ratione

compositâ ex duplicatâ ratione perpendicularorum & duplicatâ ra-

tione velocitatum, atque ideo datur. (a) Sit  $L$  conic sectionis latus

distantiarum inversè. Nam, (per prop. XIV.) latera recta  $L, l$ , sunt in duplicatâ ratione sectorum  $PSQ, pSq$ , simul descriptorum, seu  $L^{\frac{1}{2}} : l^{\frac{1}{2}} = QT \times SP :$

$qt \times SP$ , adeoque  $\frac{L^{\frac{1}{2}}}{SP} : \frac{l^{\frac{1}{2}}}{Sp} = QT : qt$ ;

& hinc velocitates angulares seu anguli minimi  $PSQ, pSq$ , hoc est,  $\frac{QT}{SP} : \frac{qt}{Sp}$ ,

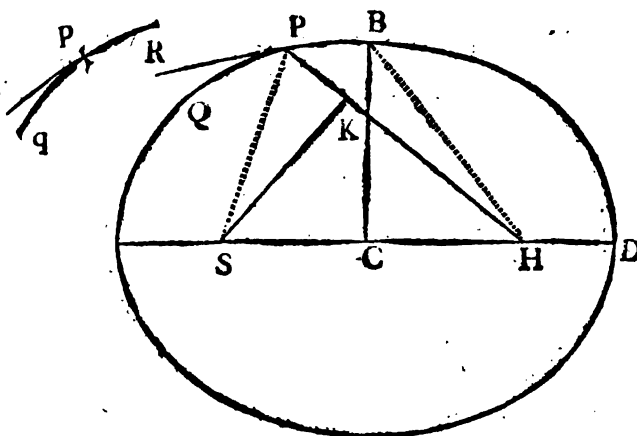
sunt ut  $\frac{L^{\frac{1}{2}}}{SP^2} : \frac{l^{\frac{1}{2}}}{Sp^2}$ .

(\*) 286. Solutio hujus Problematum duas continet partes; Sit enim corpus è puncto  $P$  secundum lineam  $PR$  datâ cum velocitate projectum & retineatur circa punctum  $S$  per vim centripetam quæ sit reciprocè proportionalis quadrato distantie locorum à Centro cujusque quantitas absoluta in puncto  $P$  sit cognita, id corpus describet (per Cor. 1. Prop. XIII.) sectionem aliquam Conicam cujus 1°. quæritur Latus Rectum principale, 2°. Dato umbilico  $S$  illius sectionis, puncto  $P$ , Tangente  $PR$ , & latere recto quæritur alter umbilicus, quo nempe invento & ex cæteris datis describeretur sectio Co-

nica quam Corpus propositum percurrit.

Ad primam solutionis partem, fingitur sectio quælibet Conica cujus umbilicus sit  $S$ , & alter umbilicus & latus rectum ad arbitrium sumuntur, unde in quovis ejus puncto  $P$  duci poterit Tangens, & quantitas vis in eo puncto erit cognita, est enim ad vim in puncto  $P$  quæ data est reciprocè ut quadrata linearum  $Sp, SP$ ; Invenietur etiam velocitas in eo puncto  $p$ ; Nam velocitas corporis gyrantis in circulo ad distantiam  $Sp$  (sive arcus in eo descriptus tempore quo arcus  $PQ$  describitur) est media proportionalis inter vim centripetam in  $p$ , quæ inventa est, & duplam distantiam  $Sp$  (per naturam circuli), hæc verò est ad velocitatem in hac Sectione Conicâ, ut perpendicularum ab  $S$  ad Tangentem communem demissum ad mediam proportionalem inter distantiam  $Sp$  & semissem lateris Recti istius sectionis.

Cum ergo (per Cor. 1. Prop. XVI.) Latera Recta principalia sectionum circa umbilicum communem descriptarum sint in ratione compositâ ex duplicatâ ratione perpendicularorum & duplicatâ ratione velocitatum, & ob datas Tangentes in  $p$  &  $P$  dentur perpendiculara ex  $S$  in eas Tangentes demissa, deturque Velocitas corporis moti in  $P$  & inventa sit velocitas in puncto  $p$ , datur ratio Lateris

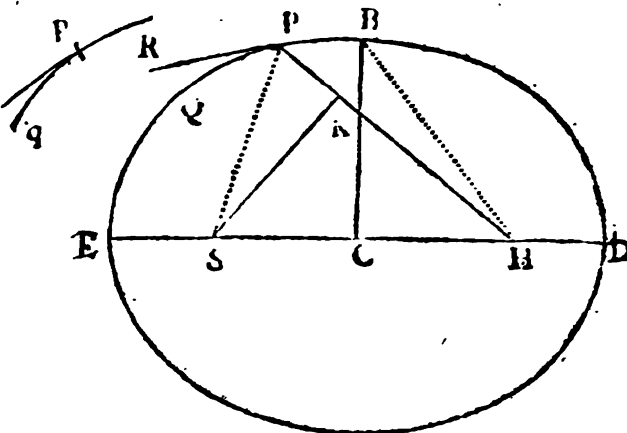




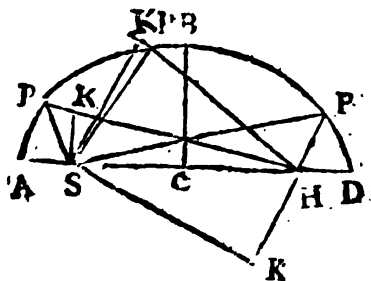
# 172 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MOTU  
CORPORUM  
LIBER  
PRIMUS

rectam Datur præterea ejusdem confectionis umbilicus S. Anguli RPS complementum ad duos rectos fiat angulus RPH; & dabitur positione linea PH, in qua umbilicus alter H locatur. Demisso ad PH perpendicularo SK, erigi intelligatur semiaxis conjugatus BC, (b) & erit  $SPq - 2KPH + PHq = SHq = 4CHq = 4BHq - 4BCq = \overline{SP + PH} : quad. - L \times \overline{SP + PH} (c) = SPq + 2SPH + PHq - L \times \overline{SP + PH}$ . Addantur utrobique  $2KPH - SPq - PHq + L \times \overline{SP + PH}$ , & fiet  $L \times \overline{SP + PH} = 2SPH + 2KPH$ , seu  $SP + PH$  ad PH ut  $2SP + 2KP$  ad L. Unde datur PH tam longitudine quam positione. Nimirum si ea sit corporis in P velocitas, ut latus rectum L minus fuerit quam  $2SP + 2KP$ , jacebit PH ad eandem partem tangentis PR



Recti sectionis assumptæ ad Latus Rectum sectionis quam corpus P describit; Quod ergo invenitur, eratque primum.



(b) Erit  $SP^2 - 2KP \times PH + PH^2 = SH^2$ , Item (per 12. & 13. 2. Elem.) in omni Triangulo SPH, quadratum lateris SH, quod consideratur ut Hypothenusâ anguli P, æquatur quadratis aliorum laterum SP PH. dempto duplo Rectanguli lateris PH in quod cadit perpendicularum, ducti in partem

PK ab Angulo P ad perpendicularum usque interceptam, quæ quidem PK sumitur cum signo + si sit ab eadem parte Tangentis ac S & cum signo - si sit in parte opposita.

(c) 187.  $SH^2 = 4CH^2 = 4BH^2 - 4BC^2$  &c. Ex naturâ Ellipseos est 2BH æqualis axi majori 2AC idcirco æqualis  $SP + PH$  &  $4BH^2 = \overline{SP + PH}^2$ , pariter est  $AC : 2BC = 2BC : L$  est ergo  $4BC^2 = L \times 2AC$  sive  $L \times \overline{SP + PH}$  unde est  $4BH^2 - 4BC^2 = \overline{SP + PH}^2 - L \times \overline{SP + PH}$ .

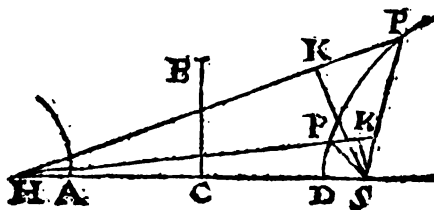
Collatis itaque valoribus ejusdem quantitatis  $SH^2$ , est  $SP^2 - 2KP \times PH + PH^2 = SP^2 + 2SP \times PH + PH^2 - L \times \overline{SP + PH}$ , utrinque detractis æqualibus manet  $-2KP \times PH = 2SP \times PH - L \times \overline{SP + PH}$  transpositisque partibus negativis est  $L \times \overline{SP + PH} = 2SP \times PH + 2KP \times PH$  sive  $2SP + 2KP : L = SP + PH : PH$  & dividendo  $2SP + 2KP : L = SP : PH$  &c.

sum linea  $PS$ ; ideoque figura erit ellipsis, & ex datis umbilicis  $S$ ,  $H$ , & axe principali  $SP+PH$ , dabitur. Sin tanta fit corporis velocitas ut latus rectum  $L$  æquale fuerit  $2SP+2KP$ , longitudo  $PH$  infinita erit; & propterea figura erit parabola axem habens  $SH$  parallelum lineæ  $PK$ , & inde dabitur. Quod si corpus majori adhuc cum velocitate de loco suo  $P$  exeat, capienda erit longitudo  $PH$  ad alteram partem tangentis; ideoque tangente inter umbilicos pergente, figura erit hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum  $SP$  &  $PH$ , & inde dabitur. Nam si corpus in his casibus revolvatur in conicâ sectione sic inventâ, demonstratum est in prop. XI, XII, & XIII, quod vis centripeta erit ut quadratum distantie corporis à centro virium  $S$  reciprocè; ideoque linea  $PQ$  rectè exhibetur, quam corpus tali vi describet, de loco dato  $P$ , cum datâ velocitate, secundum rectam positione datam  $PR$  egrediens. *Q.E.F.*

*Corol. I.* Hinc in omni conicâ sectione ex dato vertice principali  $D$ , in latere recto  $L$ , & umbilico  $S$ , datur umbilicus alter  $H$  capiendò  $DH$  ad  $DS$  ut est latus rectum ad differentiam inter latus rectum &  $4DS$ . (d) Nam proportio  $SP+PH$  ad  $PH$  ut  $2SP+2KP$  ad  $L$  in casu hujus corollarii, fit  $DS+DH$  ad  $DH$  ut  $4DS$  ad  $L$ , & divisim  $DS$  ad  $DH$  ut  $4DS-L$  ad  $L$ .

unde quo magis accedit valor lateris recti  $L$  ad quantitatem  $2SP+2KP$ , eo major est  $PH$  respectu  $SP$ , si  $L=2SP+2KP$ , infinitum est  $SP$  respectu  $PH$ ; hoc est, Ellipsis abit in Parabolam, si  $L$  sit majus quam  $2SP+2KP$ , primus terminus Proportionis fit negativus, ideoque  $PH$  in partem oppositam Tangentis cadet & sectio fiet Hyperbola; manentibus autem cæteris crescit Latus Rectum cum velocitate in puncto  $P$  datâ: Unde quò major fit velocitas respectu vis centripetæ, eò magis elongatur Ellipsis quam describit corpus propositum vel etiam in Parabola movetur, & tandem in Hyperbola.

288. Demonstratio pro Hyperbola ita instituitur: Quia  $PK$  non est in eadem parte Tangentis ac  $S$ , sumitur  $PK$  cum signo— ideoque est  $SH^2 = SP^2 + 2KP \times PH + PH^2$ , & per naturam Hyperb. læ  $SH^2 = 4CH^2 = 4CA^2 + 4CB^2$  sive quia  $CA = PH - SP$  &  $4CB^2 = L \times 2CA$  est  $SH^2 = PH^2 - 2SP \times PH$ .



$+SP^2 + L \times PH - SP$  unde collatis valoribus  $SH^2$  & detractis quantitibus communibus est  $2KP \times PH = -2SP \times PH + L \times PH - SP$  & transpositis quantitibus negativis est  $2KP \times PH + 2SP \times PH = L \times PH - SP$  unde est  $2SP + 2KP : L = PH : SP$ , & convertendo  $L - 2SP = 2KP : L = SP : PH$ .

(d) 289. In casu hujus corollarii punctum  $P$  cadit in  $D$ , punctum  $K$  cadit in  $S$ , fitque  $PK = DS = SP$ , &  $PH = DH$ . Quare in omni sectione conicâ est  $DH$  ad  $DS$ , ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum &  $4DS$ . *Y 3.*

-DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

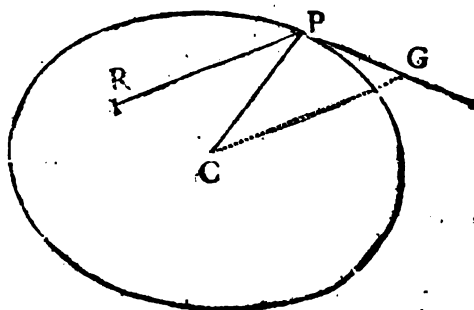
*Corol. 2.* Unde si datur corporis velocitas in vertice principi-  
pali  $D$ , invenietur orbita expeditè, capiendò scilicet latus rec-  
tum ejus ad duplam distantiam  $DS$ , in duplicatâ ratione ve-  
locitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in circulo ad distan-  
tiam  $DS$  gyrantis (*per corol. 3. prop. XVI.*); dein  $DH$  ad  $DS$   
ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & 4  $DS$ .

*Corol. 3.* Hinc etiam si corpus moveatur in sectione quâcun-  
que conicâ, & ex orbe suo impulsu quocunque exturbetur;  
cognosci potest orbis, in quo postea cursum suum peraget.  
Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo,  
quem impulsus solus generaret, habebitur motus quocum cor-  
pus de dato impulsus loco, secundum rectam positione datam,  
exibit.

*Corol. 4.* Et si corpus illud vi aliquâ extrinsecus impressâ  
continuo perturbetur, innotescet cursus quam proximè, colli-  
gendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit,  
& ex seriei analogiâ mutationes continuas in locis intermediis  
æstimando.

### Scholium.

Si corpus  $P$  vi centripetâ  
ad punctum quodcunque da-  
tum  $R$  tendente moveatur  
in perimetro datæ cujus-  
que sectionis conicæ, cujus  
centrum sit  $C$ ; & requiratur  
lex vis centripetæ: ducatur  
 $CG$  radio  $RP$  parallela, &  
orbis tangenti  $PG$  occur-  
rens in  $G$ ; & (\*) vis illa (*per corol. 1. & schol. prop. X. & corol.*



3. *prop. VII.*) erit ut  $\frac{CG \text{ cub.}}{RP \text{ quad.}}$  S E C.

(\*) 290. Vis ad centrum vel à cen-  
tro  $C$ , tendens est ut  $CP$ , (*per coroll.*  
*1. Prop. X. & Not. 232.*) adeoque ex-  
ponatur per lineam  $CP$ ; vis ad punctum

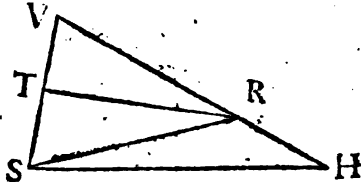
$R$ , tendens exponatur per lineam  $A$ , &  
(*per corol. 3. prop. VII.*) erit  $CP \times RP^2$ ;  
 $CG = CP : A = \frac{CG}{RP^2}$ .

SECTIO IV.

*De inventione orbium ellipticorum, parabolicorum  
& hyperbolicorum ex umbilico dato.*

LEMMA XV.

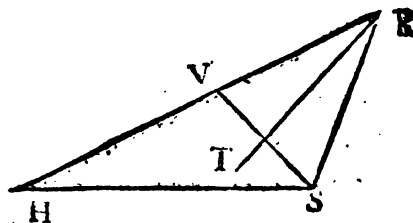
Si ab ellipseo vel hyperbolæ cujuscvis umbilicis duobus  $S, H$ , ad punctum quodvis tertium  $V$  inflectantur rectæ duæ  $SV, HV$ , quarum una  $HV$  æqualis sit axi principali figuræ, id est, axi in quo umbilici jacent, altera  $SV$  à perpendiculo  $TR$  in se demisso bisecetur in  $T$ ; perpendiculum illud  $TR$  sectionem conicam alicubi tanget: & contra, si tangit, erit  $HV$  æqualis axi principali figuræ.



Secet enim perpendiculum  $TR$  rectam  $HV$  productam, si opus fuerit, in  $R$ ; & jungatur  $SR$ . Ob æquales  $TS, TV$ , æquales erunt & rectæ  $SR, VR$  & anguli  $TRS, TRV$ . (f) Unde punctum  $R$  erit ad sectionem conicam, & perpendiculum  $TR$  tanget eandem & contra. Q. E. D.

P. R. O.

(f)\* Si fuerint  $S, H$ , Ellipseos umbilici, erit  $SR + RH = HV =$  axi majori; ac proinde  $R$  punctum perimetri Ellipsis quam  $TR$  tangit in  $R$ , ob angulos  $TRS, TRV$ , æquales (per prop. 51. & 46. lib. 3. Conic. Apollon. Theor. III. & IV. de Ell.) & contra si  $TR$  tangat Ellipsim in  $R$ , & ducatur  $SV$ , ad  $TR$  perpendicularis, erit ob angulos  $TRS, TRV$ , æquales  $VR = SR$ , &  $VH = SR + RH =$  axi majori.



\* Si fuerint  $S, H$ , Hyperbolæ umbilici ob æquales  $TS, TV$ , erit  $SR = VR$ , &  $HR - SR = HV$  æqualis axi majori, &  $R$  punctum Hyperbolæ quam tangit in  $R$  recta  $TR$  ob angulos  $VRT, TRS$ , æquales (per prop. 51. & 46. lib.

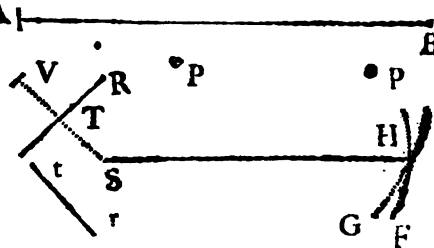
3. Conic. Apoll. Theor. III. & IV. de Hyperb.) & contra si  $TR$  tangat Hyperbolam in  $R$ , & agatur  $SV$  ad  $TR$  perpendicularis erit  $VR = SR$ , &  $HV = HR - RS$ , æqualis axi majori, ut patet.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

## PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA X.

*Datis umbilico & axibus principalibus describere trajectorias ellipticas & hyperbolicas, quæ transibunt per puncta data, & rectas positione datas contingent.*

Sit  $S$  communis umbilicus figurarum;  $AB$  longitudo axis principalis trajectoriæ cujuscvis;  $P$  punctum per quod trajectoria debet transire; &  $TR$  recta quam debet tangere. Centro  $P$  intervallo  $AB-SP$ , si orbita sit elliptica, vel  $AB+SP$ , si ea sit hyperbola, describatur circulus



$HG$ . Ad tangentem  $TR$  demittatur perpendicularum  $ST$ , & producatum idem ad  $V$ , ut sit  $TV$  æqualis  $ST$ ; centroque  $V$  & intervallo  $AB$  describatur circulus  $FH$ . Hac methodo sive dentur duo puncta  $P, p$ , sive duæ tangentes  $TR, tr$ , sive punctum  $P$  & tangens  $TR$ , describendi sunt circuli duo. Sit  $H$  eorum interseccio communis, & umbilicis  $S, H$ , axe illo dato describatur trajectoria. Dico factum. Nam trajectoria descripta (eo quod  $PH+SP$  in elliptica, &  $PH-SP$  in hyperbola æquatur axi) transibit per punctum  $P$ , & (per lemma superius) tanget rectam  $TR$ . Et eodem argumento vel transibit eadem per puncta duo  $P, p$ , vel tanget rectas duas  $TR, tr$ . (s)  $Q. E. F.$

## PROPOSITIO XIX. PROBLEMA XI.

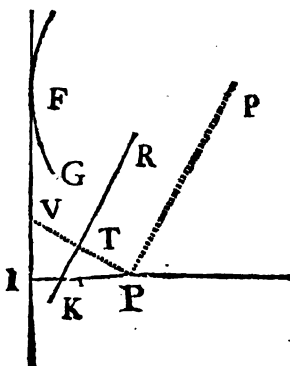
*Circa datum umbilicum trajectoriam parabolicam describere, quæ transibit per puncta data, & rectas positione datas contingent.*

Sit  $S$  umbilicus,  $P$  punctum &  $TR$  tangens trajectoriæ describendæ. Centro  $P$  intervallo  $PS$  describe circulum  $FG$ . Ab um-

\* (s) Si orbita sit Hyperbola, focus  $H$ , erit in recta  $HS$ , ultra  $S$ ; producta;

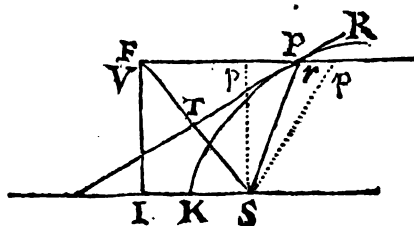
umbilico ad tangentem demitte perpendicularem  $ST$ , & produc De Mo-  
eam ad  $V$ , ut sit  $TV$  æqualis  $ST$ . Eodem modo describendus TU COR-  
est alter circulus  $fg$ , si datur alterum punctum  $p$ ; vel invenien-  
dum alterum punctum  $v$ , si datur altera tan-  
gens  $tr$ ; dein ducenda recta  $IF$  quæ tan-  
gat duos circulos  $FG$ ,  $fg$  si dantur duo  
puncta  $P$ ,  $p$ , vel transeat per duo puncta  
 $V$ ,  $v$ , si dantur duæ tangentes  $TR$ ,  $tr$ ,  
vel tangat circulum  $FG$  & transeat per  
punctum  $V$ , si datur punctum  $P$  & tangens  
 $TR$ . Ad  $FI$  demitte perpendicularem  $SI$ ,  
eamque bifeca in  $K$ ; & axe  $SK$ , vertice  
principalis  $K$  describatur parabola. Dico  
factum. (h) Nam parabola, ob æquales  
 $SK$  &  $IK$ ,  $SP$  &  $FP$ , transibit per punctum  $P$ ; & (per lem. XIV.  
corol. 3.) ob æquales  $ST$  &  $TV$  & angulum rectum  $STR$ , tan-  
get rectam  $TR$ . Q. E. F.

PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.



(h) 291. Nam Parabola ob æquales  $SK$   
&  $IK$ ,  $SP$  &  $FP$ , transibit per punctum  $P$   
scilicet Parabola descripta ob æquales  $SK$   
&  $IK$  habet pro directricem lineam  $IF$  (per  
Theor. II de Parab. n. 224. de Conicis),  
cùm verò distantia puncti cujuscunque Parab-  
olæ à Directricem sit æqualis distantia ejus  
puncti à foco, vice versâ, punctum quod  
æqualiter à foco & à Directricem distabit,  
pertinebit ad Parabolam. Finge enim li-  
neam  $FP$  Directricem perpendicularem oc-  
currere quidem Parabolæ in puncto  $P$ , ita  
ut sit  $FP = SP$ , sed in eâ posse tum aliud  
punctum  $p$  ita ut sit etiam  $Sp = Fp = FP$   
 $\pm Pp$ , erit ob  $Fp = SP$ ,  $Sp = SP \pm Pp$   
sed cùm  $SPp$  sit Triangulum, absurdum est  
(per 20. 1. Elem.) esse  $Sp = SP \pm Pp$   
ergo absurdum est fingere aliud punctum  
præter id quod ad Parabolam pertinet tale  
ut ejus distantia à directricem sit æqualis ejus  
distantia à foco, ergo ob æquales  $SP$  &  $FP$ ,  
Parabola cujus directrix est  $IF$  & umbili-  
cus  $S$  transibit per punctum  $P$ .

2us. Casus. Parabola descripta ob æqua-  
les  $ST$ ,  $TV$ , ob angulum Rectum  $STR$  tan-  
get rectam  $TR$ , ejus enim Parabolæ de-  
scriptæ directrix est  $VI$ . Jam verò du-  
Tom. I.



catur ex  $V$  perpendicularis in directricem  
quæ rectæ  $TR$  occurrat in  $r$  & ab  $r$  duca-  
tur ad focum linea  $rS$ , ob æquales  $ST$  &  $TV$   
& angulum rectum  $STR$  erit  $Vr = rS$  &  
punctum  $r$  ad Parabolam pertinebit per su-  
periores demonstrationis partem, eadem  
ratione probabitur angulum  $VrT$  æqualem  
esse angulo  $TrS$  ideoque linea  $Tr$  bifariam  
dividit angulum  $VrS$ , sed ea linea Para-  
bolæ Tangens est quæ bifariam dividit an-  
gulum quem faciunt duæ lineæ ductæ à pun-  
cto quovis Parabolæ una ad focum altera  
perpendiculariter ad directricem (per  
Theor. III. de Parabola n. 224.) ergo li-  
nea  $TR$  tangit Parabolam descriptam siue  
Parabola descripta tanget Rectam  $TR$ .

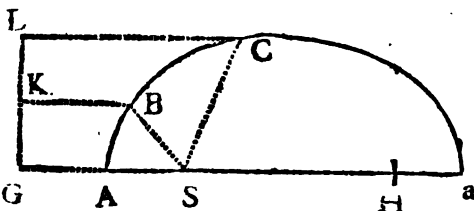
Z

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

## PROPOSITIO XX. PROBLEMA XII.

*Circa datum umbilicum trajectoriam quamvis specie<sup>(1)</sup> datam describere, quæ per data puncta transibit & rectas tanget positione datas.*

**Caf. 1.** Dato umbilico  $S$ , describenda fit trajectoria  $ABC$  per puncta duo  $B, C$ . Quoniam trajectoria datur specie, dabitur ratio axis principalis ad distantiam umbilicorum. In ea ratione cape  $KB$  ad  $BS$ , &  $LC$  ad  $CS$ . Centris  $B, C$ , intervallis  $BK, CL$ , describe circulos duos, & ad rectam  $KL$ , quæ tangat eosdem in  $K$  &  $L$ , demitte perpendicularum  $SG$ , idemque secæ in  $A$  &  $a$ , ita ut fit  $GA$  ad  $AS$  &  $Ga$  ad  $aS$  ut est  $KB$  ad  $BS$  & axe  $Aa$ , verticibus  $A, a$ , describatur trajectoria. Dico factum. Sit enim  $H$  umbilicus alter figuræ descriptæ, & cum sit  $GA$  ad  $AS$  ut  $Ga$  ad  $aS$ , erit divisim  $Ga - GA$  seu  $Aa$  ad  $aS - AS$  seu  $SH$  in eâdem ratione, ideoque in ratione quam habet axis principalis figuræ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus; (<sup>k</sup>) & propterea figura descripta est ejusdem speciei cum describenda. (<sup>1</sup>) Cumque sint  $KB$  ad  $BS$  &  $LC$  ad  $CS$  in eâdem ratione, transibit hæc figura per puncta  $B, C$ , ut ex conicis manifestum est.



(<sup>1</sup>) 292. Sectiones conicæ sunt ejusdem speciei, seu similes, quarum axes duo, vel quod idem est, axis major & focorum distantia sunt inter se in datâ ratione; Ex hac enim ratione unice pendent partium sectionis ratio ac respectiva positio, atque hinc fit ut parabolæ omnes similes sint quod in omnibus focorum distantia infinita majori axi æqualis sit.

(<sup>k</sup>) \* Si describenda fit hyperbola, punctum  $a$ , sumi debet in perpendicularo  $SG$ , ad alteram partem lineæ  $GL$ , producto ut fit  $G$ , inter  $A$ , &  $a$ , tumque erit  $Ga + GA$ , seu  $Aa$  ad  $aS + AS$ , seu  $SH$ , in ratione  $GA$  ad  $AS$ , adeoque in ratione quam habet axis principalis hyperbolæ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus, & propterea hyperbola de-

scripta similis est hyperbolæ describendæ.

(<sup>1</sup>) Ut demonstretur puncta  $B$  &  $C$  ad Sectionem Conicam descriptam pertinere, quædam prævia ex Conicis sunt usurpanda.

293. Lemma... Sit sectionis conicæ  $AZB$ , axis major  $Aa$ , foci  $S, H$ , semiaxis minor  $c$   $E$  erecta ad axem perpendiculari  $SZ$  per punctum  $Z$ , ducatur tangens  $DZG$  quæ axi occurrat in  $G$ ; tum ex punctis  $G, A$ , & quovis alio axis puncto  $M$ , erigantur ad axem perpendiculares  $GK, AX, MBD$ , & ex puncto sectionis  $B$ , ducatur ad  $GK$ , perpendicularis  $BK$ , erit 1°.  $SZ = \frac{1}{2} L$ , seu dimidio lateri recto, etenim ordinata in foco est semper æqualis semilateri Recto, (per Theor. III. de Ell. & Hyp. & Cor. 2. Theor. I. de Parab. n. 224.)

294. 20. Erit GA ad AS sicut axis major ad distantiam focorum, hoc est GA:AS=Aa:SH; Nam cum G sit punctum in quo Tangens secat Diametrum, ejus distantia GA, Ga, ab utroque vertice sunt inter se sicut abscissae AS Sa ab utroque vertice Diametri sumptae, five est (per Lem. V. de Conic. n. 224.) GA:Ga

=AS:Sa & convertendo GA:Aa=AS:Sa—AS five SH (quia AS=Ha) ergo alternando GA:AS=Aa:SH.

295. 30. Erit factum GS×Sc æquale quadrato semi axis minoris, nam quia est GA:AS=Aa:SH, est componendo GS:AS=SH+Aa:SH, & sumendo dimidium terminorum ultimae rationis est GS:AS=Sc+ca (five Sa):Sc, est ergo GS×Sc=AS×Sa, sed factum AS×Sa, (partium ab uno foco ad utrumque axis majoris verticem sumptarum) est semper æquale quadrato semi axis minoris, nam id factum æquatur in Ellipsi  $cA^2 - cS^2$  (per 5. 2. Elem.) & in Hyperbola  $cS^2 - cA^2$  (per 6. 2. Elem.) utrumque verò æquatur quadrato semi axis minoris per naturam focorum (Theor. III. de Hyper. & Ellip. 224.) est ergo GS×Sc=cE<sup>2</sup>.

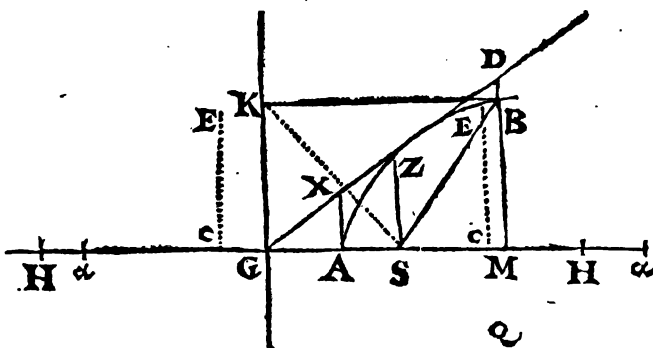
296. 40. Perpendicularis AS in axis Vertice A erecta & terminata ad Tangentem in extremitate Z ordinatae quæ insistit foco S est æqualis AS distantiaæ foci à Vertice... Nam cum ob Triangula similia XGA ZGS sit GA:AX=GS:SZ five  $\frac{1}{2}L$

$$= \frac{2cE^2}{2cA} \text{ \& sit } cE^2 = GS \times Sc \text{ est } GA:AX$$

$$= GS: \frac{GS \times Sc}{cA} = cA:Sc \text{ ( \& duplicando hos terminos )} = Aa:SH, \text{ sed in eadem ratione est GA ad AS (294) ergo}$$

GA:AX=GA:AS & AX=AS.

In Parabolâ idem verum est, in ea enim est GA=AS, GS=2AS & SZ  $\frac{1}{2}L$  = 2AS (Cor. I. Lem. V. de Con. 224.) Ergo hæc proportio GA:AX=GS:SZ in hanc mutatur AS:AX=2AS:2AS ergo AS=AX.



297. 50. Linea à foco S, ad curvæ punctum quodvis B ducta est æqualis lineæ DM, quæ per id punctum transit, & perpendiculariter ad axim ducitur, terminaturque hinc ab axi, illinc à Tangente GZ. Produc enim DM ad Q ubi iterum occurrit Sectioni Conicæ sitque MQ=BM, erit (per Cor. 2. Lem. III. de Conic. n. 224.) ZX<sup>2</sup>:ZD<sup>2</sup>=AX<sup>2</sup>:DM×DP (five DM<sup>2</sup>—BM<sup>2</sup> per 6. 2. Elem.) sed ob Parallelas AX, SZ, MD est ZX:ZD=AS:SM & ZX<sup>2</sup>:ZD<sup>2</sup>=AS<sup>2</sup>:SM<sup>2</sup>. Ergo est AS<sup>2</sup>:SM<sup>2</sup>=AX<sup>2</sup> (five AS<sup>2</sup> per 296):DM<sup>2</sup>—BM<sup>2</sup> unde est SM<sup>2</sup>=DM<sup>2</sup>—BM<sup>2</sup> & addendo utrinque BM<sup>2</sup>, SM<sup>2</sup>+BM<sup>2</sup> (five SB<sup>2</sup> per 47. 1. Elem.) =DM<sup>2</sup> & SB=DM.

298. 60. Si ex sectionis quovis puncto B, ducatur perpendicularis BK ad lineam GK, & linea BS ad focum, erit semper KB:BS=GA:AS, nam propter Triangula similia GMD GAX, est GM (five KB ob Parallelas GM & KB, GK & MB):MD (five BS per 297)=GA:AX (five AS per 296) hoc est KB:BS=GA:AS ideoque KB:BS=Aa:SH quoniam GA:AS=Aa:SH (per 294).

299. Conversa etiam vera est si ducatur perpendicularis in lineam GK, & in ea sumatur B, ita ut sit KB:BS=GA:AS=Aa:SH punctum B est in Sectione Conicâ descriptâ.

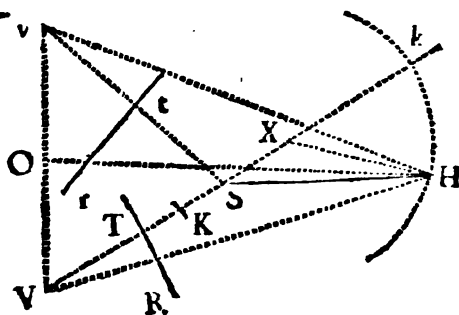
Sit enim Sectio Hyperbola aut Parabola, illa in unico puncto B secabitur per lineam KB, eritque (per 298) KB:BS=Aa:SH, dico autem nullum aliud punctum β sumi posse in ea linea KB producta si lubet, ita ut sit KB:BS=Aa:SH, fingatur enim dari illud punctum β, subtrahanturque termini duarum priorum rationum à se mutuo, erit KB—Kβ (five Bβ):BS—βS=Aa:SH sed quia in Hyperbola est Aa, minor quam SH, & in Parabola ei est æqualis, erit Bβ minor



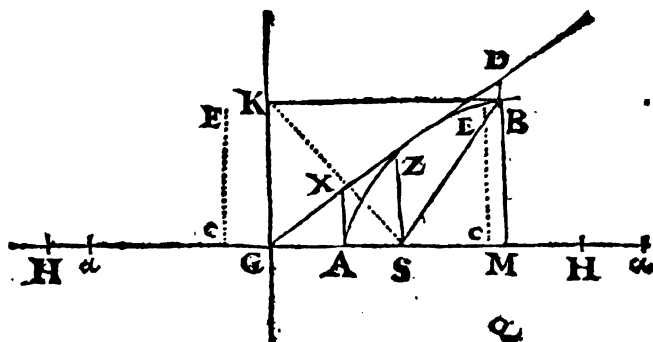
# 180 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO-  
TUS COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Caf. 2.* Dato umbilico S, describenda fit trajectoria quæ rec-  
tas duas TR, tr alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes  
demitte perpendiculara ST, Sr -  
& produc eadem ad V, v,  
ut sint TV, tv, æquales TS,  
sS. Biseca Vv in O, & eri-  
ge perpendicularum infinitum  
OH, rectamque VS infinite  
productam seca in K & k, ita  
ut sit VK ad KS & Vk ad kS  
ut est trajectoriæ describendæ



axis



nor aut æqualis differentiæ SB — Sβ, sed  
SBβ est Triangulum, ergo absurdum est  
(per 20. 1. Elem.) unum ejus latus ut Bβ  
esse minus aut æquale differentiæ aliorum,  
non datur ergo punctum illud β.

2°. Sectio fit Ellipsis; Ducatur SK, si  
GK fit æqualis semi axi minori, erit SK:  
GK=Aa:SH nam (per 295) est GS:cE (five  
GK ex Hyp.) = cE:Sc & GS<sup>2</sup>:GK<sup>2</sup>=cE<sup>2</sup>:  
Sc<sup>2</sup>, & componendo GS<sup>2</sup>+GK<sup>2</sup> (five SK<sup>2</sup>  
per 47. 1. Elem.): GK<sup>2</sup>=cE<sup>2</sup>+Sc<sup>2</sup>) five  
cA<sup>2</sup> per nat. focorum: Sc<sup>2</sup> & SK:GK=  
cA:Sc & duplicando terminos posterioris  
rationis est SK:GK=Aa:SH.

Si GK fit major quàm cE erit GS<sup>2</sup>:GK<sup>2</sup> in  
minori ratione quàm cE<sup>2</sup> ad Sc<sup>2</sup>, & com-  
ponendo erit GS<sup>2</sup>+GK<sup>2</sup> five SK<sup>2</sup> ad GK<sup>2</sup>  
in minori ratione quàm cE<sup>2</sup>+Sc<sup>2</sup> ad Sc<sup>2</sup>  
unde tandem deducetur in hoc casu esse SK  
ad GK in minori ratione quàm Aa ad SH.

Ex pariter si GK fit minor quàm cE, erit  
SK ad GK in majori ratione quàm Aa ad SH.

Sed (per princ. Trigo.) est in Triang. SKG,  
finus totalis ad finum ang. KSG (five ad fi-  
num anguli SKB huic æqualem ob Paralle-  
las GS KB) sicut KS ad KG. Ergo ratio fi-  
nus totalis ad fin. Ang. SKB, æqualis est ra-  
tioni Aa ad SH, si GK fit æqualis cE, est  
illa minor si GK superet cE, est illa major  
si GK minor sit quàm cE.

Ut verò lineæ KP BS habeant rationem  
Aa ad SH, oportet ut in Triang. KBS,  
finus angulorum KSB SKB sint in eâ ratio-  
ne Aa ad SH; Ergo si GK fit æqualis cE,  
est Sinus totalis: Sin. SKB=Sin. KSB: Sin.  
SKB, ideoque in hoc casu erit Sin. tot =  
Sin. KSB, hoc est, linea SB erit perpendi-  
cularis in SK, unica ergo erit, unicumque  
punctum B, sicut etiam linea KB in unico  
puncto Sectioni Conicæ occurret.

Si

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 181

axis principalis ad umbilicorum distantiam. Super diametro  $Kk$  De Mo-  
describatur circulus secans  $OH$  in  $H$ , & umbilicis  $S, H$ , axe <sup>TU COR-</sup>  
principali ipsam  $VH$  æquante, describatur trajectory. Dico <sup>PORUM.</sup>  
factum. Nam biseca  $Kk$  in  $X$ , & junge  $HX, HS, HV, Hv$ . <sup>LIBER</sup>  
Quoniam est  $VK$  ad  $KS$  ut  $Vk$  ad  $kS$ ; & composite ut  $VK +$  <sup>PRIMUS.</sup>  
 $Vk$  ad  $KS + kS$ ; divisimque ut  $Vk - VK$  ad  $kS - KS$ , id est,  
(<sup>m</sup>) ut  $2VX$  ad  $2KX$  &  $2KX$  ad  $2SX$ , ideoque ut  $VX$  ad  $HX$   
&  $HX$  ad  $SX$ , similia erunt triangu-  
la  $VXH, HXS$ , & prop-  
terea  $VH$  erit ad  $SH$  ut  $VX$  ad  $XH$ , ideoque ut  $VK$  ad  $KS$ .  
Habet igitur trajectorye descriptæ axis principalis  $VH$  eam  
rationem ad ipsius umbilicorum distantiam  $SH$ , quam habet  
trajectorye describendæ axis principalis ad ipsius umbilicorum  
distantiam, & propterea ejusdem est speciei. Insuper cum  $VH$ ,  
 $vH$  æquentur axi principali, &  $VS, vS$  à rectis  $TR, tr$  per-  
pendiculariter bisecentur, liquet (ex lem. xv.) rectas illas tra-  
jectoryam descriptam tangere. Q. E. F. (<sup>n</sup>)

Cas.

Si  $GK$  sit major  $cE$  est sin. totalis ad sin.  
 $SKB$  in minori ratione quam sin.  $KS B$  ad  
sin.  $SK B$ , unde sinus totalis minor esse de-  
beret sinu  $KS B$  quod quidem est absurdum,  
nulla ergo duci poterit linea  $SB$  quæ deter-  
minet punctum  $B$  tale ut sit  $KB$  ad  $SB$  sicut  
 $Aa$  ad  $SH$ , sicut etiam in eo casu linea  $KB$   
nullibi occurrit Sectioni Conicæ.

Denique si  $GK$  sit minor  $cE$ , est sin. tot.  
ad sin.  $SKB$  in majori ratione quam sinus  
 $KS B$  ad sin.  $SKB$ , dabitur ergo sinus  $KS B$ ,  
sed ut ad acutum vel obtutum angulum æ-  
qualiter pertinet duæ duci poterunt lineæ  
 $SB$  (sed non plures) quæ requiruntur cum  
 $KB$  habeant rationem, ut etiam linea  $KB$   
hoc in casu duobus in punctis Ellipsim secat.

Ergo si  $KB:BS = GA:AS = Aa:SH$   
punctum  $B$  est in sectione Conicæ.

Ex his autem liquet curvam secundum  
*Newtonianam* solutionem descriptam tran-  
sire per puncta  $B$  &  $C$ , omnia enim planè  
conveniunt ad Lemmatis (293) Hypothesim.

In iis omnibus parabolam uturpamus pro

ellipsi in quâ distantia focorum infinita est,  
ac proinde axi majori æqualis.

(<sup>m</sup>) \* Id est, ut  $2VX$  ad  $2KX$ , &  
 $2KX$  ad  $2SX$ ; nam  $KX = kX = HX$  (per  
constr.) adeoque  $VK + Vk = 2VK +$   
 $2KX = 2VX$ , &  $KS + kS = Kk = Vk$   
 $- VK = 2KX$ ; & quia  $kS - KS = kX +$   
 $SX = KX + SX = KS + 2SX$ , erit  $kS$   
 $- KS = 2SX$ , adeoque  $VK:KS = VX:$   
 $HX = HX:SX$ . Quare similia erunt  
triangu-  
la  $VXH, HXS$ , quorum latera  $VX$   
&  $XH, HX$  &  $KS$ , proportionalia com-  
munem angulum  $X$ , complectuntur.

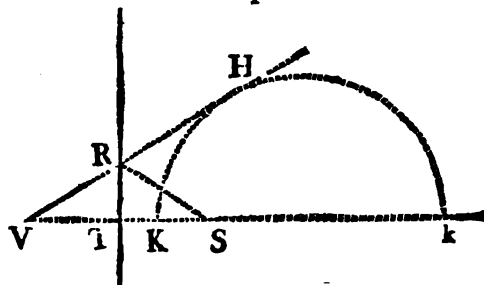
(<sup>n</sup>) \* Si describenda sit hyperbola, in  
 $SV$ , versùs  $V$  productâ, ita sumantur  
puncta  $K, k$ , ut inter utrumque positum  
sit  $V$ , cæteraque fiant ut *NEWTONUS* præ-  
scribit, & quoniam  $VK:KS = V k:kS$ ,  
erit  $Vk - VK:kS - KS = VK:Kk =$   
 $VK + V k:KS + kS$ , sed  $Vk - VK =$   
 $2VX$ ,  $kS - KS = 2KX$ ,  $VK + V k =$   
 $2KX$ ; &  $Kk + kS = 2SX$ . Reliqua  
demonstratio eadem est ac pro ellipsi.

# 182 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Caf. 3.* Dato umbilico  $S$  describenda fit trajectoria quæ rectam  $TR$  tanget in puncto dato  $R$ . In rectam  $TR$  demitte perpendicularem  $ST$ , & produc eandem ad  $V$ , ut fit  $TV$  æqualis  $ST$ . Junge  $VR$  & rectam  $VS$  infinite productam secam in  $K$  &  $k$ , ita ut fit  $VK$  ad  $SK$  &  $Vk$  ad  $Sk$  ut ellipseos describendæ

axis principalis ad distantiam umbilicorum: circuloque super diametro  $Kk$  descripto secetur producta recta  $VR$  in  $H$ , & umbilicis  $S$ ,  $H$ , axe principali rectam  $VH$  æquante, describatur tra-



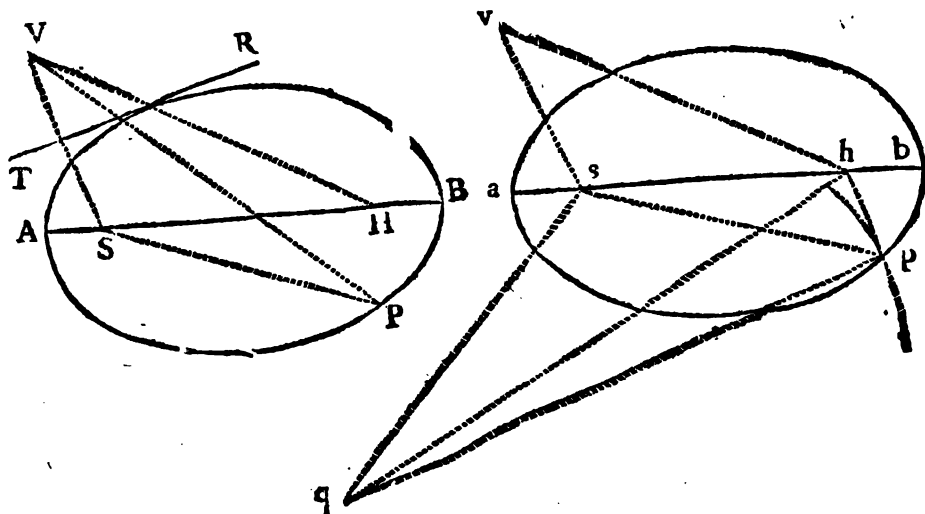
jectoria. Dico factum. Namque  $VH$  esse ad  $SH$  ut  $VK$  ad  $SK$  atque ideo ut axis principalis trajectoriæ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus, (°) patet ex demonstratis in casu secundo, & propterea trajectoriam descriptam ejusdem esse speciei cum describendâ, rectam vero  $TR$  quâ angulus  $VR$  bisecatur, tangere trajectoriam in puncto  $R$ , patet ex conicis. *Q. E. D.*

*Caf. 4.* Circa umbilicum  $S$  describenda jam fit trajectoria  $APB$ , quæ tangat rectam  $TR$ , transeatque per punctum quodvis  $P$  extra tangentem datum, quæque similis sit figuræ  $aph$ , axe principali  $ab$  & umbilicis  $s$ ,  $h$  descriptæ. In tangentem  $TR$  demitte perpendicularum  $ST$ , & produc idem ad  $V$ , ut fit  $TV$  æqualis  $ST$ . Angulis autem  $SV$ ,  $SP$  fac angulos  $hsq$ ,  $shq$  æquales; centroque  $q$  & intervallo quod fit ad  $ab$  ut  $SP$  ad  $VS$  describe circulum secantem figuram  $apb$  in  $p$ . Junge  $sp$  & age  $SH$  quæ fit ad  $sh$  ut est  $SP$  ad  $sp$ , quæque angulum  $PSH$  angulo  $ps$  & angulum  $VSH$  angulo  $psq$  æquales constituat. Denique umbilicis  $S$ ,  $H$ , & axe principali  $AB$  distantiam  $VH$  æquante, describatur sectio conica. Dico factum. Nam si agatur  $sv$  quæ fit ad  $sp$  ut est  $sh$  ad  $sq$ , quæ-

(°) \* Centro circuli litterâ  $X$  notato, jungantur  $HX$ ,  $HS$ ,  $HV$ , & eadem est demonstratio quæ catus 2<sup>1</sup> pro ellipsi,

& si producat  $RV$ ,  $SV$ , versùs  $V$ , ut punctum  $V$ ; situm sit inter  $K$  &  $k$ , eadem quoque erit demonstratio pro hyperbolâ.

que constituat angulum  $vsp$  angulo  $hsq$  & angulum  $vsh$  angulo  $psq$  æquales, triangula  $vsh$ ,  $spq$  erunt similia, & propterea  $vh$



erit ad  $pq$  ut est  $sh$  ad  $sq$ , id est (ob similia triangula  $VSP$ ,  $hsq$ ) ut est  $VS$  ad  $SP$  seu  $ab$  ad  $pq$ . Æquantur ergo  $vh$  &  $ab$ . Porro (p) ob similia triangula  $VSH$ ,  $vsh$ , est  $VH$  ad  $SH$  ut  $vh$  ad  $sh$ , id est, axis conicæ sectionis jam descriptæ ad illius umbilicorum intervallum, ut axis  $ab$  ad umbilicorum intervallum  $sh$ ; & propterea figura jam descripta similis est figuræ  $aph$ . Transít autem hæc figura per punctum  $P$ , (q) eo quod triangulum  $PSH$  simile sit triangulo  $psh$ ; & quia  $VH$  æquatur ipsius axi &  $VS$  bifecatur perpendiculariter à recta  $TR$ , tangit eadem rectam  $TR$ . (r) Q. E. F. L E M-

\* (p) Similia sunt triangula  $VSH$ ,  $vsh$ , nam (per constr.) angulus  $VSP = hsq = vsp$ , & angulus  $HSP = hsp$ , adeoque angulus  $VSH = vsh$ ; & præterea  $sp:sh = SP:SH$ , &  $sv:sp = sh:sq = SV:SP$ , ob similia triangula  $VSP$ ,  $hsq$ ; quare ex æquo  $sv:sh = SV:SH$ , triangula igitur  $VSH$ ,  $vsh$ , quorum latera proportionalia æquales angulos complectuntur sunt similia.

\* (q) Nam si ducatur recta  $SP$ , peri-

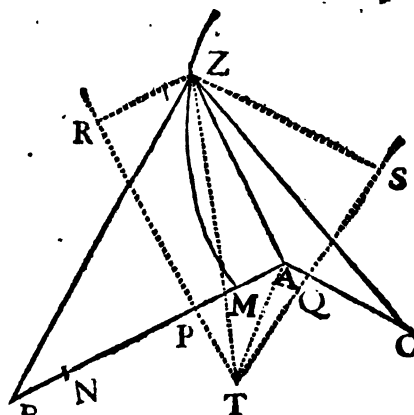
metro figuræ occurrens in  $P$ , & angulum  $PSH$ , æqualem faciens angulo  $psh$ , patet ob similitudinem sectionum conicarum, triangula duo  $PSH$ ,  $psh$ , fore similia; unde vicissim manifestum est punctum  $P$ , esse in perimetro figuræ, si triangulum  $PSH$ , simile sit triangulo  $psh$ .

\* (r) Eadem est constructio ac demonstratio pro hyperbolâ, si foci  $H$ ,  $h$ , & vertices  $B$ ,  $b$ , ad contrariam partem transferantur.

• L E M M A X V I.

*A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere  
tres rectas quarum differentiæ vel dantur  
vel nullæ sunt.*

*Cas. 1.* Sunto puncta illa da-  
ta  $A, B, C$  & punctum quar-  
tum  $Z$ , quod invenire oportet;  
ob datam differentiam linearum  
 $AZ, BZ$ , locabitur punctum  
 $Z$  in hyperbola cujus umbilici  
sunt  $A$  &  $B$ , & principalis axis  
differentia illa data. Sit axis  
ille  $MN$ . Cape  $PM$  ad  $MA$   
ut est  $MN$  ad  $AB$ , & erecta  
 $PR$  perpendiculari ad  $AB$ , de-  
missaque  $ZR$  perpendiculari ad



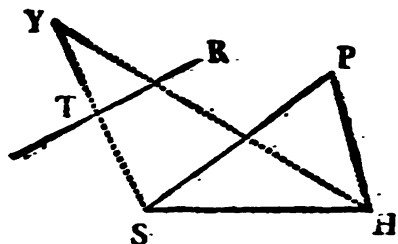
$PR$ ; erit, <sup>(1)</sup> ex naturâ hujus hyperbolæ,  $ZR$  ad  $AZ$  ut est  $MN$   
ad  $AB$ . Simili discursu punctum  $Z$  locabitur in aliâ hyperbo-  
lâ, cujus umbilici sunt  $A, C$  & principalis axis differentia inter  
 $AZ$  &  $CZ$ , ducique potest  $QS$  ipsi  $AC$  perpendicularis, ad  
quam si ab hyperbolæ hujus puncto quovis  $Z$  demittatur normalis  
 $ZS$ , hæc fuerit ad  $AZ$  ut est differentia inter  $AZ$  &  $CZ$   
ad  $AC$ . Dantur ergo rationes ipsarum  $ZR$  &  $ZS$  ad  $AZ$ ,  
& idcirco datur earundem  $ZR$  &  $ZS$  ratio ad invicem; ideo-  
que si rectæ  $RP, SQ$  concurrant in  $T$ , & agantur  $TZ$  &  $TA$ ,  
figura  $TRZS$  dabitur specie, & recta  $TZ$  in qua punc-  
tum  $Z$  alicubi locatur, dabitur positione. Dabitur etiam rec-  
ta  $TA$ , ut & angulus  $ATZ$ ; & ob datas rationes ipsarum  
 $AZ$

\* <sup>(1)</sup> Erit ex naturâ hujus hyperbolæ  $ZR$ , ad  $AZ$ , ut est  $MN$ , ad  
 $AB$ , (298).



# 186 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MOTU CORP. LIBER PRIMUS.  
 differentia inter  $HP$  & axem principalem. (\*) Hoc modo fi-  
 dentur plures tangentes  $TR$ , vel plura puncta  $P$ , deveniunt  
 semper ad lineas totidem  $YH$ , vel  $PH$ , à dictis punctis  $Y$   
 vel  $P$  ad umbilicum  $H$  ductas, quæ vel æquantur axibus,  
 vel datis longitudinibus  $SP$   
 differant ab iisdem, atque ideo  
 quæ vel æquantur sibi invi-  
 cem, vel datis habent diffe-  
 rentias; & inde, per lemma  
 superius, datur umbilicus ille  
 aliter  $H$ . Habitis autem um-  
 bilicis una cum axis longitu-  
 dine (quæ vel est  $YH$ ; vel, si trajectoria ellipsis est,  $PH+SP$ ;  
 sin hyperbola,  $PH-SP$ ) habetur trajectoria. Q. E. L.

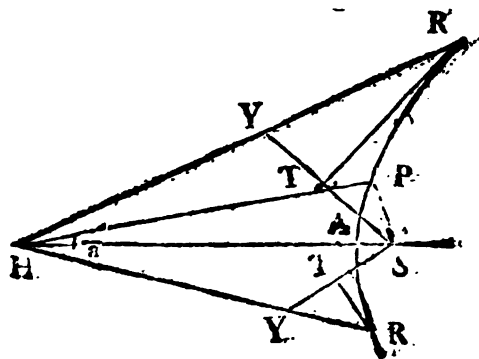


## Scholium.

Ubi trajectoria est hyperbola, sub nomine hujus trajectoriæ  
 oppositam hyperbolam non comprehendo. Corpus enim per-  
 gendo in motu suo, in oppositam hyperbolam transire non po-  
 test.

Casus.

¶ (\*) 301. Si dentur tres tangentes, da-  
 buntur tria puncta ut  $Y$ , ex quibus ad um-  
 bilicum  $H$ , insciendæ erunt tres rectæ  
 æquales ut  $YH$ , quod fit per Cas. 3. Lem-  
 matis superioris. Si duæ dentur tangen-  
 tes & punctum perimetri sectionis  $P$ , da-  
 buntur duo puncta ut  $Y$ , ex quibus ad um-  
 bilicum  $H$ , insciendæ erunt duæ rectæ  
 æquales, & 3<sup>um</sup> punctum  $P$ , ex quo du-  
 cenda  $PH$ , cujus differentia à lineâ  $YH$ ,  
 est data  $SP$ . Nam in ellipsi  $PH+SP=$   
 $YH$ , adeoque  $YH-PH=SP$ ; in hy-  
 perbola  $PH-SP=YH$ , unde  $PH-YH=$   
 $SP$ , estque Casus 2us Lem. XVI. Tan-  
 dem si dentur tria perimetri puncta ut  $P$ ,  
 locum habet Casus 1us ejusdem Lemma-  
 tis.



Casus ubi dantur tria puncta sic solvitur expeditius. Dentur **DE MO-**  
puncta  $B, C, D$ . Junctas  $BC, CD$  produc ad  $E, F$ , ut sit **TU COR-**  
 $EB$  ad  $EC$  ut  $SB$  ad  $SC$ , &  $FC$  ad  $FD$  ut  $SC$  ad  $SD$ . **PORUM.**  
Ad  $EF$  ductam & productam demitte normales  $SG, BH$ , in **LIBER**  
que  $GS$  infinite productâ cape  $GA$  ad  $AS$  &  $Ga$  ad  $aS$  ut **PRIMUS.**  
est  $HB$  ad  $BS$ ; & erit  $A$  vertex, &  $Aa$  axis principalis tra-  
jectoriæ: quæ, perinde ut  $GA$  major, æqualis, vel minor fue-  
rit quam  $AS$ ,

erit ellipsis, pa-  
rabola vel hy-  
perbola; pun-  
cto  $a$  in primo  
casu cadente ad  
eandem partem  
lineæ  $GF$  cum  
puncto  $A$ ; in  
secundo casu  
abeunte in infi-  
nitum; in ter-  
tio cadente ad contrariam partem lineæ  $GF$ . Nam si demit-  
tantur ad  $GF$  perpendiculara  $CI, DK$ ; erit  $IC$  ad  $HB$ , ut  $EC$   
ad  $EB$ , hoc est, ut  $SC$  ad  $SB$ ; & vicissim  $IC$  ad  $SC$  ut  $HB$   
ad  $SB$  sive ut  $GA$  ad  $SA$ . Et simili argumento probabitur  
esse  $KD$  ad  $SD$  in eâdem ratione. (\*) Jacent ergo puncta  
 $B, C, D$  in conï sectione circa umbilicum  $S$  ita descripta, ut  
rectæ omnes, ab umbilico  $S$  ad singula sectionis puncta ductæ,  
sint ad perpendiculara à punctis iisdem ad rectam  $GF$  demissa in  
datâ illâ ratione.

Methodo haud multum dissimili hujus problematis solutionem  
tradit clarissimus Geometra *de la Hire*, Conicorum suorum lib.  
VIII. prop. XXV.

S E C-

(\*) \* Jacent ergo puncta  $B, C, D$ , in Conï Sectione (vide n. 298.)



## S E C T I O V.

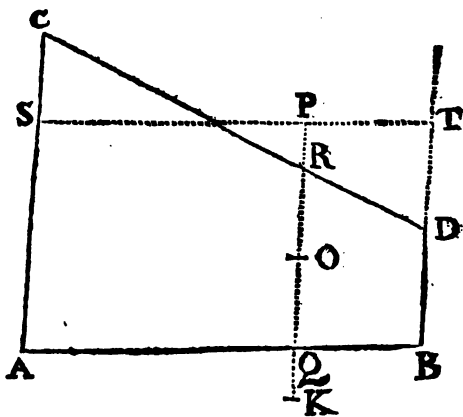
*Inventio orbium ubi umbilicus neuter datur.*

## L E M M A X V I I.

Si à datæ conicæ sectionis puncto quovis  $P$  ad trapezii alicujus  $ABDC$ , in conicâ illâ sectione inscripti, latera quatuor infinite producta  $AB$ ,  $CD$ ,  $AC$ ,  $DB$  totidem rectæ  $PQ$ ,  $PR$ ,  $PS$ ,  $PT$  in datis angulis ducantur, singulæ ad singula: rectangulum ductarum ad opposita duo latera  $PQ \times PR$ , erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera opposita  $PS \times PT$  in datâ ratione.

Cas. 1. Ponamus primò lineas ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, putà  $PQ$  &  $PR$  lateri  $AC$ , &  $PS$  ac  $PT$  lateri  $AB$ . Sintque insuper latera duo ex oppositis, putà  $AC$  &  $BD$ , sibi invicem parallela. Et recta, quæ bisecat parallela illa latera, erit una ex diametris conicæ sectionis, & bisecabit etiam.

$RQ$ . Sit  $O$  punctum in quo  $RQ$  bisecatur, & erit  $PO$  ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc  $PO$  ad  $K$ , ut sit  $OK$  æqualis  $PO$ , & erit  $OK$  ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta  $A$ ,  $B$ ,  $P$  &  $K$  sint ad conicam sectionem, &  $PK$  secet  $AB$  in dato angulo, erit (per prop.



17, 19, 21 & 23. lib. III. Conicorum Apollonii) rectangulum  $PQK$  ad rectangulum  $AQB$  in datâ ratione. (†) Sed  $QK$  &  $PR$  æqua-

(†) Erit Rectangulum  $PQK$  ad Rectangulum  $AQB$  in datâ ratione. Liqueat (per Lem. III. de Conic.) quod si linea quævis in Sectione Conicâ, terminata ut  $PK$  secet aliam

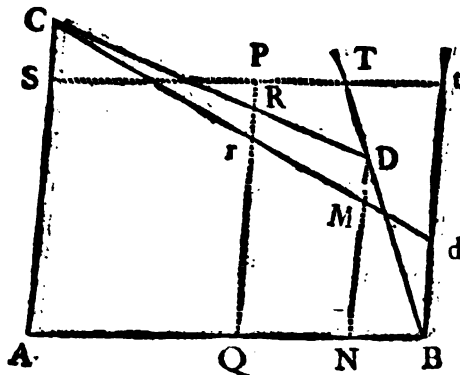
# PRINCIPIA MATHEMATICA. 189

æquales sunt, utpote æqualium  $OK$ ,  $OP$ , &  $OQ$ ,  $OR$  differentiæ, & inde etiam rectangula  $PQK$  &  $PQ \times PR$  æqualia sunt; atque ideo rectangulum  $PQ \times PR$  est ad rectangulum  $AQB$ , hoc est ad rectangulum  $PS \times PT$  in datâ ratione. *Q. E. D.*

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Caf. 2.* Ponamus jam trapezii latera opposita  $AC$  &  $BD$  non esse parallela. Age  $Bd$  parallelam  $AC$  & occurrentem tum rectæ  $ST$  in  $r$ , tum conicæ sectioni in  $d$ . Junge  $Cd$  secantem

$PQ$  in  $r$ , & ipsi  $PQ$  parallelam age  $DM$  secantem  $Cd$  in  $M$  &  $AB$  in  $N$ . Jam ob similia triangula  $BTt$ ,  $DBN$ ; est  $Bt$  seu  $PQ$  ad  $Tt$  ut  $DN$  ad  $NB$ . Sic &  $(2)$   $Rr$  est ad  $AQ$  seu  $PS$  ut  $DM$  ad  $AN$ . Ergo ducendo antecedentes in antecedentes & consequentes in consequentes, ut rectan-



gulum  $PQ$  in  $Rr$  est ad rectangulum  $PS$  in  $Tt$ , ita rectangulum  $NDM$  est ad rectangulum  $ANB$ , & (*per caf. 1.*) ita rectangulum  $PQ$  in  $Pr$  est ad rectangulum  $PS$  in  $Pt$ , ( $\dagger$ ) ac divisim ita rectangulum  $PQ \times PR$  est ad rectangulum  $PS \times PT$ . *Q. E. D.*

*Caf.*

aliâ lineam etiam in Sectione Conicâ terminatam ut  $AB$ , Rectangulum partium lineæ  $PK$  erit ad Rectangulum partium lineæ  $AB$  ut Rectangulum partium lineæ cujuscvis altius Parallelæ lineæ  $PK$  & ad Sectionem terminatæ, ad Rectangulum partium quas hæc nova linea secat in lineâ  $AB$ : ideo ubicumque sit punctum  $P$  Rectangula  $PQK$  &  $AQB$  erunt in eadem datâ ratione.

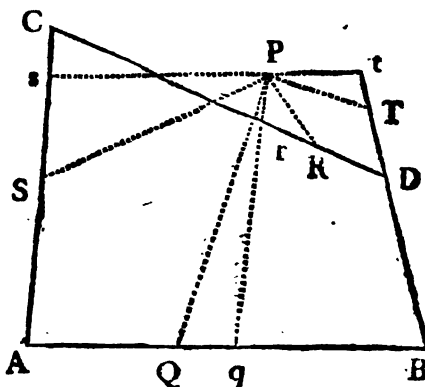
$(2)$  \*  $Rr: AQ$  seu  $PS = DM: AN$ . Sunt enim propter parallelas  $Rr$ ,  $DM$ ,

triangula  $rCR$  &  $MCD$  similia, ideoque  $Rr: DM = Cr: CM$ ; sed est  $Cr: CM = AQ$  vel  $PS: AN$ ; ergo  $Rr: DM = AQ$  vel  $PS: AN$  &  $Rr: PS = DM: AN$ .

$(\dagger)$  \* *Ac divisim*, Ex Demonstratis  $NDM: ANB = PQ \times Rr: PS \times Tt = PQ \times Pr: PS \times Pt$ , & divisim  $NDM: ANB = PQ \times Pr - PQ \times Rr: PS \times Pr - PS \times Tt = PQ \times PR: PS \times PT$ , sed ratio  $NDM$  ad  $ANB$  data est, ergo & ratio  $PQ \times PR$  ad  $PS \times PT$ .

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Caf. 3.* Ponamus denique  
lineas quatuor  $PQ$ ,  $PR$ ,  $PS$ ,  
 $PT$  non esse parallelas lateri-  
bus  $AC$ ,  $AB$ , sed ad ea ut-  
cunque inclinatas. Earum vi-  
ce age  $Pq$ ,  $Pr$  parallelas ip-  
si  $AC$ ; &  $Ps$ ,  $Pt$  parallelas  
ipfi  $AB$ ; & propter datos an-  
gulos triangulorum  $PQq$ ,  $PRr$ ,  
 $PSs$ ,  $PTt$ , dabuntur rationes  
 $PQ$  ad  $Pq$ ,  $PR$  ad  $Pr$ ,  $PS$  ad  
 $Ps$ , &  $PT$  ad  $Pt$ ; atque ideo rationes compositaë  $PQ \times PR$



ad  $Pq \times Pr$ , &  $PS \times PT$  ad  $Ps \times Pt$ . Sed, per superius de-  
monstrata, ratio  $Pq \times PR$  ad  $Ps \times Pt$  data est: ergo & ratio  
 $PQ \times PR$  ad  $PS \times PT$ . Q. E. D.

### LEMMA XVIII.

*Isdem positis, si rectangulum ductarum ad opposita duo latera trapezii*  
 $PQ \times PR$  *sit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera*  
 $PS \times PT$  *in datâ ratione; punctum P, à quo lineæ ducuntur,*  
*tanget conicam sectionem circa trapezium descriptam.*

Per puncta  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  & aliquod infinitorum punctorum  
 $P$ , puta  $p$ , concipe conicam sectionem describi: dico punctum  
 $P$  hanc semper tangere. Si negas, junge  $AP$  secantem hanc  
conicam sectionem alibi quam in  $P$ , si fieri potest, puta in  $b$ .  
Ergo si ab his punctis  $p$  &  $b$  ducantur in datis angulis ad la-  
tera trapezii rectæ  $pq$ ,  $pr$ ,  $ps$ ,  $pt$  &  $bk$ ,  $bn$ ,  $bf$ ,  $bd$ ;  
erit ut  $bk \times bn$  ad  $bf \times bd$  ita (per lem. xvii.)  $pq \times pr$  ad  
 $ps \times pt$ , & ita (per hypoth.)  $PQ \times PR$  ad  $PS \times PT$ . Est &  
propter similitudinem trapeziorum  $bkAf$ ,  $PQAS$ , ut  $bk$  ad  
 $bf$  ita  $PQ$  ad  $PS$ . Quare, applicando terminos prioris pro-  
portionis ad terminos correspondentes hujus, erit  $bn$  ad  $bd$  ut  
 $PR$  ad  $PT$ . (†) Ergo trapezia æquiangula  $Dnbd$ ,  $DRPT$   
similia

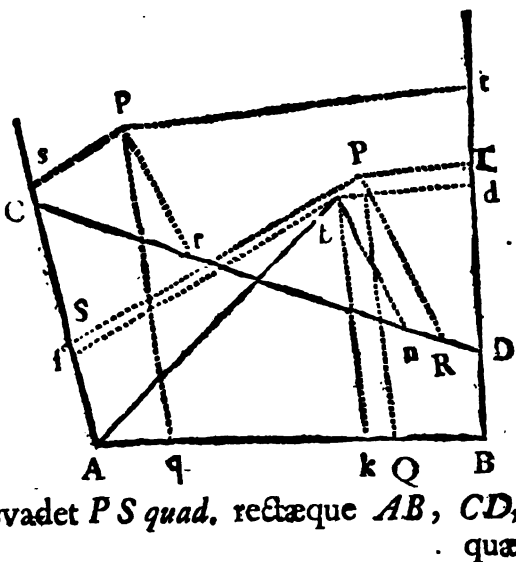
(†) \* Cum sit  $bk \times bn : bf \times db =$   
 $PQ \times PR : PS \times PT$

item  $bf : bk = PS : PQ$   
erit  $bn : bd = PR : PT$

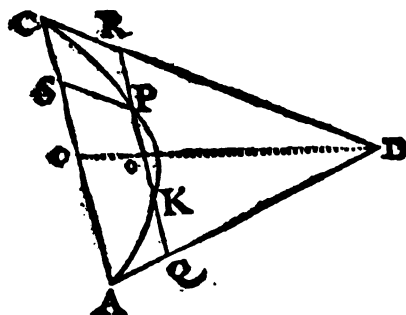
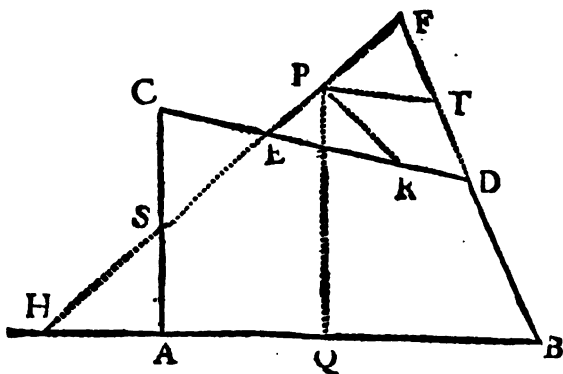


DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

singulæ ad singulas, in datis  
angulis ducantur, sitque  
rectangulum sub duabus du-  
ctis (\*)  $PQ \times PR$  ad quadra-  
tum tertiæ  $PS$  in datâ ratio-  
ne: punctum  $P$ , à quibus  
rectæ ducuntur, locabitur in  
sectione conicâ quæ tangit  
lineas  $AB$ ,  $CD$  in  $A$  &  $C$ ;  
& contra. Nam coeat li-  
nea  $BD$  cum lineâ  $AC$ ,  
manente positione trium  
 $AB$ ,  $CD$ ,  $AC$ , dein coeat  
etiam linea  $PT$  cum lineâ  $PS$ :  
& rectangulum  $PS \times PT$  evadet  $PS$  quad. rectæque  $AB$ ,  $CD$ ,



idem pari argumto respectu punctorum  
 $A$ ,  $B$ , reperitur, si ponatur  $AQ = 0$  vel  
 $AQ = AB$ .



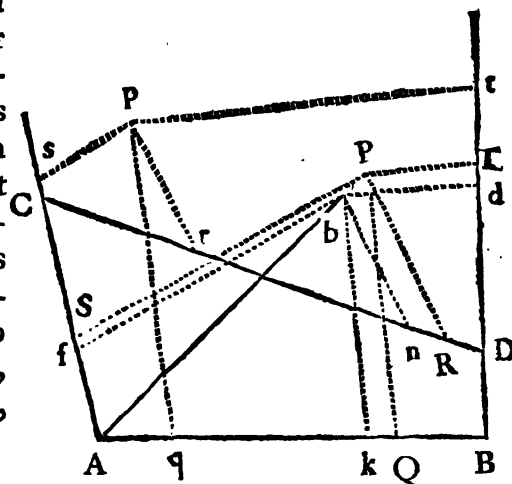
gulorum illorum ratione datâ reperitur  
secundum gradum non superabit; Cùm  
igitur, ut vulgò notum est, æquationis qua-  
draticæ locus sit Sectio conicâ, patet lo-  
cum punctorum  $P$ , esse ad sectionem conicâ.  
Quod autem sectio illa per pun-  
cta  $C$ ,  $D$ ,  $P$ ,  $A$ , transeat inito calculo  
facile ostenditur, nam si in æquatione lo-  
ci ponatur  $CE = 0$ , invenietur valor  
unus ipsius  $PE = 0$ , adeoque punctum  $P$ ,  
cadit in  $C$ , si ponatur  $CE = CD$ , inve-  
nietur quoque valor unus  $PE = 0$ , ac proin-  
de punctum  $P$ , cum puncto  $D$ , coincidit;

(\*) Hinc si rectæ tres &c. Sint tres li-  
neæ  $AB$ ,  $CD$ ,  $AC$  positione datæ, &  
lineæ  $AB$ ,  $CD$  tangent sectionem conicâ  
in  $A$  &  $C$ , & à puncto communi  $P$   
ducantur tres Rectæ  $PQ$ ,  $PR$ ,  $PS$  in datis  
angulis ad singulas  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $A$ ,  $C$  erit  
 $PQ \times PR$  in ratione datâ ad quadratum  
tertiæ  $PS$ : Sit enim  $PS$  parallela lineæ  
 $DC$  & sint  $RP$ ,  $PQ$  parallelæ lineæ  $CA$   
sitque  $PK$  chorda Sectionis, sumatur me-  
dium



DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

evadet circulus. (c) Idem fiet, si lineæ quatuor ducantur in angulis quibuscumque, & rectangulum sub duabus ductis  $PQ \times PR$  sit ad rectangulum sub aliis duabus  $PS \times PT$  ut rectangulum sub sinibus angulorum  $S, T$ , in quibus duæ ultimæ  $PS, PT$  ducuntur, ad rectangulum sub sinibus angulorum  $Q, R$ , in quibus duæ primæ  $PQ,$

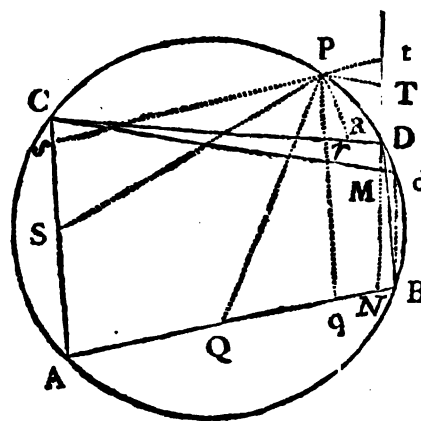
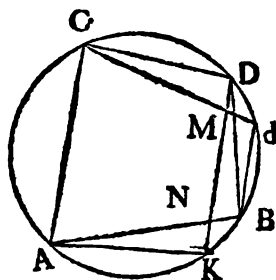


$PR,$

(c) 304. Sectio Conica evadet circulus. Si ex trapezii  $ABDC$

circulo inscripti angulo quovis  $D$ , agatur recta  $DN$ , lateri  $AC$  parallela, & lateri  $AB$  occurrens in  $N$ , deinde ex altero angulo  $B$ , ducatur  $Bd$ , lateri  $AC$  parallela circulo occurrens in  $d$ , jungaturque  $Cd$  rectam  $DN$ , secans in  $N$ , erit  $DN \times DM = AN \times NB$ . Nam jungatur  $AK$ , & quoniam arcus  $CD$ , &  $AK$ ,  $DJ$ , &  $KB$ , inter easdem parallelas intercepti æquales sunt, anguli  $DCd$ , &  $BAK$ ,  $CDK$  &  $AKD$ , iis arcibus insistentes & æqualium arcuum chordæ  $CD$ ,  $AK$ , æquantur; quare triangula  $AKN$ ,  $CDM$ , similia & æqualia sunt; est igitur  $DM = NK$ ; sed ex naturâ circuli  $AN \times NB = KN \times DN$ , ergo  $AN \times NB = DM \times DN$ .

305. Si ergo sectio conica trapezio circumscripta vertatur in circulum, hoc est, si sectionis planum basi conici fiat parallelum, erit rectangulum  $PQ \times PR$  ad rectangu-



lum  $PS \times PT$ , ut rectangulum sub sinibus angulorum  $S, T$ , ad rectangulum sub sinibus angulorum  $Q, R$ ... Dem... factâ constructione Cas. 3<sup>æ</sup> Lem. XVII. agantur rectæ  $D'N$ ,  $Bd$ , lateri  $AC$  parallelæ, ut in articulo superiori; & erit per demonstrationem casus 2<sup>æ</sup> Lem. XVII.,  $ND \times DM : AN \times NB = Pq \times Pr : Ps \times Pt$ , hoc est (304)  $Pq \times Pr = Ps \times Pt$ . Jam verò angulorum sinibus litterâ  $S$  designatis

*PR*, ducuntur. (f) Cæteris in casibus locus puncti *P* erit aliqua trium figurarum, quæ vulgo nominantur sectiones conicæ. (g) Vice autem trapezii *ABCD* substitui potest quadrilaterum, cujus latera duo opposita se mutuo instar diagonalium decussant. Sed & è punctis quatuor *A, B, C, D* possunt unum vel duo abire ad infinitum, eoque pacto latera figuræ, quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in casu sectio conica transibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.

L E M-

signatis erit  $S. PqA = S. CAB$ , &  $S. PrC = S. ACD$ , ob parallelas  $Pq, AC$ , &  $S. PsS = S. PsC = S. CAB$ , &  $S. PtT = S. ABD$ , ob parallelas  $st, AB$ , & ob angulum  $ACD$  complementum anguli  $ABD$  ad duos rectos,  $S. PtT = S. ACD$ .

Porro

$PQ:Pq = S. PqA (S. CAB):S. PQB$   
 $Ps:PS = S. PSC:S. PsS (S. CAB).$   
 $PR:Pr = S. PrC (S. ACD):S. PRC.$   
 $Pt:PT = S. PTT:S. PtT. (S. ACD).$

Ergo per compositionem rationum

$PQ \times PR \times Ps \times Pt:PS \times PT \times Pq \times Pr$   
 $= PQ \times PR:PS \times PT$

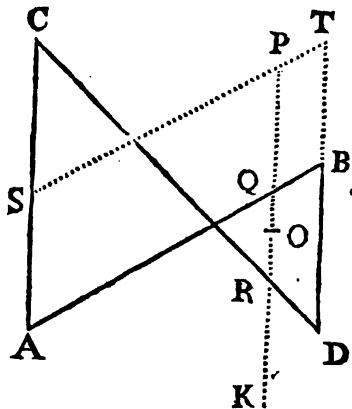
$= S. PSC \times S. PTT:S. PQB \times S. PRC.$

Q. e. D.

306. Coroll... Eadem manente proportionem, si omnes anguli ad  $S, T, Q, R$ , fuerint æquales rectangulum  $PQ \times PR$ , erit quoque æquale rectangulo  $PS \times PT$ .

(f) \* Nam vel punctum  $P$ , locabitur in sectione rectilinea per verticem coni transeunte, vel in circulo, vel tandem in aliqua trium sectionum conicarum, nullæ enim aliæ sunt sectiones conicæ, ut notum est.

(g) 307. Vice autem trapezii substitui potest quadrilaterum  $ABDC$ , cujus latera duo  $AB, CD$ , se mutuo instar diagonalium decussant; huic enim quadrilatero absque mutatione aptari possunt tam constructiones quam demonstrationes Lemmatum XVII. & XVIII. Exemplum sit

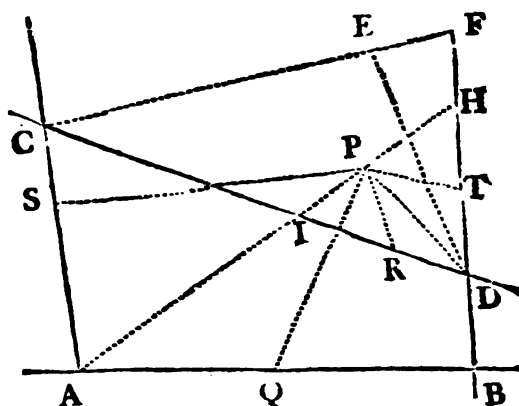


Caf. 1. Lem. XVII. Ponamus lineas ex puncto  $P$ , ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, puta  $PQ$  &  $PR$ , lateri  $AC$  &  $PS$ , ac  $PT$ , lateri  $AB$ ; sintque insuper latera duo ex oppositis puta  $AC$  &  $BD$ , sibi invicem parallela & recta quæ biecat &c. cæteræ omnes demonstrationis partes eodem modo transferuntur ad quadrilaterum  $CABD$ .



DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Invenire punctum P, à quo si rectæ quatuor PQ, PR, PS, PT ad alias totidem positione datas rectas AB, CD, AC, BD, singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, rectangulum sub duabus ductis,  $PQ \times PR$ , sit ad rectangulum sub aliis duabus,  $PS \times PT$ , in datâ ratione.*



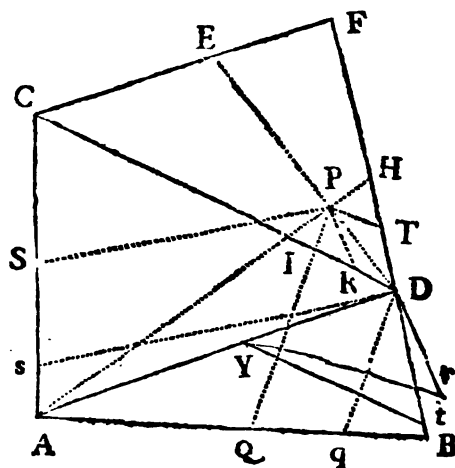
Lineæ  $AB, CD$ , ad quas rectæ duæ  $PQ, PR$  unum rectangulorum continentes ducuntur, convenient cum aliis duabus positione datis lineis in punctis  $A, B, C, D$ . Ab eorum aliquo  $A$  age rectam quamlibet  $AH$ , in quâ velis punctum  $P$  reperiri. Secet ea lineas oppositas  $BD, CD$ , nimirum  $BD$  in  $G$  &  $CD$  in  $I$ , & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes  $PQ$  ad  $PA$  &  $PA$  ad  $PS$ , ideoque ratio  $PQ$  ad  $PS$ . Auferendo hanc à datâ ratione  $PQ \times PR$  ad  $PS \times PT$ , dabitur ratio  $PR$  ad  $PT$ , & addendo datas rationes  $PI$  ad  $PR$ , &  $PT$  ad  $PH$  dabitur ratio  $PI$  ad  $PH$ , atque ideo punctum  $P$ . *Q. E. I.*

*Corol. 1.* Hinc <sup>(h)</sup> etiam ad loci punctorum infinitorum  $P$ .

(h) 308. Minima sit punctorum  $P, D$ , distantia  $PD$ , agantur  $Ds, Dq$ , ad  $AC, AB$ , in angulis datis  $PSC, PQA$ , & iunctâ  $AD$ , ex illius quovis puncto  $Y$ , ducantur  $Yr$ , lateri  $CD$ , parallela, &  $Yt$ , ad  $DB$ , in angulo dato  $PTH$ ; tum ex puncto  $D$ , ad  $Yr$ , ducatur  $Dr$ , in angulo dato  $PRI$ ; punctis  $P, D$ , coeuntibus erit  $PQ : PA = Dq : DA$ , &  $PA : PS = DA : Ds$ , adeoque  $PQ : PS = Dq : Ds$ , & proinde  $PQ \times PR : PS \times PT = Dq \times PR : Ds \times PT$ . Ratio data rectanguli  $PQ \times PR$  ad  $PS \times PT$  sit  $A$  ad  $B$ , & erit  $Dq \times PR : Ds \times PT = A$  ad  $B$ , adeoque

$PR : PT = A \times Ds : B \times Dq$   
& evanescente  $PD$ , ob similia triangula  $PIR, DYr$ , erit

$$PI : PR = DY : Dr.$$



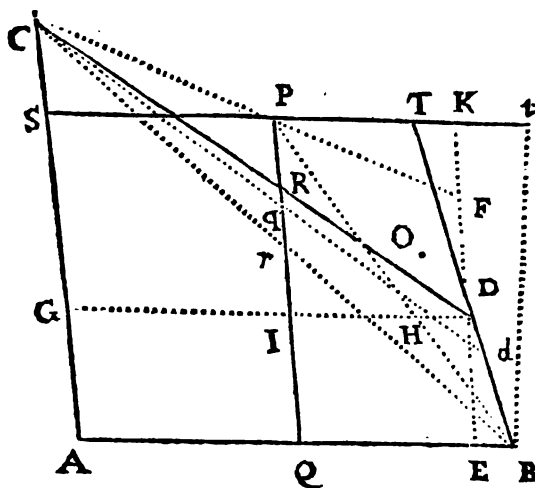


Atque ita problematis veterum de quatuor lineis ab *Euclide* incepti & ab *Appollonio* continuati non calculus, sed compositio geometrica, qualem veteres quærebant, in hoc corollario exhibetur. <sup>(1)</sup>

## L E M M A X X.

Si parallelogrammum quodvis *ASPQ* angulis duobus oppositis *A* & *P* tangit sectionem quamvis conicam in punctis *A* & *P*; & lateribus unius angulorum illorum infinite productis *AQ*, *AS* occurrit eidem sectioni conicæ in *B* & *C*; à punctis autem occursum *B* & *C* ad quintum quodvis sectionis conicæ punctum *D* agantur rectæ duæ *BD*, *CD* occurrentes alteris duobus infinite productis parallelogrammi lateribus *PS*, *PQ* in *T* & *R*: erunt semper abscissæ laterum partes *PR* & *PT* ad invicem in datâ ratione. Et contra, si partes illæ abscissæ sunt ad invicem in datâ ratione, punctum *D* tanget sectionem conicam per puncta quatuor *A*, *B*, *C*, *P* transeuntem.

Cas. 1. Jungantur *BP*, *CP* & à puncto *D* agantur rectæ duæ *DG*, *DE*, quarum prior *DG* ipsi *AB* parallela sit & occurrat *PB*, *PQ*, *CA* in *H*, *I*, *G*; altera *DE* parallela sit ipsi *AC* & occurrat *PC*, *PS*, *AB* in *F*, *K*, *E*: & erit (per lem. xvii.) rectangulum *DE* × *DF* ad rectangulum *DG* × *DH*



fuerit linea recta ac proinde tangens ipsa *AE*, (303) recta *BF*, tangenti parallela nullibi occurreret loco; si verò locus fuerit alia conicæ sectio, recta *BF*, huic sectioni occurreret in puncto aliquo *F*, tumque diameter *AG*, vel utrinque terminabitur ad hyperbolas oppositas, quo casu, puncta *A* & *H*, sita erunt ad easdem partes ipsius *G*, vel claudetur Ellipsi aut circulo, & punctum *G*, inter *A* & *H* positum erit,

vel tandem nullibi occurreret loco qui proinde erit parabola. Porro datis sectionis conicæ vertice, diametro, hujus lateris recto ac ordinatarum angulo sectio describi potest (per prop. 52. 53. 54. 55. lib. 1. Conic. *Apoll.* sive ex iis quæ in notâ 224. de Conicis tradita fuere).

(1) \* Hoc veterum problema primus in suâ Geometriâ *Cartesius* per calculum analyticum generaliter resolvit.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 199

in ratione datâ. Sed est  $PQ$  ad  $DE$  (feu  $IQ$ ) ut  $PB$  ad  $DE$  Mo-  
 $HB$ . ideoque ut  $PT$  ad  $DH$ ; & vicissim  $PQ$  ad  $PT$  ut  $DE$  TU COR-  
 ad  $DH$ . Est &  $PR$  ad  $DF$  ut  $RC$  ad  $DC$ , ideoque ut (IG PORUM.  
 vel)  $PS$  ad  $DG$ , & vicissim  $PR$  ad  $PS$  ut  $DF$  ad  $DG$ ; & LIBER  
 conjunctis rationibus fit rectangulum  $PQ \times PR$  ad rectangulum PRIMUS.  
 $PS \times PT$  ut rectangulum  $DE \times DF$  ad rectangulum  $DG \times DH$ ,  
 atque ideo in datâ ratione. Sed dantur  $PQ$  &  $PS$ , & prop-  
 terea ratio  $PR$  ad  $PT$  datur. Q. E. D.

Cas. 2. Quod si  $PR$  &  $PT$  ponantur in datâ ratione ad invi-  
 cem, (m) tum simili ratiocinio regrediendo, sequetur esse rectan-  
 gulum  $DE \times DF$  ad rectangulum  $DG \times DH$  in ratione datâ, ideo-  
 que punctum  $D$  (per lem. XVIII.) contingere conicam sectionem  
 transeuntem per puncta  $A, B, C, P$ . Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si agatur  $BC$  secans  $PQ$  in  $r$ , & in  $PT$  ca-  
 piatur  $Pt$  in ratione ad  $Pr$  quam habet  $PT$  ad  $PR$ : erit  
 $Bt$  tangens conicæ sectionis ad punctum  $B$ . Nam concipe  
 punctum  $D$  coire cum puncto  $B$ , ita ut chordâ  $BD$  evanes-  
 cente,  $BT$  tangens evadat; &  $CD$  ac  $BT$  coincident cum  
 $CB$  &  $Bt$ .

Corol. 2. Et vice versâ si  $Bt$  fit tangens, & ad quodvis  
 conicæ sectionis punctum  $D$  convenient  $BD, CD$ ; erit  $PR$   
 ad  $PT$  ut  $Pr$  ad  $Pt$ . Et contra, si sit  $PR$  ad  $PT$  ut  $Pr$   
 ad  $Pt$ : convenient,  $BD, CD$  ad conicæ sectionis punctum  
 aliquod  $D$ .

Corol. 3. Conica sectio non secat conicam sectionem in pun-  
 ctis pluribus quam quatuor. Nam, si fieri potest, transeant duæ  
 conicæ sectiones per quinque puncta  $A, B, C, P, O$ ; easque  
 secet recta  $BD$  in punctis  $D, d$ , & ipsam  $PQ$  secet recta  $Cd$   
 in  $q$ . Ergo  $PR$  est ad  $PT$  ut  $Pq$  ad  $PT$ ; (n) unde  $PR$  &  
 $Pq$  sibi invicem æquantur, contra hypothesin. L E M.

(m) \* Nam si  $PR$  &  $PT$  ponantur  
 in ratione datâ, erit quoque ob datas  $PQ,$   
 $PS$ , rectangulum  $PQ \times PR$ , ad rectan-  
 gulum  $PS \times PT$ , in ratione datâ; sed per  
 demonstrata in 1. casu  $PQ \times PR : PS \times$   
 $PT = DE \times DF : DH \times DG$ ; ergo  $DE \times$   
 $DF$  ad  $DH \times DG$  in ratione datâ.

(n) \* Cum enim duæ sectiones coni-  
 cæ se mutuo intersecent in punctis  $O$  &  $B$ ,

(per hyp.) duci poterit recta  $BD$ , quæ  
 duos sectionum arcus in  $B$  &  $O$  conve-  
 nientes secet in punctis duobus, eritque  
 per coroll. 1. Lem. XX.  $PR : PT =$   
 $Pr : Pt = Pq : PT$ , adeoque  $PR : PT$   
 $= Pq : PT$ , unde  $PR$  &  $Pq$  sibi invi-  
 cem æquantur, ac proinde  $Cd$ , coincidit  
 cum  $CD$ , & punctum  $d$ , cum puncto  $D$ ,  
 (contra hyp.).

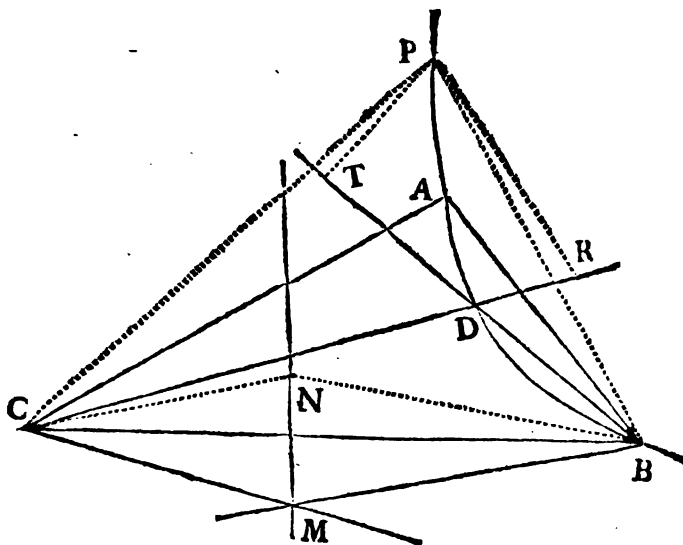
DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.

LIBER  
PRIMUS.

# LEMMA XXI.

*Si rectæ duæ mobiles & infinitæ BM, CM per data puncta B; C cen polos ductæ, concursu suo M describant tertiam positione datam rectam MN; & aliæ duæ infinitæ rectæ BD, CD, cum prioribus duabus ad puncta illa data B, C datos angulos MBD, MCD efficientes ducantur: dico quod hæ duæ BD, CD concursu suo D describent sectionem conicam per puncta B, C transeuntem. Et vice versâ, si rectæ BD, CD concursu suo D describant sectionem conicam per data puncta B, C, A transeuntem, & sit angulus DBM semper æqualis angulo dato ABC, angulusque DCM semper æqualis angulo dato ACB: punctum M contingeret rectam positione datam.*

Nam in rectâ MN detur punctum N, & ubi punctum mobile M incidit in immotum N; incidat punctum mobile D in im-



motum P. Junge CN, BN, CP, BP, & a puncto P age rectas PT, PR occurrentes ipsis BD, CD in T & R, & facientes an-

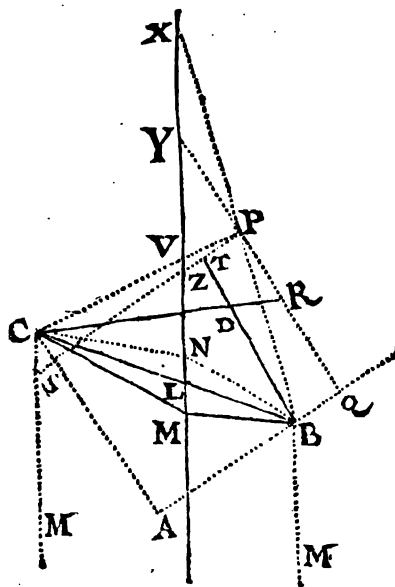
angulum  $BPT$  æqualem angulo dato  $BNM$ , & angulum  $CPR$  æqualem angulo dato  $CNM$ . Cum ergo (ex hypothesi) æquales sint anguli  $MBD$ ,  $NBP$ , ut & anguli  $MCD$ ,  $NCP$ ; aufer communes  $NBD$  &  $NCD$ , & restabunt æquales  $NBM$  &  $PBT$ ,  $NCN$  &  $PCR$ : ideoque triangu-  
la  $NBM$ ,  $PBT$  similia sunt, ut & triangu-  
la  $NCM$ ,  $PCR$ . Quare  $PT$  est ad  $NM$  ut  $PB$  ad  $NB$ , &  $PR$  ad  $NM$  ut  $PC$  ad  $NC$ . Sunt autem puncta  $B$ ,  $C$ ,  $N$ ,  $P$  immobilia. Ergo  $PT$  &  $PR$  datam habent rationem ad  $NM$ , proindeque datam rationem inter se; atque ideo (per lem. xx. (°)) punctum  $D$ , perpetuus rectarum mobilium  $BT$  &  $CR$  concursus, contingit sectionem conicam, per puncta  $B$ ,  $C$ ,  $P$  transeuntem.  $Q. E. D.$

(o) *Atque ideo per Lemma X X. &c.*  
ut pateat Lemma X X. ad hanc demon-  
strationem applicari, hæc sunt supplenda  
constructioni Newtoniana.

Concurrent lineæ BM, CM in puncto lineæ NM infinitè distant, hoc est, sint illi lineæ NM Parallelae, & ducantur lineæ BA, CA facientes cum illis lineis BM, CM angulos MBA, MCA datis MBC, MCD æquales. Dico lineas BA, CA fore parallelas lineis PT, PR secundum constructionem *Newtonianam* descriptis: Productis enim BP & PT (si necesse sit) donec secent rectam datam MN in X & Z, erit angulus EPZ exterior respectu Trianguli PZX, ideoque æqualis angulis X & PZX, & angulus BNM erit exterior respectu Trianguli BNX ideoque æqualis angulis X & XBN, anguli vero BPZ & BNM æquales sunt per constructionem *Newton.* ergo anguli X & PZX æquales sunt angulis X & XBN, unde angulus PZX, quem facit linea PT cum recta NM est æqualis angulo XBN sive angulo dato MBD quem facit linea BA cum linea BM ipsi NM parallela, ergo per naturam Parallelarum, est linea PT parallela lineæ BA.

Eodem planè modo demonstrabitur lineam CA esse Parallelam lineæ PR. Quibus positis, sit sectio Conica per puncta B, C, P & A transiens, lineæ BD, CD juxta conditiones in Lemmate præscriptas ductæ, concursu suo D percurrent eam sectionem Conicam: Productis enim lineis PT PR, donec secent lineas CA, BA, in S & Q fiet *Parallelogrammum ASPQ*,

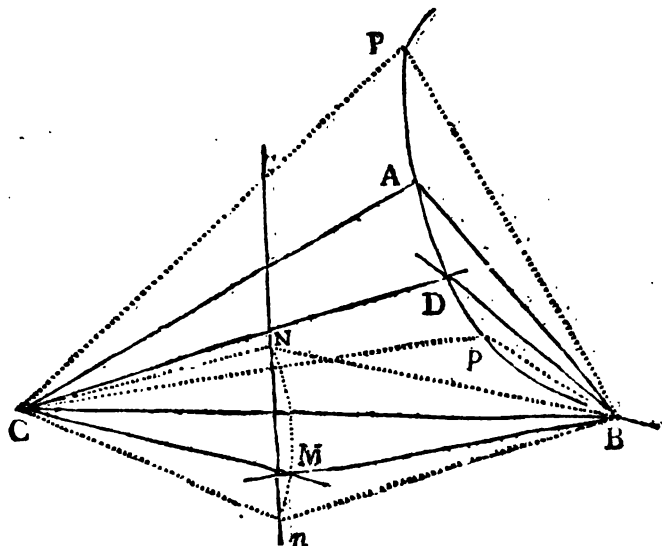
*Tem. I.*



quod in Angulis suis oppositis  $A$  &  $P$  tangit sectionem conicam & lateribus anguli  $A$  productis occurrit eidem sectioni in  $B$  &  $C$ , & lineæ  $B D$ ,  $C D$  à punctis occursum  $B$  &  $C$  ducta (secundum conditiones Lemmatis hujusce XXI.) abscindunt à Parabelogrammi lateribus  $P S$ ,  $P Q$  partes  $P I$ ,  $P R$  quæ sunt ad invicem in datâ ratione (per demonstrationem Newtonianam hujusce) ergo (per 2. caum Lem. XX.) punctum  $D$  tangit sectionem Conicam per puncta quatuor  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $P$  transcurrentem.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

Et contra, si punctum mobile  $D$  contingat sectionem conicam transeuntem per data puncta  $B, C, A$ , & sit angulus  $DBM$  semper æqualis angulo dato  $ABC$ , & angulus  $DCM$  semper æqualis angulo dato  $ACB$ , & ubi punctum  $D$  incidit successivè in duo quævis sectionis puncta immobilia  $p, P$ , punctum mobile  $M$  incidat successivè in puncta duo immobilia  $n, N$ : per



eadem  $n, N$ , agatur recta  $nN$ , & hæc erit locus perpetuus puncti illius mobilis  $M$ . Nam, si fieri potest, versetur punctum  $M$  in lineâ aliquâ curvâ. Tanget ergo punctum  $D$  sectionem conicam per puncta quinque  $B, C, A, p, P$  transeuntem, ubi punctum  $M$  perpetuò tangit lineam curvam. Sed & ex jam demonstratis tanget etiam punctum  $D$  sectionem conicam per eadem quinque puncta  $B, C, A, p, P$ , transeuntem, ( $P$ ) ubi punctum

( $p$ ) \* Ubi punctum  $M$ , perpetuò tangit lineam rectam  $nN$  &c. cum enim angulorum datorum  $ABC, ACB$ , latera duo coincidunt cum rectâ  $CB$ , punctum  $A$ , aliorum laterum  $BA, CA$ , intersectio, locatur in sectione conicâ per polos  $C, B$ ,

transeunte; dum verò latera duo  $Bn$ , &  $Cn, BN$ , &  $CN$ , sese intersectant in  $n, N$ , aliorum laterum  $Bp$ , &  $Cp, BP$ , &  $CP$  intersectiones,  $p, P$ , sunt in eadem sectione conicâ ex demonstratis.

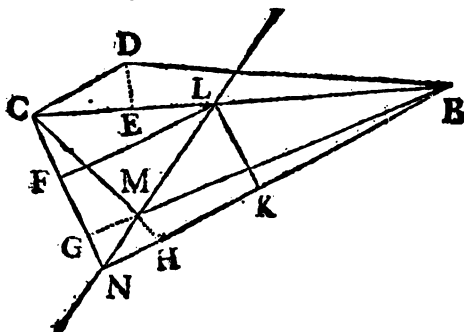
tum  $M$  perpetuò tangit lineam rectam. Ergo duæ sectiones conicæ transibunt per eadem quinque puncta, contra *corol.* 3. *lemmat.* xx. Igitur punctum  $M$  versari in lineâ curvâ absurdum est. *Q. E. D.* (9)

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

(9) 310. In hac organica sectionum conicarum descriptione, angulorum circâ polos mobilium crura utrinque producantur, ut cum duo crura v. gr.  $CP$ ,  $BP$  supra lineam  $CB$  divergunt, infra eandem producta convergant.

Si recta  $NM$ , per polorum alterutrum  $C$ , vel  $B$ , transeat, aut si anguli  $BCD$ ,  $CBD$ , simul evanescant, punctum  $D$  describet lineam rectam. Nam in 1<sup>o</sup> casu angulorum datorum unus immobilis manet, dum alter circâ polum suum rotatur & crurum suorum cum immobilis anguli cruribus intersectione lineam rectam describit; Si enim recta  $NM$  cum anguli dati  $DCM$  crure altero  $CM$  coincidat, immobili manente angulo  $DCM$ , alterius  $DBM$  crura rectas  $MC$ ,  $CD$  perpetuò interfecabunt; deindè si crure  $BM$ , coincidente cum  $CB$ , ut rectam  $CM$  positione datam perpetuò secet in  $C$ , immobilis maneat angulus  $DBM$ , alterius  $DCM$  circâ polum  $C$  rotati crus  $CD$  rectam  $BD$  perpetuò interfecabit.

In 2<sup>o</sup> casu anguli  $BCN$ ,  $CBN$  circâ polos  $C$ ,  $B$  mobiles, crurum duorum  $CN$ ,  $BN$  concursu, rectam  $NML$  positione datam & aliorum crurum  $CB$ ,  $BC$  seu  $CD$ ,  $BD$  concursu  $D$  lineam quamlibet percurrant, sintque  $N$  punctum fixum  $M$  &  $D$  puncta mobilia; ductis ex puncto  $L$  dato ad latera data  $CN$ ,  $BN$  perpendicularibus  $LF$ ,  $LK$  ex puncto mobili  $M$  ad easdem perpendicularibus  $MG$ ,  $MH$  & ex puncto  $D$  ad rectam  $CB$ , perpendiculari  $DE$ ; sit  $CE = x$ ,  $DE = y$ ,  $CB = a$ , ac proindè  $EB = a - x$ ,  $MN = z$ ,  $LN = b$ ,  $LF = c$ ,  $FN = d$ ,  $CN = e$ ,  $LK = f$ ,  $NK = h$ ,  $NB = g$ ; & ob triangu-  
la  $NMG$ ,  $NFL$  similia,  
 $NL(b) : LF(c) = MN(z) : GM = \frac{cz}{b}$ ,  
&  $LN(b) : FN(d) = MN(z) : GN = \frac{dz}{b}$ , adeòque  $CG = CN - GN$



$$= \frac{be - dx}{b}; \text{ porro ob angulos æquales } DCE, \\ MCG, \& DEC, MGC, \text{ triangu-} \\ MCG \text{ similia sunt; quare } CG \left( \frac{be - dx}{b} \right) \\ GM \left( \frac{cz}{b} \right) = CE(x) : DE(y). \text{ Undè}$$

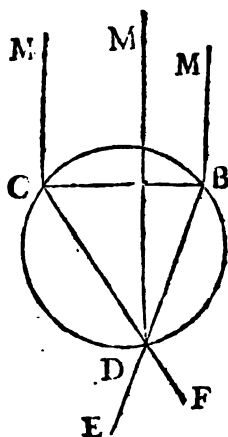
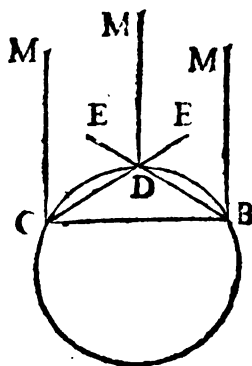
$$cx = bey - dzy, \& x = \frac{bey}{cx + dy}; \text{ ob} \\ \text{triangu-} \\ LK(f) = NM(z) : MH = \frac{fz}{b}, \& NL \\ (b) : NK(h) = MN(z) : NH = \frac{hz}{b}. \text{ undè}$$

$$BH = \frac{gb - hx}{b}; \text{ ob similia triangu-} \\ BHM, BH \left( \frac{gb - hx}{b} \right) : MH \left( \frac{fz}{b} \right) = BE \\ (a - x) : DE(y) \text{ quare } fax - fzx = \\ gby - hzy, \& x = \frac{gby}{fa + hy - fx} =$$

$$\frac{bey}{cx + dy}, \text{ adeòque } gcx + gdy = fae + \\ hey - fex. \text{ Cùm igitur æquatio sit unius} \\ \text{dimensionis, locus punctorum } D, \text{ est li-} \\ \text{nea recta.}$$

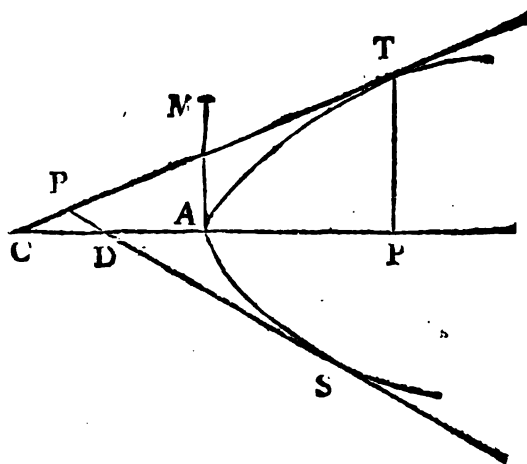


DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

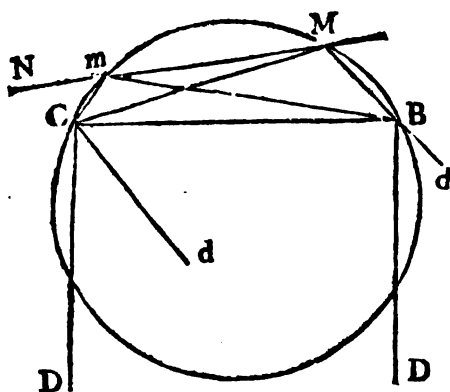


311. Si *angulorum mobilium* *MCD*, *MBD* crura *CM*, *BM* sibi invicem parallela maneant, seu, si recta *NM* ad distantiam infinitam abeat, crura alia *CD*, *BD* concursu suo *D* circulum describent, & contrā. Concurrent enim *CM*, *DM*, *BM* ad distantiam infinitam, & angulus *MCD* æqualis erit angulo *MDF*, ac *MBD* æqualis *MDE*; quoniam igitur dati sunt anguli *MCD*, *MBD* dabuntur quoque anguli *MDF*, *MDE* ac etiam angulus *EDF* & ei æqualis *CDB*. quare cum curva concursu *D* descripta, necessariò transeat per puncta data *C*, & *B*, patet punctum *D* seu verticem anguli dati *CDB* chordæ *CB* insistentis esse in circuli peripheriâ. Et contrā, si concursus *D*, tangat circulum per puncta *C*,

& B transeuntem, dabuntur tres anguli CDB, MCD, MBD atque adeò in quadrilatero MCD BM, cujus duo latera CM, BM concurrunt in M, dabitur angulus CMB, quod fieri nequit, nisi recta NM ad distantiam infinitam abeat, hoc est, nisi parallela fiant crura CM, BM.



312. Lemma... Si duæ rectæ parabola tangant, & puncta contactuum in infinitum abeat, binæ tangentēs se mutuō interfecant ad angulum infinitesimū & evadunt parallelæ axi parabolæ. Sit enim parabolæ axis CP, vertex A, CT tangens in T & axem secans in C, TP ad axem ordinata, AM latus rectum axis, erit  $CP = 2AP$ , &  $AP:PT = PT:AM$ , adeoque  $2AP(CP):PT = 2PT:AM$ . Si punctum contactus T, in infinitum abeat, erit  $2PT$ , infinita respectu AM, & proinde CP, infinita respectu PT, hoc est, sinus totus CP infinitus evadit respectu tangentis PT anguli TCP, quare angulus ille infinitesimus est, & tangens axi CP parallela, altera tangens BS, axem secet in D, & tangentem CT in B, & punctum contactus S in infinitum abeat, erit angulus SDP infinitesimus & angulus TBD duobus internis atque infinitisimis BCD, BDC æqualis, erit quodque infinitesimus.



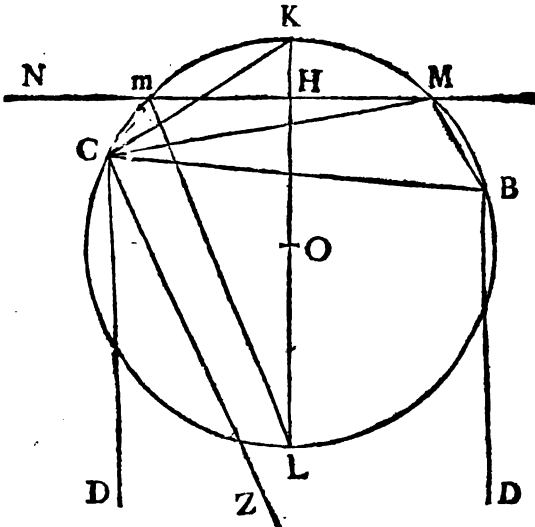
313. Super datâ rectâ CB, describatur segmentum circuli BMmC, quod capiat angulum BMC, datorum MCD, MBD supplementum ad quatuor rectos & compleatur circulus. Si recta data NM, quam in descriptione sectionis conicæ percurrit crurum BMC concursus M hunc circulum secet, describetur hyperbola; si recta NM circulum contingat, describetur parabola; si recta NM circulo nullibi occurrat, describetur ellipsis.

Caf. 1. Recta NM circulum secet in punctis m, M, & crura Cd, Bd, & CD, ED, sibi invicem parallela erunt sive concurrent ad distantiam infinitam; nam cum in quadrilatero DCMB dCm Bd angulus M vel m fit complementum angulorum C & B ad quatuor Rectos, angulus ad D vel d, evanescit, ideoque lineæ CD, BD erunt parallelæ. Cum verò in omni Sectione Conicâ inveniri possit Tangens parallela chordæ cuivis datæ (per Lemma IV. de Conicis pag. 129.) ductæ intelligantur Tangentes Sectionis chordis CD Cd Parallelæ, illæ Tangentes facient inter se angulum æqualem angulo Dcd quem faciunt inter se illæ chordæ, & puncta contactuum erunt ad distantiam infinitam, nulla verò est sectio conica præter hyperbolam cujus ad infinitam distantiam tangentes angulum finitum communi intersectioni faciunt; in Ellipsi enim nulla est tangens ad distantiam infinitam, & in parabola hujusmodi tangentes angulum infinitesimum duntaxat, facerent (per Lemma superius 313). Si igitur recta MN circulum secet, describetur hyperbola cujus asymptoti

seu tangentes ad distantiam infinitam rectis CD, Cd parallelæ sunt & se mutuo intersectant in centro trajectoriæ. Q. e. 1.

Caf. 2. Quoniam angulus mCM, in 1.º casu æqualis est asymptotorum angulo DCd, ob æquales DCM, dCm; si manentibus circulo & distantia polorum CB, puncta intersectionum m, M ad se mutuo accedant, decrescet angulus DCd, & tandem punctis m, M coeuntibus, hoc est, secante MN in tangentem mutatâ angulus ille evanescet, dum rectæ CD, BD manent parallelæ, & ad distantiam infinitam cum trajectoriâ conveniunt. In hoc igitur casu duæ rectæ, ipsis CD, Cd parallelæ & trajectoriam ad distantiam infinitam tangentes, se mutuo intersectant in angulo infinitesimo, seu in unicam lineam coeunt axi trajectoriæ parallelam, & proinde hyperbola casus primi mutatur in parabolam (312). Q. e. 2.

Caf. 3. Si recta NM nullibi circulo occurrat, rectæ BD, CD quarum concursu D sectio conica describitur nunquam possunt fieri parallelæ, & proinde curva non abit in infinitum, sed in se redit, estque adeò Ellipsis. Q. e. 3.



314. Coroll. 1. Ex his axes trajectoriæ facile determinantur. Sit O centrum circuli Cm MB ut supra (313) descripti, ab hoc centro in rectam NM cadat perpendicularis OH circulo occurrens in puncto H.



DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

LIBER  
PRIMUS.

[illegible]

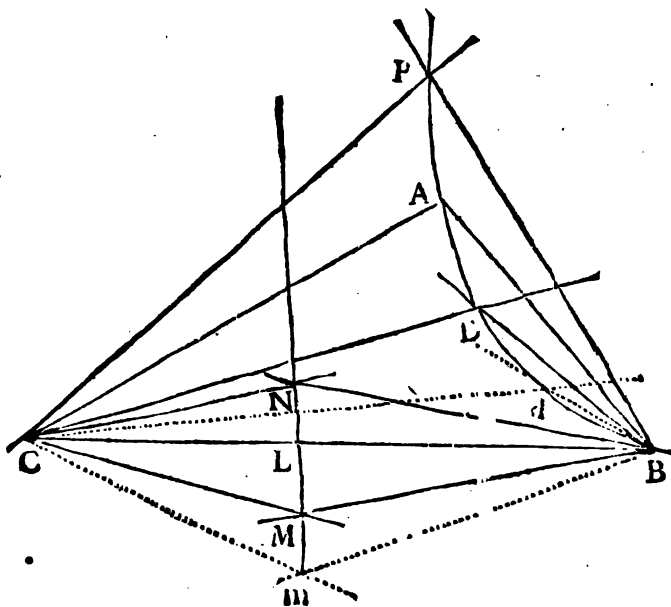
*Idem*:

evānescunt; quo casu punctum D describet sectionem conicam per polum C transeuntem, & eādem methodo curvas varias tertiū, quarti, superiorum generum describere licet. Sed hæc ad præsens institutum non pertinent; qui plura desideraverit, legat Geometriam Organicam Celeberrimi Matheseos Professoris *Colinī Mac-Laurin*, ex quo eximio opere non pauca excerptimus.

*Scholium.* Si crura  $C M$ ,  $B M$  concursu suo  $M$  percurrant sectionem conicam per polum alterum  $C$  transeuntem, crura duo reliqua  $C D$ ,  $B D$  concursu suo  $D$  describunt curvam secundi generis per polum alterum  $B$  transeuntem, præterquam ubi anguli  $B E D$ ,  $C B D$  sunt

*Idem aliter.*

- E punctis datis junge tria quævis  $A, B, C$ ; & circum duorum  $B, C$ , ceu polos, rotando angulos magnitudine datos
- $ABC, ACB$ , applicentur crura  $BA, CA$  primò ad punctum  $D$ , deinde ad punctum  $P$ , & notentur puncta  $M, N$  in qui-



bus altera crura  $BL, CL$  casu utroque se decussant. Agatur recta infinita  $MN$ , & rotentur anguli illi mobiles circum polos suos  $B, C$ , eâ lege ut crurum  $BL, CL$  vel  $BM, CM$  intersectio, quæ jam sit  $m$ , incidat semper in rectam illam infinitam  $MN$ ; & crurum  $BA, CA$ , vel  $BD, CD$ , intersectio, quæ jam sit  $d$ , trajectoriam quæsitam  $PADdB$  delineabit. Nam punctum  $d$  (per lem. XXI.) continget sectionem conicam per puncta  $B, C$  transeuntem; & ubi punctum  $m$  accedit ad puncta  $L, M, N$ , punctum  $d$  (per constructionem) accedet ad puncta  $ADP$ . Describetur itaque sectio conica transiens per puncta quinque  $A, B, C, P, D$ . Q. E. F.

Corol.



*Idem aliter.*

(u) \* Demonstratio clara fit, si in punctum A, & recta ABQ sectionis conicæ tangens evadat.



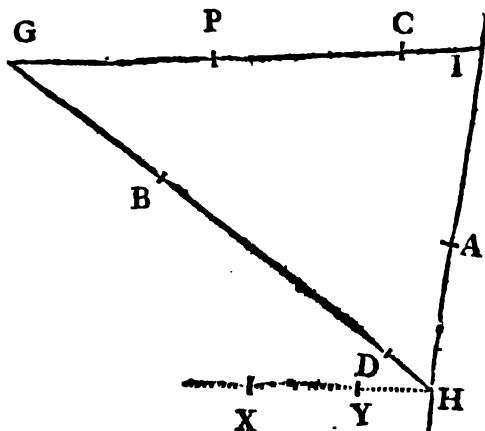


# 212 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

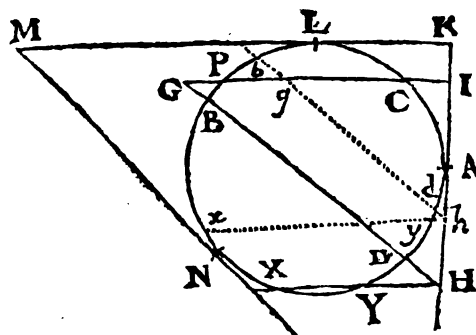
DE MO- ad rectangulum sub mediâ proportionali inter  $DG$  &  $GB$   
 TU COR- & mediâ proportionali in-  
 FORUM. ter  $PI$  &  $IC$ ; & erit  $A$   
 LIBER punctum contactus. Nam  
 PRIMUS. si rectæ  $PI$  parallela  $HX$

trajectoriam secet in punctis quibuscvis  $X$  &  $Y$ : erit (ex conicis) ( $y$ ) punctum  $A$  ita locandum, ut fuerit  $HA$  quad. ad  $AI$  quad. in ratione compositâ ex ratione rectanguli  $XHY$  ad rectangulum  $BHD$ , seu rectanguli  $CGP$  ad rectangulum  $DGB$ , & ex ratione rectanguli  $BHD$  ad rectangulum  $PIC$ . Invento autem contactus puncto  $A$ , describetur trajectoria ut in casu primo. *Q. E. F.*

Capi autem potest punctum  $A$  vel inter puncta  $H$  &  $I$ , vel extra; & perinde trajectoria dupliciter describi.



( $y$ ) 319. *Erit ex Conicis*; scilicet si  $A$  sit punctum contactus erit (*per Cor. 3. Lem. III. de Conic. p. 119.*)  $HA^2$  ad  $AI^2$  ut rectangulum  $XHY$  ad rectangulum  $PIC$ , sed ratio rectanguli  $XHY$  ad rect.  $PIC$ , potest considerari ut composita ex ratione rect.  $XHY$  ad rect.  $BHD$ , & ex ratione ejusdem rect.  $BHD$  ad rect.  $PIC$ . Est verò rect.  $XHY$  ad rect.  $BHD$  ut rect.  $CGP$  ad rect.  $DGB$  (*per Lem. III. de Conic. p. 117.*) sunt enim  $HX$ ,  $GC$ , dum Parallelæ in Sectione Conicâ ductæ & per tertiam lineam  $GH$  sectæ, ideoque factum partium  $HX$ ,  $HY$  Parallelæ  $HX$ , quæ sumuntur ab intersectione  $H$  ad curvæ puncta  $X$  &  $Y$ , est ad  $BH \times HD$  factum partium lineæ secantis  $GH$  sumptarum ab intersectione  $H$  ad puncta curvæ  $B$  &  $D$ , sicut factum partium alterius Parallelæ  $CG \times GP$ , ad  $DG \times GB$  factum partium correspondentium lineæ secantis. Est ergo ratio  $HA^2$



ad  $AI^2$  æqualis rationi compositæ ex ratione rect.  $CGP$  ad rect.  $DGB$  &, rect.  $BHD$  ad rect.  $PIC$  ideoque est  $HA^2$  ad  $AI^2$  ut  $\sqrt{CGP} \times \sqrt{BHD}$  ad  $\sqrt{DGB} \times \sqrt{PIC}$ , sed Radices quadratæ illorum Rectangulorum sunt ipsæ mediæ

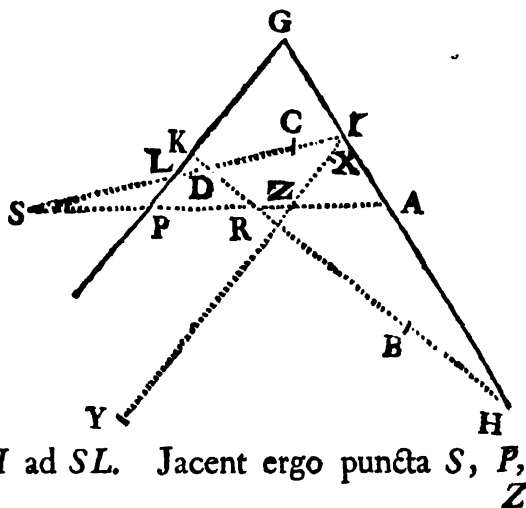


DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

## PROPOSITIO XXIV. PROBLEMA XVI.

*Trajectoriam describere, quæ transibit per data tria puncta, & rectas duas positione datas continget.*

Dentur tangentes  $HI$ ,  $KL$  & puncta  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Per punctorum duo quævis  $B$ ,  $D$  age rectam infinitam  $BD$  tangentibus occurrentem in punctis  $HK$ . Deinde etiam per alia duo quævis  $C$ ,  $D$  age infinitam  $CD$  tangentibus occurrentem in punctis  $I$ ,  $L$ . Actas ita seca in  $R$  &  $S$ , ut sit  $HR$  ad  $KR$  ut est media proportionalis inter  $BH$  &  $HD$  ad mediam proportionalem inter  $BK$  &  $KD$ ; &  $IS$  ad  $LS$  ut est media proportionalis inter  $CI$  &  $ID$  ad mediam proportionalem inter  $CL$  &  $LD$ . Seca autem pro lubitu vel inter puncta  $K$  &  $H$ ,  $I$  &  $L$ , vel extra eadem; dein age  $RS$  secantem tangentes in  $A$  &  $P$ , & erunt  $A$  &  $P$  puncta contactuum. Nam si  $A$  &  $P$  supponantur esse puncta contactuum alicubi in tangentibus sita; & per punctorum  $H$ ,  $I$ ,  $K$ ,  $L$  quodvis  $I$ , in tangente alterutra  $HI$  situm, agatur recta  $IY$  tangenti alteri  $KL$  parallela, quæ occurrat curvæ in  $X$  &  $Y$ , & in ea sumatur  $IZ$  media proportionalis inter  $IX$  &  $IY$ , erit, ex conicis, (2) rectangulum  $XIY$  seu  $IZ$  quad. ad  $LP$  quad. ut rectangulum  $CID$  ad rectangulum  $CLD$ , id est (per constructionem) ut  $KI$  quad. ad  $SL$  quad. atque ideo  $IZ$  ad  $LP$  ut  $SI$  ad  $SL$ . Jacent ergo puncta  $S$ ,  $P$ ,  $Z$



(2) Erit ex Conicis rect.  $XIY$  ad  $LP^2$  ut rect.  $CID$  ad rect.  $CLD$ . Scilicet cum  $P$  supponatur punctum contactus alicubi in Tangente  $KL$  situm & cum linea  $IY$  sit

(per const.) parallela Tangenti  $KL$  & utraque secetur per lineam  $IL$ , illa in  $I$  hæc in  $L$  erit (per Lem. III de Conic. p. 117.) rect. partium Parallelæ  $IY$  ab inter-



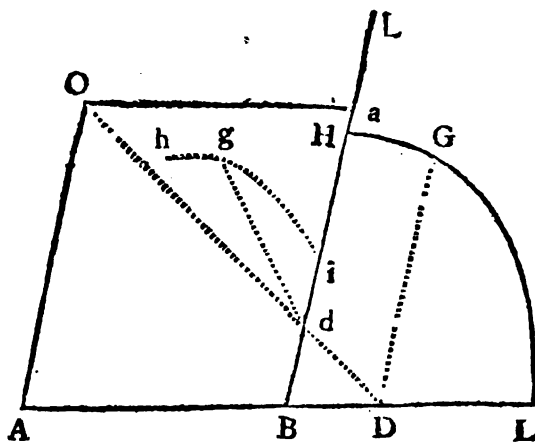
# 216 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo- In hac propositione, & casu secundo propositionis superio-  
TU COR- ris constructiones eadem sunt, siue recta  $XY$  trajectoriam secet in  
PORUM.  $X$  &  $Y$ , siue non secet; eæque non pendent ab hac sectione.  
LIBER Sed demonstratis constructionibus ubi recta illa trajectoriam se-  
PRIMUS. cat, innotescunt constructiones, ubi non secat; iisque ultra de-  
monstrandis brevitatis gratiâ non immoror.

## LEMMA XXII.

*Figuras in alias ejusdem generis figuras mutare.*

Transmutanda sit figura quævis  $HGI$ . Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ  $AO$ ,  $BL$  tertiam quamvis positione datam  $AB$  secantes in  $A$  &  $B$ , & a figuræ puncto quovis  $G$ , ad rectam  $AB$  ducatur quævis  $GD$ , ipsi  $OA$  parallela. Deinde à puncto aliquo  $O$ , in linea  $OA$  dato, ad punctum  $D$  ducatur recta  $OD$ , ipsi  $BL$  occurrens in  $d$ , & à puncto occurfus erigatur recta  $dg$  datum quemvis angulum cum rectâ  $BL$  continens, atque eam habens rationem ad  $Od$  quam habet  $DG$  ad  $OD$ ; & erit  $g$  punctum in figurâ novâ  $hgi$  puncto  $G$  respondens. Eâdem ratione puncta singula figuræ primæ dabunt puncta totidem figuræ novæ. Concipe igitur punctum  $G$  motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum  $g$  motu itidem continuo percurreret puncta omnia figuræ novæ & eandem describet. Distinctionis gratiâ nominemus  $DG$  ordinatam primam,  $dg$  ordinatam novam;  $AD$  abscissam primam,



mam,  $ad$  abscissam novam;  $O$  solum,  $OD$  radium abscindentem,  $OA$  radium ordinatum primum, &  $Oa$  (quo parallelogrammum  $OABa$  completur) radium ordinatum novum.

DE MOTU CORPORUM.  
LIBER PRIMUS.

Dico jam quod, si punctum  $G$  tangit rectam lineam positione datam, punctum  $g$  tanget etiam lineam rectam positione datam. Si punctum  $G$  tangit conicam sectionem; punctum  $g$  tanget etiam conicam sectionem. Conicis sectionibus hic circulum annumero. Porro si punctum  $G$  tangit lineam ( $c$ ) tertii ordinis analytici, punctum  $g$  tanget lineam tertii itidem ordinis; & sic de curvis lineis superiorum ordinum. Lineæ duæ erunt ejusdem semper ordinis analytici quas puncta  $G, g$  tangunt. ( $d$ ) Etenim ut est  $ad$  ad  $OA$  ita sunt  $Od$  ad  $OD$ ,  $dg$  ad  $DG$ , &  $AB$  ad  $AD$ ; ideoque  $AD$  æqualis est  $\frac{OA+AB}{ad}$ , &  $DG$  æqualis est

$\frac{OA \times dg}{ad}$ . Jam si punctum  $G$  tangit rectam lineam, atque ideo in æquatione quâvis, quâ relatio inter abscissam  $AD$  & ordinatam  $DG$  habetur, indeterminatæ illæ  $AD$  &  $DG$  ad unicam tantum dimensionem ascendunt, scribendo in hac æquatione  $OA$

(c) 324. NEWTONUS lineas geometricas in ordines analyticos distinguit secundum numerum dimensionum æquationis quâ relatio inter ordinatas & abscissas definitur, vel (quod proinde est) secundum numerum punctorum in quibus à lineâ rectâ secari possunt; tot enim dimensiones habet æquatio ad curvam quot possunt esse illius curvæ & rectæ intersectiones; nam si intersectiones illæ seorsim querantur, quoniam eadem est omnium lex & conditio, idem erit calculus in casu unoquoque & propterea eadem semper conclusio, quæ igitur debet omnes intersectiones simul complecti & indifferenter exhibere, adeoque tot esse debent æquationis radices ac proinde dimensiones quot sunt intersectiones. Hinc linea primis ordinis erit recta sola, lineæ secundi sive quadratici ordinis erunt sectiones conicæ & circulus, & lineæ tertii sive cubici ordinis parabola cubica, parabola Neiliana, Cyclois veterum

& alia. Cum autem recta inter curvas non sit numeranda, curva primi generis eadem est cum lineâ secundi ordinis, & curva secundi generis eadem cum lineâ tertii ordinis, & linea ordinis infinitesimi ea est quam recta in punctis infinitis secare potest, qualis est spiralis, cyclois, quadratrix & linea omnis quæ per radii vel rotæ revolutiones infinitas generatur.

(d) 325. Etenim ob similia triangula,  $a d O, A O D$ ,  $ad : OA = Od : OD$ , (& per constr.)  $Od : OD = dg : DG$ , & ob rectas  $AO, Bd$  parallelas  $Od : OD = AB : AD$ , unde  $ad : OA = dg : DG = AB : AD$ , atque adeo  $AD = \frac{OA \times AB}{ad}$ , &  $DG = \frac{OA \times dg}{ad}$ . Sit  $OA = a$ ,  $AB = b$ ,  $AD = x$ ,  $DG = y$ ,  $ad = z$ ,  $dg = u$ , & erit  $x = \frac{ba}{z}$ ,  $y = \frac{au}{z}$ .



# PRINCIPIA MATHEMATICA. 219

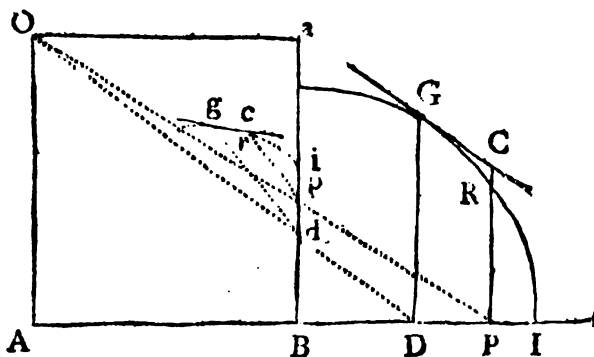
(h) Dico præterea, quod si recta aliqua tangat lineam curvam in figurâ primâ; hæc recta eodem modo cum curvâ in figurâ novâ translata tanget lineam illam curvam in figurâ novâ; & contra. Nam si curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt in figurâ primâ, puncta eadem translata accedent ad invicem & coibunt in figurâ novâ; atque ideo rectæ, quibus hæc puncta junguntur, simul evadent curvarum tangentes in figurâ utrâque.

Componi possent harum assertionum demonstrationes more magis geometrico. Sed brevitati consulo.

Igitur

riebus factorum  $x, y, xy^2, xy^3$  &c. &  $x^2y, x^3y$  &c. & reductione ad communem denominatorem  $z^4$  factâ, habebuntur series  $\frac{z^2u, z^2u^2, z^2u^3}{z^4}$ , &  $\frac{zu, u^2}{z^4}$ . Porro æquatio omnis ex hujusmodi dignitatibus & factis composita est, & abijci potest communis omnium terminorum denominator qui hic est  $z^4$ , ergo hujusmodi

substitutionibus non mutatur gradus æquationis. Eadem quoque demonstrari possunt ex eo quod si linea recta curvam  $HGI$ , secet in quolibet punctis, eadem recta translata curvam  $hgi$  in totidem punctis interficere debeat, quoniam singulæ nec plures intersectiones in novam figuram transferuntur.



(h) 326. Recta  $GC$  curvam  $GI$  tangat in  $G$ , transferatur punctum  $G$ , in  $g$ , & ductâ  $PC$  parallelâ  $DG$ , quæ curvæ occurrat in  $R$  & tangenti in  $C$ ; transferatur punctum  $C$ , in  $c$ , faciendo ut  $OP:PC = Op:pc$  parallelam  $dg$ , & recta  $gc$ , quæ puncta  $g$ , &  $c$ , jungit, novam curvam  $gi$ , tanget in  $g$ ; nam accedat  $PC$ , ad  $DG$ , & accedat correspondens  $pc$ , ad  $dg$ , & pun-

ctis  $C, R, G$ , coeuntibus, coibunt in figurâ novâ puncta  $c, r, g$ , adeoque lineæ  $gc$ , positione coincidit cum chordâ evanescente  $gr$ , hoc est cum tangente in  $g$ . Idem aliâ ratione potest demonstrari; quoniam enim  $PC:PR = pC:pr$ , & proinde  $PC:PR = pC:pr$ , ergo punctum  $c$ ; non est in curvâ  $gi$ , nisi cum  $C$  reperitur in curvâ  $GI$ , hoc est, nisi  $C$  &  $G$  coeant.

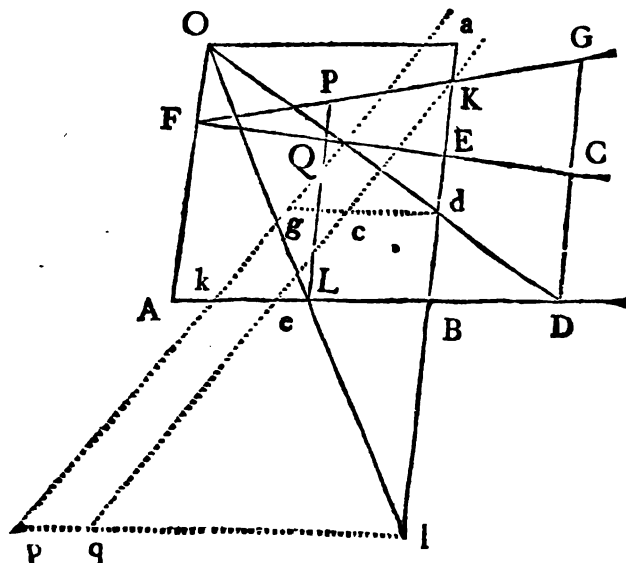
E c 2



# 220 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

Igitur si figura rectilinea in aliam transmutanda est, sufficit rectarum, à quibus conflatur, intersectiones transferre, & per easdem in figurâ novâ lineas rectas ducere. Sin curvilineam transmutare oportet, transferenda sunt puncta, tangentes, & lineæ rectæ, quarum ope curva linea definitur. Inservit autem hoc lemma solutioni difficiliorum problematum, transmutando figuras propositas in simpliciores. Nam (i) rectæ quævis convergentes.



(i) 327. Radius ordinatus primus OA, per concursum F rectarum FG, FC transeat, ductâ GD radio OA parallelâ, transferantur puncta G, C, in g, c, & puncta K, E, in k, e, rectæ kg, ec, erunt parallelæ; nam ducta intelligatur OL radio OA infinitè proxima, & rectas AD, a B secans in L & l, & actâ LQP radio OA, parallelâ, puncta P, Q in p, q, translata concipiantur, & erit OL:Ol=PL:pl=QL:ql. coeuntibus verò punctis P, Q, F erit Ol infinita & QL=FA=PL, adeoque pl=ql. Punctum igitur concursus F ad distantiam infinitam transfertur, & lineæ gp, cq, ad illud convergentes sunt parallelæ.

328. Coroll. 1. Puncta K & E, seu intersectiones linearum FG, FC cum a B, transferuntur capiendo in novâ ordinatâ Bk=BK, Be=BE; est enim (per constr.) BK:BO=Bk:BO. & BE:BO=Be:BO.

329. Coroll. 2. Si punctum F, cum puncto A, coincidat, erunt gk, ce, rectis OA, a B parallelæ; nam ob parallelas BK, DG, AO & (per constr.) AB:AD=Od:OD=dg:DG, & coeuntibus punctis F, A, AB:AD=BK(Bk):DG, adeoque dg:DG=Bk:DG, ac proinde Bk=dg, undè gk lineæ B, d est parallelâ.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 221

gentes transmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato De Mo-  
 primo lineam quamvis rectam, quæ per concursum convergen-  
 tium transit; idque quia concursus ille hoc pacto abit in infini-  
 tum; lineæ autem parallelae sunt, quæ nusquam concurrunt. TU COR-  
FORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
 Postquam autem problema solvitur in figurâ novâ; si per in-  
 versas operationes transmutetur hæc figura in figuram pri-  
 mam, (k) habebitur solutio quæsitâ.

(1) Utile est etiam hoc lemma in solutione solidorum pro-  
 blematum. Nam quoties duæ sectiones conicæ obvenierint,  
 quarum intersectione problema solvi potest, transmutare licet ea-  
 rum alterutram, si hyperbola sit vel parabola, in ellipsin: dein-  
 de ellipsis facile mutatur in circulum. Recta item & sectio co-  
 nica, in constructione planorum problematum, vertuntur in rec-  
 tam & circulum.

330. Coroll. 3. Si recta linea FG  
 coincidat cum AD, transformabitur in re-  
 ctam coincidentem cum AB, nam punc-  
 tum D, transfertur in d, punctum L, in l.

(k) 331. (Vide fig. Newt. pag. 218.)  
 Figura hgi data in figuram primam HGI,  
 transformatur, faciendo ut Od, ad dg,  
 ita OD, ad DG; parallelam radio OA.

(1) 332. Sit curva CGI, parabola cu-  
 jus diameter CD, diametri vertex C, ordi-  
 nata GD radio ordinato primo AO  
 parallela, latus rectum l, sitque OA=a;  
 AB=b, AC=c, AD=x, CD=x-c  
 GD=y, nova abscissa, ad=z, nova or-  
 dinata gd=u, erit ex naturâ parabolæ  
 $lx-lc=yy$ , & substitutis pro x, & y,

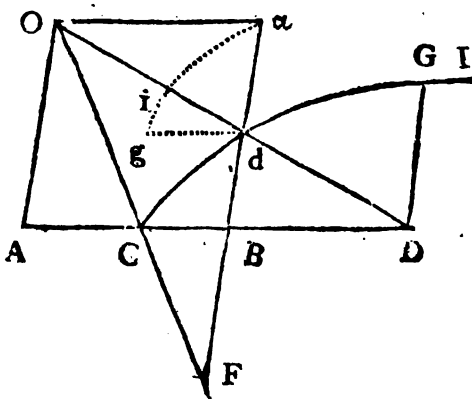
eorum valoribus  $\frac{ba}{x}, \frac{bu}{z}$  (325) produ-

cetur æquatio nova ad novam curvam gi;  
 $\frac{lba}{z} - lc = \frac{b^2 u^2}{z^2}$ , hoc est, reductione

factâ  $b^2 u^2 - lba z + lc z^2 = 0$ , æquatio  
 ad Ellipsim cujus diameter a F =  $\frac{ba}{c}$ , la-

tus rectum =  $\frac{la}{b}$ , nam  $\frac{ba z}{c} - z^2 : u^2$

$$= \frac{ba}{c} : \frac{la}{b}.$$



Si nova ordinata gd, ponatur ad abscissam ad, perpendicularis, & præterea fiat  $lc=b^2$ , sive  $l \times AC = AB^2$  superior ad Ellipsim æquatio in hanc mutabitur  
 $u^2 - \frac{ba z}{c} + z z = 0$ , quæ est ad circu-

lum cujus diameter  $\frac{ba}{c}$ , ex tribus autem

rectis a, b, c, binæ a & b, vel a & c; possunt ad arbitrium assumi, & tertia de-

E e 3      termi-

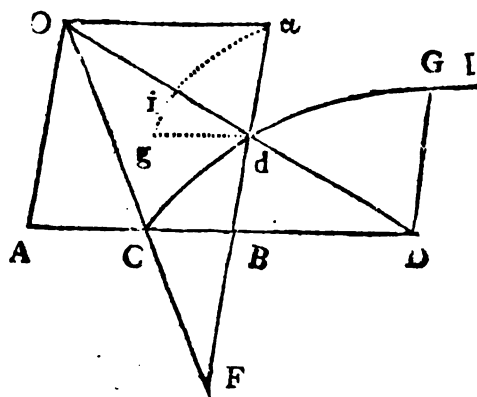
DE MO-terminatur per æquationem  $lc = bb$ , in  
TU COR- circulo.

PORUM. Si vertex C cum puncto A coeat, hoc est,  
LIBER si  $AC = c = 0$  æquatio ad novam curvam  
PRIMUS. erit  $b^2 u^2 - lbaz = 0$ , hoc est, curva gi,  
erit parabola; & eodem modo invenitur  
Ellipsim & Hyperbolam atque adeò Sectio-  
nes omnes conicas in parabolam transfor-  
mari, dum diametri AD radio Oa paralle-  
læ vertex C coincidit cum puncto A radii  
ordinati primi OA ordinatis ad diame-  
trum paralleli.

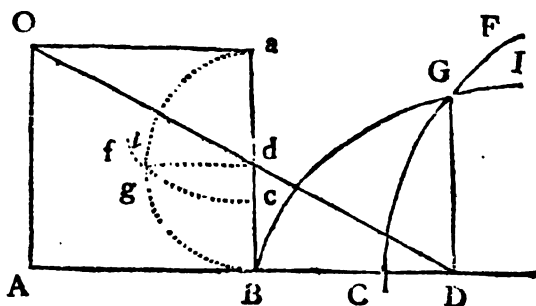
Si parabolæ vertex C cum puncto B  
coeat, erit  $b = c$ , adeoque Ellipsis vel cir-  
culi gi diameter  $\frac{ba}{c}$ , erit  $a = OA = aB$ .

Si curva CGI, fuerit hyperbola cujus sit  
diameter  $d$ , latus rectum  $l$ , manentibus  
cæteris denominationibus ut supra, erit ex  
naturâ hyperbolæ  $dy^2 = lx^2 - 2clx$   
 $+ dlx - ldc + lcc$ , & substitutis loco  $x$   
&  $y$ , eorum valoribus & reductione ad com-  
munem denominatorem factâ producet.  
 $db^2 u^2 + 2clbaz + ldcz^2 - lb^2 a^2 = 0$   
 $- dlbaz - lc^2 z^2$

nova æquatio ad parabolam vel hyperbo-  
lam aut Ellipsim prout assumitur linea  $c$ ,



æqualis vel major vel minor diametro  $d$ ;  
Ellipsis autem in circulum abit ponendo  
 $ldc - lc^2 = db^2$ , & angulum  $gda$ , rec-  
tum, ut ex locorum geometricorum doc-  
trinâ liquet. Eadem ratione transformatur  
Ellipsis.



333. His præmissis faciliè intelligitur hu-  
jus lemmatis usus in solidorum aut etiam  
planorum problematum solutione. Nam  
sit querenda interfectio G conicæ sec-  
tionis BGI cum alterâ sectione conicâ  
aut rectâ lineâ CGF positione datâ.  
transformetur (332.) sectio conica BGI  
in circulum Bga, & linea CGF, in  
lineam cgf, tum ex puncto intersec-  
tionis g, circuli Bga, & lineæ cgf, de-  
mittatur ad aB nova ordinata siue per-

pendicularis gd, & per punctum d, aga-  
tur radius abscondens OdD secans rec-  
tam AB in D, denique per D agatur  
GD radio ordinato primo OA paral-  
lela quæ sit ad OD ut gd, ad Od, & erit  
G punctum interfectionis quæsitum. Cum  
enim in puncto interfectionis duarum li-  
nearum BGI, CGF, communis sit or-  
dinata GD manifestum est intersec-  
tionem illam transformari in intersec-  
tionem linearum Bga, cgf, & vice versâ (331).

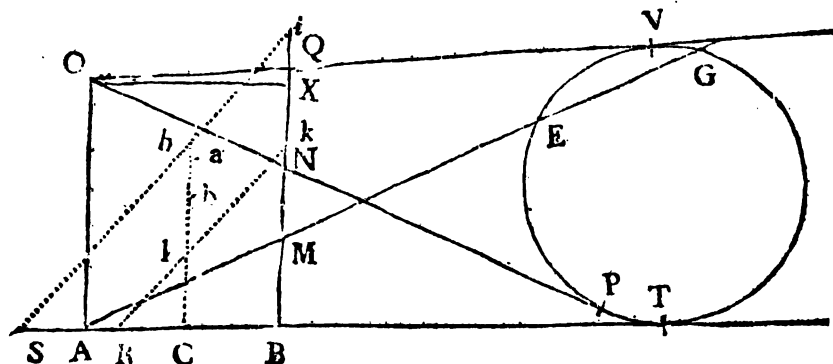
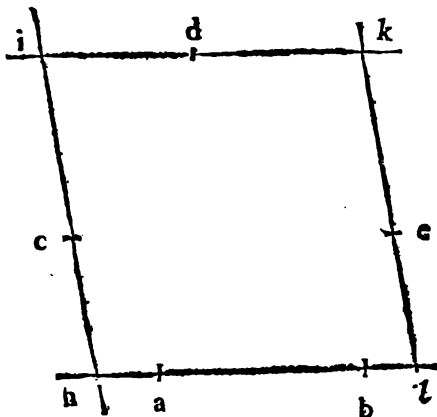
PRO-

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA XVII.

*Trajectoriam describere, quæ per data duo puncta transibit, & rectas tres continget positione datas.*

DE MOTU CORP-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

Per concursum tangentium quarumvis duarum cum se invicem, & concursum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data transibit, age rectam infinitam; eaque adhibita pro radio ordinato primo, transmutetur figura, per lemma superius, in figuram novam. <sup>(m)</sup> In hac figurâ tangentes illæ duæ evadent sibi invicem parallelæ, & tan-



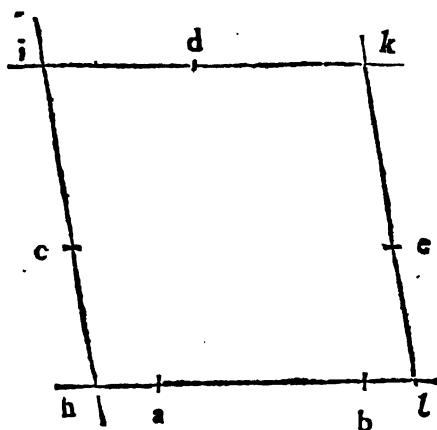
(m) 334. Sit O, concursus tangentium duarum OV, OP, A concursus tangentis tertiæ AT, cum recta AG, quæ per puncta duo E, G, data transibit, age rectam infinitam OA, eaque adhibita pro radio ordinato primo, & OX parallelâ AT, pro radio ordinato novo usurpatâ, transmutetur figura in figuram novam, quod facilitimum est, si ordinatæ novæ parallelæ sumantur radio ordinato novo OX, nam recta AT transformatur in rectam BX i (330), recta AG in rectam Ch ipsi BX paralle-

lam (329) & punctum illius C, reperitur, capiendò BC = BM (328). rectæ OV, OP transmutantur in rectas parallelas Rk, Si (327); earumque puncta R, S, habentur capiendò BR = BN, BS = BQ, & alia puncta duo (per Lem. XXII.) facillè reperiuntur. Puncta E, & G, transferantur in b, & a, & productis lineis parallelis Bi & Ch, Rk, & Si, donec sibi mutuo occurrant, compleatur parallelogrammum l h i k, & nova sectio conica transibit per puncta b, & a, & tangetur à rectis tribus hi, lk, ki (326).

\* Inter

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

gens tertia fiet parallela rectæ  
per puncta duo data transeunti.  
Sunt  $hi$ ,  $kl$  tangentes illæ duæ  
parallelæ,  $ik$  tangens tertia,  
&  $hl$  recta huic parallela tran-  
siens per puncta illa  $a$ ,  $b$ , per  
quæ conica sectio in hac figurâ  
novâ transire debet, & paral-  
lelogrammum  $hikl$  cõplens.



(<sup>n</sup>) Secentur rectæ  $hi$ ,  $ik$ ,  
 $kl$  in  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , ita ut sit  $hc$  ad  
latus quadratum rectanguli  $ahb$ ,  
 $ic$  ad  $id$ , &  $ke$  ad  $kd$  ut est summa rectarum  $hi$  &  $kl$  ad  
summam trium linearum, quarum prima est recta  $ik$ , alteræ  
duæ sunt latera quadrata rectangulorum  $ahb$  &  $alb$ : & erunt  
 $c$ ,  $d$ ,  $e$  puncta contactuum. Etenim, ex conicis, sunt  $hc$  qua-  
dratum ad rectangulum  $ahb$ , &  $ic$  quadratum ad  $id$  quadra-  
tum, &  $ke$  quadratum ad  $kd$  quadratum, &  $el$  quadratum ad  
rectangulum  $alb$  in eâdem ratione; & propterea  $hc$  ad latus  
quadratum ipsius  $ahb$ ,  $ic$  ad  $id$ ,  $ke$  ad  $kd$  &  $el$  ad latus  
quadratum ipsius  $alb$  sunt in subduplicatâ illâ ratione, & com-  
positè, in datâ ratione omnium antecedentium  $hi$  &  $kl$  ad om-  
nes consequentes, quæ sunt latus quadratum rectanguli  $ahb$ , &  
recta  $ik$ , & latus quadratum rectanguli  $alb$ . Habentur igitur

\* (<sup>v</sup>) Inter  $ah$ ,  $hb$ , quærat media  
proportionalis quæ dicatur  $M$ , & inter  
 $al$ ,  $lb$ , media proportionalis  $N$ ; & deinde  
ita secentur rectæ  $hi$ ,  $ik$ ,  $kl$ , in  $c$ ,  $d$ ,  
 $e$ , ut sit  $hc$ , ad  $M$ ,  $ic$ , ad  $id$ , &  $ke$   
ad  $kd$ , ut est  $hi + kl$ , ad  $ik + M + N$ ,  
& erunt  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , puncta contactuum; Ete-  
nim si fuerint  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , puncta contac-  
tuum, ob  $hl$  parallelam tangenti  $ik$ ,  
quæ cum alterâ tangente  $hi$ , concurrat  
in  $i$ , erit (per prop. 16. & 18. lib. 3.  
Conic. Apoll. sive per Corol. 2. Lem. III.  
de Conic. p. 118.)  $hc^2 : ah \times hb = ic^2 :$   
 $id^2$ , & ob  $hi$ , concurrentem sectioni in so-  
lo puncto  $c$ , & parallelam tangenti  $lk$ ,  
quæ alteri tangenti  $ik$  occurrit in  $k$ ,  
erit (per eandem prop. Apoll.)  $ic \times ic$   
( $ic^2$ ) :  $id^2 = ke^2 : kd^2$ , & ob  $hl$ , paral-

lelam tangenti  $ik$ , quæ cum alterâ tan-  
gente  $lk$ , convenit in  $k$ , erit (per eaf-  
dem prop. Apoll.)  $ke^2 : kd^2 = el^2 : al \times$   
 $lb$ , adeoque  $hc^2 : ah \times hb = ic^2 : id^2$   
 $= ke^2 : kd^2 = el^2 : al \times lb$ , & propterea  
 $hc : \sqrt{ah \times hb} (M) = ic : id = ke : kd$   
 $= el : \sqrt{al \times lb} (N)$ , & compositè sum-  
ma omnium antecedentium est ad sum-  
mam omnium consequentium ut quilibet  
antecedens ad suum consequentem, hoc est  
 $hc : M = ic : id = ke : kd = el : N = hc$   
 $+ ic + ke + el (hi + kl) : M + id$   
 $+ kd + N (ik + M + N)$ . Habentur  
igitur (per constr.) ex datâ illâ ratione  
puncta contactuum  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , in figurâ no-  
vâ per inversas operationes (331.)

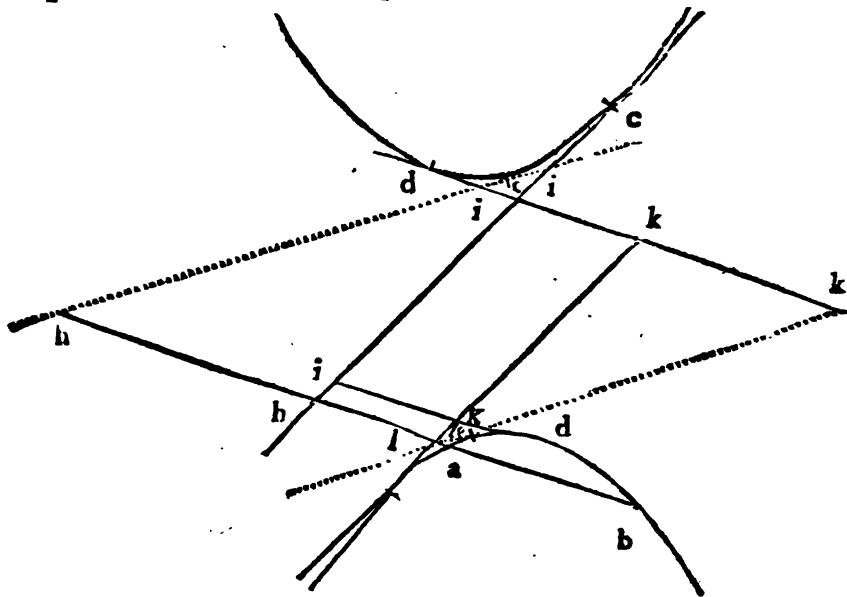
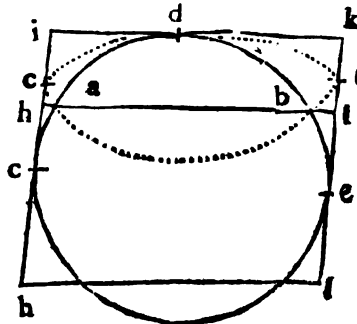
ex datâ illâ ratione puncta contactuum  $c, d, e$ , in figura nova. Per inversas operationes lemmatis novissimi transferantur hæc puncta in figuram primam, & ibi (*per prob. xiv.*) describetur trajectory.

*Q. E. F.* (°) Cæterum perinde ut puncta  $a, b$  jacent vel inter puncta  $h, l$ , vel extra, debent puncta  $c, d, e$  vel inter puncta  $h, i, k, l$  capi, vel extra. Si punctorum  $a, b$  alterutrum cadit inter puncta  $h, l$  & alterum extra, problema impossibile est.

DE MOTU  
CORPORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

PRO-

(°) 335. Quoniam duæ parallelæ  $hi$ ,  $lk$ , neque parabolam, neque hyperbolam simplicem contingere possunt, tangent hyperbolas oppositas vel ellipsim, circulo inter elliptes annumerato. Porro Ellipsis tota inter tangentes parallelas, & hyperbolæ oppositæ totæ extra easdem sunt; quare in Ellipsi puncta  $a, b$ , inter puncta  $h, l$ , sita sunt; in hyperbolis extra; atque adeò si punctorum  $a, b$ , alterum cadit inter puncta  $h, l$  & alterum extra, problema impossibile est. In Ellipsi punctum contactus  $d$ , inter puncta  $i, k$ , necessariò cadit; alia duo  $c, e$ , inter punc-



ta  $h$  &  $i$ ,  $l$  &  $k$ , vel aliquandò extra esse possunt; in hyperbolis oppositis contactuum puncta duo ut  $c, d$ , extra puncta  $h, i, k, l$ , necessariò posita sunt, tertium ut  $e$ , vel extra vel intra esse po-

Tom. I.

test, undè præscribit NEWTONUS ut puncta  $c, d, e$ , vel inter puncta  $h, i, k, l$ ; vel extra capiantur, perinde ut puncta  $a, b$ , jacent vel inter puncta  $h, l$ , vel extra.

E f

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

## PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA XVIII.

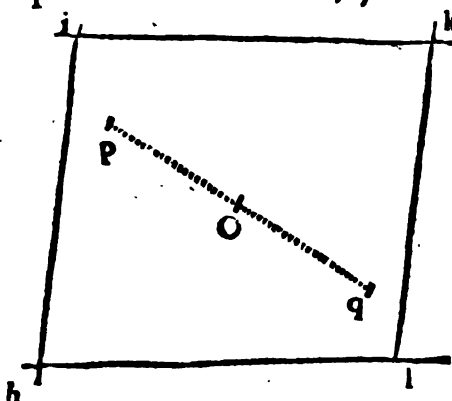
*Trajectoriam describere, quæ transibit per punctum datum, & rectas quatuor positione datas continget.*

Ab interfectione communi duarum quarumlibet tangentium ad interfectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita, & eâdem pro radio ordinato primo adhibitâ, transmutetur figura ( *per lem. xxii.* ) in figuram novam, & tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum primum concurrebant, jam evadent parallelæ. Sunt illæ

$hi$  &  $kl$ ,  $ik$  &  $hl$  continentes parallelogrammum  $hikl$ .

Sitque  $p$  punctum in hac novâ figurâ puncto in figurâ primâ dato respondens. (  $P$  )

Per figuræ centrum  $O$  agatur  $pq$ , & existente  $Oq$  æquali  $Op$ , erit  $q$  punctum alterum per quod sectio conica in hac figurâ novâ transire debet. Per



lemmatis xxii. operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ trajectoria describenda est. Per eadem vero describi potest trajectoria illa per problema xvii. *Q. E. F.*

L E M.

(  $p$  ) 336. Parallelogrammi  $h, i, k, l$ ; sectioni conicæ circumscripti diagonales in sectionis centro  $O$ , se mutuo interfecant. Nam rectæ quæ opposita contactuum punc-

ta jungunt; sunt sectionis diametri centro  $O$  bisectæ ( *per prop. 27. & 31. Lib. 2. Conic. Apoll.* utque sequitur ex Lem. IV. de Conic. p. 122 ),

LEMMA XXIII.

DE MOTU  
CORPORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Si rectæ duæ positione datæ  $AC$ ,  $BD$  ad data puncta  $A$ ,  $B$ , terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, & recta  $CD$ , quâ puncta indeterminata  $C$ ,  $D$  junguntur, secetur in ratione datâ in  $K$ : dico quod punctum  $K$  locabitur in rectâ positione datâ.*

(<sup>1</sup>) Concurrant enim rectæ  $AC$ ,  $BD$  in  $E$ , & in  $BE$  capiatur  $BG$  ad  $AE$  ut est  $BD$  ad  $AC$ , sitque  $FD$  semper æqualis datæ  $EG$ ; & erit ex constructione  $EC$  ad  $GD$ , hoc est, ad  $EF$  ut  $AC$  ad  $BD$ , ideoque in ratione datâ, & propterea dabitur specie triangulum  $EFC$ . Secetur  $CF$  in  $L$  ut sit  $CL$  ad  $CF$  in ratione  $CK$  ad  $CD$ ; & ob datam illam rationem, dabitur etiam specie triangulum  $EFL$ ; proindeque punctum  $L$  locabitur in rectâ  $EL$  positione datâ. Junge  $LK$ , & similia erunt triangula  $CLK$ ,  $CFD$ ; & ob datam  $FD$  & datam rationem  $LK$  ad  $FD$  dabitur  $LK$ . Huic æqualis capiatur  $EH$ , & erit semper  $ELKH$  parallelogrammum. Locatur igitur punctum  $K$  in parallelogrammi illius latere positione dato  $HK$ . *Q. E. D.*

*Corol.* Ob datam specie figuram  $EFLC$ , rectæ tres  $EF$ ,  $EL$  &  $EC$ , id est  $GD$ ,  $HK$  &  $EC$ , datas habent rationes ad invicem.

LEM-

(<sup>1</sup>) Vid. not. 67. pag. 39.



DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

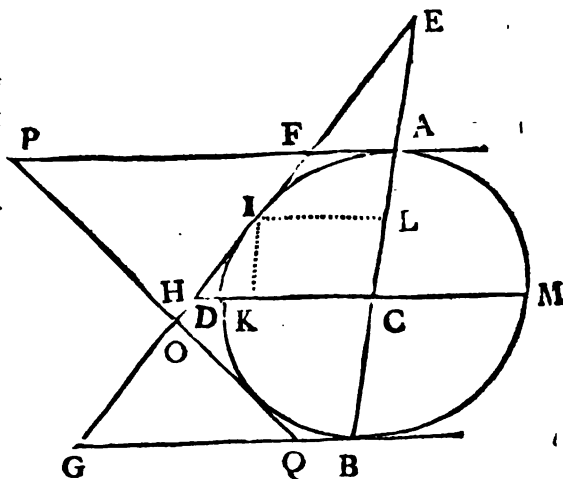
## L E M M A XXIV.

*Si rectæ tres tangant quamcunque conicsectionem, quarum duæ parallelæ sint ac dentur positione; dico quod sectionis semidiameter hisce duabus parallelæ, sit media proportionalis inter harum segmenta, punctis contactuum & tangenti tertiæ interjecta.*

Sunto  $AF$ ,  $GB$  parallelæ duæ conicsectionem  $ADB$  tangentes in  $A$  &  $B$ ;  $EF$  recta tertia conicsectionem tangens in  $I$ , & occurrens prioribus tangentibus in  $F$  &  $G$ ; sitque  $CD$  semidiameter figuræ tangentibus parallelæ: dico quod  $AF$ ,  $CD$ ,  $BG$  sunt continuè proportionales.

Nam si diametri conjugatæ  $AB$ ,  $DM$  tangenti  $FG$  occurrant in  $E$  &  $H$  seque mutuo secant in  $C$ , & compleatur parallelogrammum  $IKCL$ ; (1) erit ex naturâ sectionum conicarum ut

$EC$  ad  $CA$  ita  $CA$  ad  $CL$ , & ita divisim  $EC - CA$  ad  $CA - CL$ , seu  $EA$  ad  $AL$ , & compositè  $EA$  ad  $EA + AL$  seu  $EL$  ut  $EC$  ad  $EC + CA$  seu  $EB$ ; ideoque, ob similitudinem triangulorum  $EAF$ ,  $ELI$ ,  $ECH$ ,  $EBG$ ,  $AF$  ad  $LI$  ut  $CH$  ad  $BG$ . Est itidem, ex naturâ sectionum conicarum,  $LI$  seu  $CK$  ad  $CD$  ut  $CD$  ad  $CH$ ; (2) atque ideo ex æquo perturbatè  $AF$  ad  $CD$  ut  $CD$  ad  $BG$ . Q. E. D.



Co-

(1) \* Erit ex naturâ sectionum conicarum &c. (per prop. 37. 38. Lib. 1. Conic. Apoll. vide cor. 2. Lem. V. de Conic. p. 121.).

(2) \* Cum sit  $EA:EL=EC:EB$ ; & ob similitudinem triangulorum  $EAF$ ,  $EIL$  sit  $EA:EL=AF:LI$ , seu  $CK$ , & ob similitudinem triangulorum  $ECH$ ,  $EBG$ ,

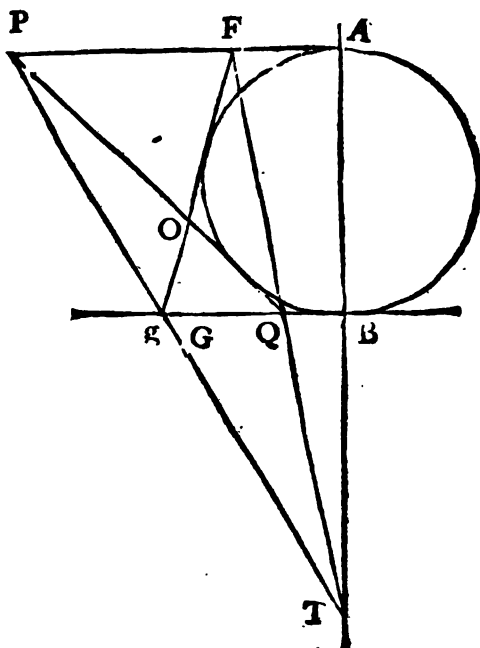
# PRINCIPIA MATHÈMATICĀ. 239

*Corol. 1.* Hinc si tangentes duæ  $FG$ ,  $PQ$  tangentibus paralle- De Mo-  
lis  $AF$ ,  $BG$  occurrant in  $F$  &  $G$ ,  $P$  &  $Q$ , seque mutuo secant TU COR-  
in  $O$ ; erit ex æquo perturbatè  $AF$  ad  $BQ$  ut  $AP$  ad  $BG$ , PORUM.  
(<sup>1</sup>) & divisim ut  $FP$  ad  $GQ$ , atque ideo ut  $FO$  ad  $OG$ . LIBER  
PRIMUS.

*Corol. 2.* (<sup>u</sup>) Unde etiam rectæ duæ  $PG$ ,  $FQ$ , per puncta  
 $P$  &  $G$ ,  $F$  &  $Q$  ductæ, concurrent ad rectam  $ACB$  per cen-  
trum figuræ & puncta contactuum  $A$ ,  $B$  transeuntem.

LEM.

$EBG$  sit  $EC:EB=CH:BG$ , erit  $AF:CK$  & similiter  $BQ:CD=CD:AP$ , seu  
 $=CH:BG$ , & quia (ex conic. loco cita-  $CD:BQ=AP:CD$ , adeoque  $AF \times$   
to)  $CK:CD=CD:CH$ , erit  $AF \times CK:$   $CD:CD \times BQ=CD \times AP:BG \times CD$ ,  
 $CK \times CD=CH \times CD:BG \times CH$ , hoc est  $AF:BQ=AP:BG=AP-AF:$   
hoc est,  $AF:CD=CD:BG$ .  $BG-BQ=FP:GQ=FO:OG$ , ob  
(<sup>1</sup>) \* Est enim  $AF:CD=CD:BG$ , similia triangula  $FOP$ ,  $GOQ$ .



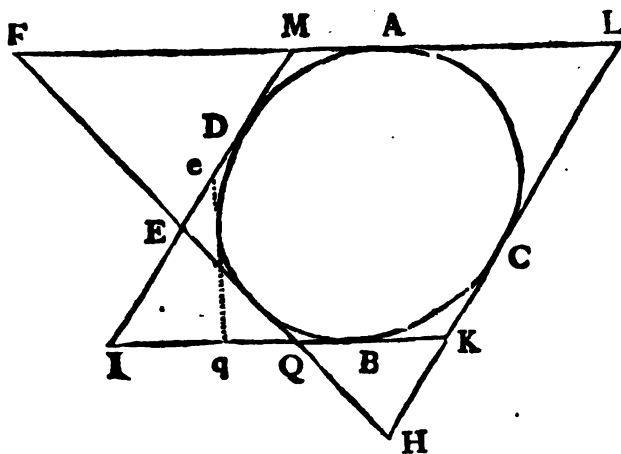
(<sup>u</sup>) \* Agatur enim recta  $FQ$ , ipsi  $AB$   $BT=AP:Bg$ , sed per *coroll. 1.*  $AF:$   
occurrans in  $T$ , & jungatur  $PT$ , rectam  $BQ=AP:BG$ , est igitur  $BG=Bg$  ac  
 $BG$ , secans in  $g$ , erit  $AF:BQ=AT:$  proinde punctum  $g$ , cum  $G$  coincidit,  
F f 3

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

## L E M M A XXV.

*Si parallelogrammi latera quatuor infinite producta tangant sectionem quamcunque conicam, & abscindantur ad tangentem quamvis quintam; sumantur autem laterum quorumvis duorum conterminorum abscissæ terminatæ ad angulos oppositos parallelogrammi: dico quod abscissa alterutra sit ad latus illud à quo est abscissa, ut pars lateris alterius contermini inter punctum contactus & latus tertium est ad abscissarum alteram.*

Tangent paral-  
lelogrammi *MLIK*  
latera quatuor *ML*,  
*IK*, *KL*, *MI* se-  
ctionem conicam  
in *A*, *B*, *C*, *D*,  
& secet tangens  
quinta *FQ* hæc  
latera in *F*, *Q*, *H*  
& *E*; sumantur au-  
tem laterum *MI*,  
*KI* abscissæ *ME*,  
*KQ*, vel laterum



*KL*, *ML*, abscissæ *KH*, *MF*: dico quod fit *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ*; & *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. Nam per corollarium primum lemmatis superioris est *ME* ad *EI* ut *AM* seu *BK* ad *BQ*, & componendo *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ*. *Q. E. D.* Item *KH* ad *HL* ut (\*) *BK* seu *AM* ad *AF*, & dividendo *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. *Q. E. D.*

*Corol. 1.* Hinc si datur parallelogrammum *IKLM*, circa datam sectionem conicam descriptum, dabitur rectangulum *KQ* × *ME*, ut & huic æquale rectangulum *KH* × *MF*. Æquantur enim rectangula illa ob similitudinem triangulorum *KQH*, *MFE*.

Co-

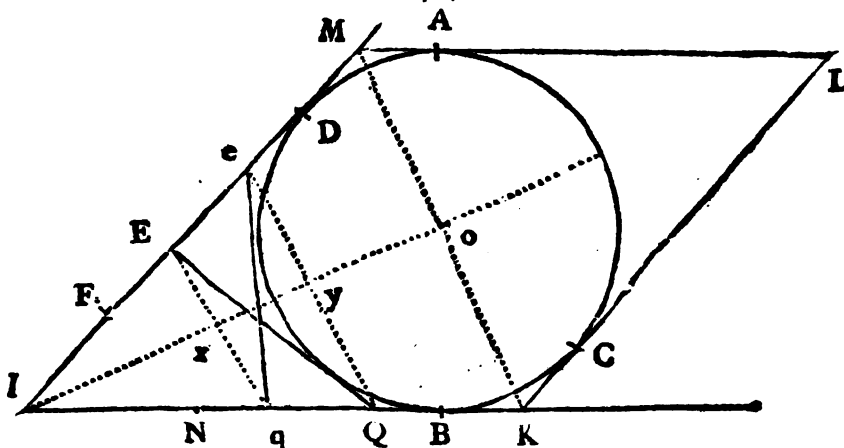
(\*) \* Nam si puncta contactuum *A*, & *B*, recta jungantur, hæc transibit per cen- trum commune sectionis conicæ & parallelogrammi, (336) adeoque erit *AM* = *BK*.

## PRINCIPIA MATHEMATICA. 231

*Corol. 2.* Et si sexta ducatur tangens  $e q$  tangentibus  $KI$ ,  $MI$  DE MO occurs in  $q$  &  $e$ ; (✓) rectangulum  $KQ \times ME$  æquabitur rectangulo  $Kq \times Me$ ; eritque  $KQ$  ad  $Me$  ut  $Kq$  ad  $ME$ , & divisum ut  $Oq$  ad  $Ee$ .

*Corol.* 3. Unde etiam si  $E q, e Q$  jungantur & bisecentur, & recta per puncta bisectionum agatur, transibit hæc per centrum sectionis conicæ. Nam cum sit  $Q q$  ad  $E e$  ut  $K Q$  ad  $M e$ , transibit eadem recta per medium omnium  $E q, e Q, M K$  (<sup>2</sup>) (*per lem. xxiii.*) & medium rectæ  $M K$  est centrum sectionis. (<sup>a</sup>) PRO.

( y ) \* Nam rectangula  $K Q \times M E$ ,  $K q \times M e$ , æquantur rectangulo  $M I \times B K$ .



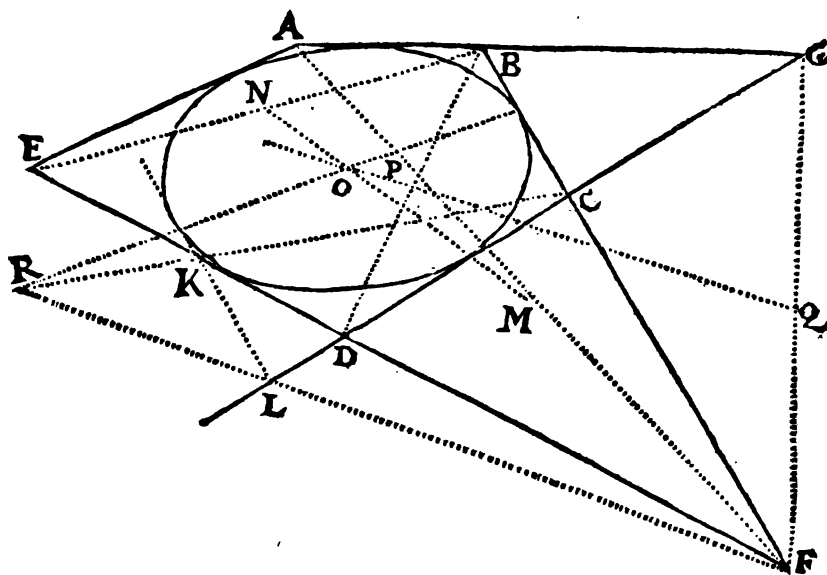
(2) \* In rectis I M, I K, positione datis  
 capiatur q N, ad E F, ut est q Q, ad  
 E e, & puncta N, F, tanquam data seu  
 fixa considerentur, & erit Nq : F E = q Q :  
 E e = QK : e M, & compositè, Nq : F E  
 = N Q : F e = N K : F M; quare si rectæ  
 E q, e Q, M K, quibus puncta indeter-  
 minata E, & q, E, Q, M & K jungun-  
 tur, secutur in ratione data in x, y,  
 o, puncta omnia x, y, o, locantur in unâ  
 eademque rectâ x y, ( per Lem. XXIII. )  
 Si itaque recta x y, lineas E q, e Q, bi-  
 secat, rectam M K bifecabit, adeoque ( 336 ).  
 per centrum sectionis conicæ transibit.

(a) Hinc si lineæ quatuor ut  $ED$ ,  $eQ$ ,  $EQ$ ,  $QB$  sectionem Conicam tangent & sibi mutuo occurrant in punctis  $e$ ,  $E$ ,  $q$ ,  $Q$  junganturque puncta opposita  $e$ ,  $Q$  &  $E$ ,  $q$ , bifariamque dividantur lineæ  $eQ$ ,  $Eq$ , lineæ eas bisequant erit lo-

cus centri figuræ : Idque semper verum  
erit quamcumque figuram faciant lineæ  
ED, eq, EQ, QB five sese decussent  
five Trapezium constituant, Concipiatur  
illas Diametros duci quarum vertex est in  
puncto contactûs harum linearum donec  
occurrant curvæ altero suo vertice, Tan-  
gentes in eo vertice ductæ erunt paralle-  
læ prioribus : Dabuntur ergo Parallelæ  
duabus lineis ED, QB, quæ erunt Tan-  
gentes curvæ, ideoque fiet ut in Lemma-  
tis Hypothesi Parallelogrammum MIKL  
constans quatuor Tangentibus quarum op-  
positæ erunt inter se Parallelæ, & Tangen-  
tes EQ & eq considerari poterunt ut  
quinta & sexta Tangens de quibus agitur  
in hoc Lemmate, ideoque per ejus co-  
rollarium 3. si bisecentur lineæ EQ & eq  
rectis per bissectionum puncta agatur transi-  
tus hæc per centrum Sectionis Conicæ &c.

## PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA XIX.

*Trajectoriam describere, quæ rectas quinque positione datas con-  
tinget.*



Dentur positione tangentes  $ABG$ ,  $BCF$ ,  $GCD$ ,  $FDE$ ,  
 $EA$ . Figuræ quadrilateræ sub quatuor quibufvis contentæ  $ABFE$   
 diagonales  $AF$ ,  $BE$  bifeca in  $M$  &  $N$ , & ( per corol. 3. lem.  
 xxv. ) recta  $MN$  per puncta bifectionum acta transibit per cen-  
 trum trajectoriæ. Rurfus figuræ quadrilateræ  $BGDF$ , sub aliis  
 quibufvis quatuor tangentibus contentæ, diagonales ( ut ita di-  
 cam )  $BD$ ,  $GF$  bifeca in  $P$  &  $Q$  : & recta  $PQ$  per puncta  
 bifectionum acta transibit per centrum trajectoriæ. Dabitur er-  
 go

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 233

go centrum in concursu bifecantium. Sit illud  $O$ . (<sup>b</sup>) Tangenti cuius  $BC$  parallelam age  $KL$ , ad eam distantiam ut centrum  $O$  in medio inter parallelas locetur, & acta  $KL$  tanget trajectoriam describendam. Secet hæc tangentes alias quasvis duas  $GCD$ ,  $FDE$  in  $L$  &  $K$ . Per harum tangentium non parallelarum  $CL$ ,  $FK$  cum parallelis  $CF$ ,  $KL$  concursus  $C$  &  $K$ ,  $F$  &  $L$  age  $CK$ ,  $FL$  concurrentes in  $R$ , & recta  $OR$  ducta & producta secabit tangentes parallelas  $CF$ ,  $KL$  in punctis contactuum. Patet hoc per corol. 2. lem. xxiv. Eâdem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per construct. prob. xiv. trajectoriam describere. *Q. E. F.*

DE MOTU CORP-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

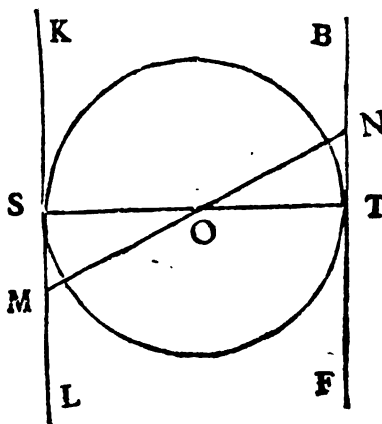
## Scholium.

Problemata, ubi dantur trajectoriarum vel centra vel asymptoti, includuntur in præcedentibus. (<sup>c</sup>) Nam datis punctis & tangentibus unâ cum centro, dantur alia totidem puncta aliæque tangentes à centro ex alterâ parte æqualiter distantes. Asymp-

(b) 337. Datis sectionis conicæ centro  $O$ , & tangente quâvis  $BF$ , altera tangens  $LK$  datæ parallela facile invenitur; Nam per centrum  $O$  ducatur recta quævis infinita  $MON$  tangenti datæ occurrens in  $N$ , & sumptâ  $OM = ON$  per  $M$  ducatur  $MK$  tangenti datæ  $FB$  parallela, erit  $MK$  tangens; si enim per punctum contactus  $T$  & centrum  $O$  agatur sectionis diameter  $TOS$ , erit  $SO = OT$  & tangens in  $S$  tangenti in  $T$  parallela lineam  $NO$  ita secabit in  $M$ , ut fit  $MO = ON$ , ob,  $SO : OT = MO : ON$ .

(c) 338. Hinc datis præter centrum tribus tangentibus non parallelis vel duabus tangentibus convergentibus & puncto, vel tangente & punctis duobus, vel punctis tribus, dantur sex tangentes, vel tangentes quatuor & puncta duo, vel tangens & puncta quatuor, vel puncta sex, quibus datis trajectoria describi potest per prop. (27. 26. 25. 24. 23. 22.). Ex datis centro,

Tom. I.

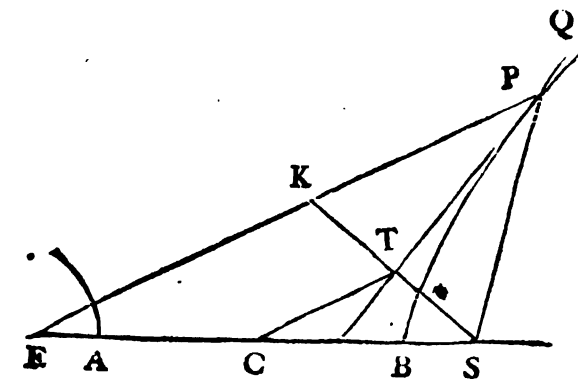


alterutro axe, & duabus tangentibus non parallelis, vel tangente & puncto trajectoriæ Ellipticæ & Hyperbolicæ ex lemmatis sequentibus facile describuntur.

G g

339.

DE MO-ASYMPTOTOS autem pro tangente habenda est, & ejus terminus infinite distans ( si ita loqui fas sit ) pro puncto contactus. Concipe tangentis cujusvis punctum contactus abire in infinitum, & tangens vertetur in Asymptoton, atque constructiones problematum præcedentium vertentur in constructiones ubi Asymptotos datur.



**News.** )  $FK = 2 CB, KT = TS$ , cumque  
fit etiam  $FC = CS$ , erit  $ST : SK = SC :$   
 $SF$ , & ideo quia latera  $SK SF$  secantur  
proportionaliter in  $T$  &  $C$  erit  $CT$  pa-  
rallela  $FK$  five  $FP$ , ideoque erit  $ST :$   
 $SK = CT : FK$  & quia  $ST = \frac{1}{2} SK$   
erit  $CT$  aequalis  $\frac{1}{2} FK$ , seu aequalis  $CB$ .  
Eodem modo probabitur,  $CG$  esse æ-  
qualem  $CB$  & parallelam lineæ  $PS$ .

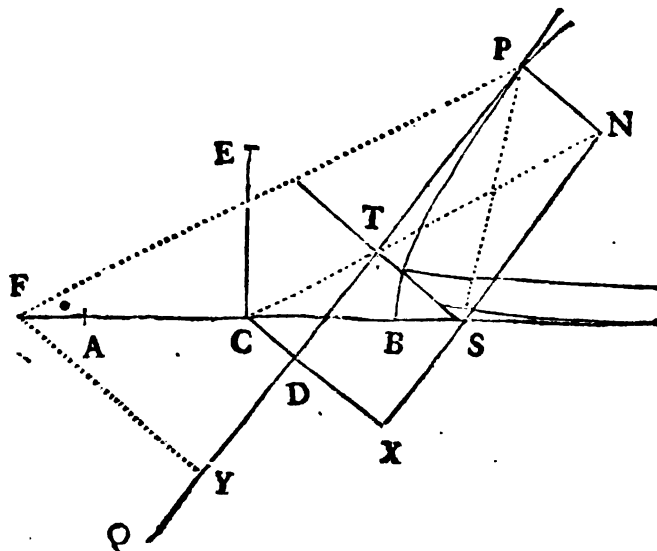
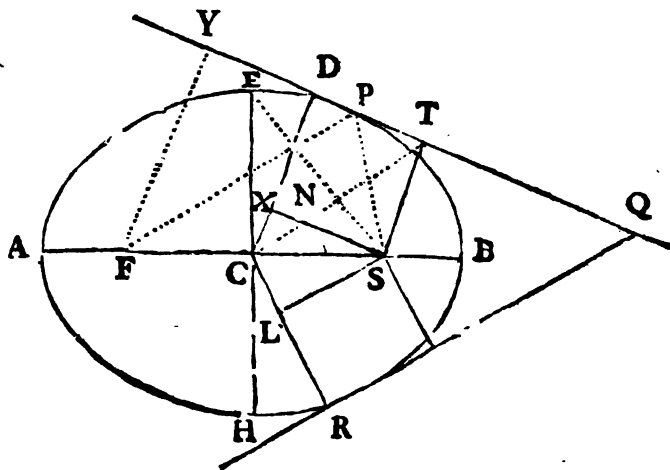




DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

342. Si ex centro  
C sectionis conicæ ad  
tangentem PQ, de-  
mittatur perpendicu-  
laris CD, & ex altero  
umbilico S ad C D  
agatur normalis SX,  
sitque C E semiaxis  
minùs principalis, erit  
in ellipsi  $CX^2 = CD^2$   
 $= CE^2$ , & in hyper-  
bolâ  $CX^2 = CD^2 +$   
 $CE^2$ , & demissa ex  
umbilico in tangentem  
perpendiculari S T,  
junctâque C T, rectam  
S X secante in N, erit in  
utrâque sectione X N  
æqualis D P distan-  
tiæ puncti contactûs P  
à perpendiculari C D;  
Nam in Ellipsi  $CS^2$   
 $= CI^2 (CB^2) - CE^2$ ,  
in Hyperbolâ  $CS^2 =$   
 $CT^2 + CE^2$ , & in  
utrâque sectione  $CS^2$   
 $= CX^2 + SX^2 = CX^2$   
 $+ DT^2$ ; Ergò in El-  
lipsi  $CX^2 + DT^2$   
 $= TT^2 - CE^2 = CD^2$   
 $+ DT^2 - CE^2$ , &  
hinc  $CX^2 = CD^2$   
 $- CE^2$ , & in hyper-  
bolâ  $CX^2 + DT^2$   
 $= CT^2 + CE^2 =$   
 $CD^2 + DT^2 + CE^2$ ,  
adeoque  $CX^2 = CD^2$   
 $+ CE^2$ . Q. e. r.

Ex altero umbilico  
F, in tangentem de-  
mittatur perpendicu-  
laris F Y, & junctis F P,  
S P, similia erunt tri-  
angula F P Y, S P T,  
ob angulos æquales (per natur. Tangentium  
& focorum) F P Y, S P T, & S T P, F Y P  
rectos; & quoniam F P & C T, F Y &  
C D sunt parallelæ, similia quoque erunt  
triangula C T D, F P Y, ideòque duo trian-  
gula C T D, S P T sunt similia; quare  $CD:$   
 $DT = ST (DX):PT$ , & divisum  $CD:$   
 $DT = CD - DX:DT - PT$ , & compo-  
sitè  $CD:DT = CD + DX:DT +$

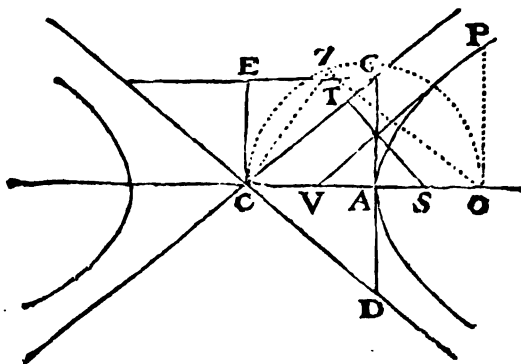


P T. Undè quoniam in Ellipsi  $CD - DX$   
 $= CX$ , &  $DT - PT = DP$ ; in hyper-  
bolâ verò  $CD + DX = CX$ , &  $DT +$   
 $PT = DP$ , erit in utrâque sectione  $CD:$   
 $DT = CX:DP$ . Verùm ob S X tangenti  
D T parallelam,  $CD:DT = CX:XN$ ,  
ergo  $XN = DP$ . Q. e. 2.

343. Hinc datis centro C, semiaxe mi-  
nùs principali C E, tangentibus duabus  
non

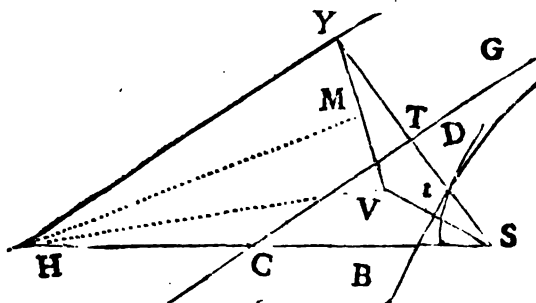


DE MO- lela est & positione data. Hinc facile erit  
TU COR- problematum sectionis IV. constructiones  
PORUM. ad hyperbolam transferre ubi asymptotus  
alterutra cum umbilico data est.



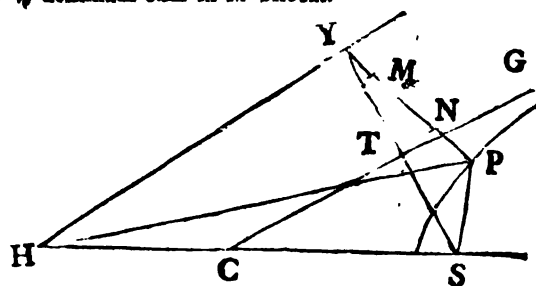
Datis umbilico S; axe principali, & asymptoto CG, invenitur axis positio, demittendo ex umbilico S ad asymptotum perpendicularem ST, & capiendo TC æqualem semiaxi dato, est enim C hyperbolæ centrum, CS axis principalis positio, TS semiaxis minor principalis (348).

Datis umbilico & asymptoto describitur hyperbola specie data, per constr. Caf. 3. Prop. XIX. vel brevius, observando datam esse TS semiaxem minus principalem, unde ob datam axium rationem, dabitur centrum & axium positio cum altera asymptoto, & hyperbola describitur (348).

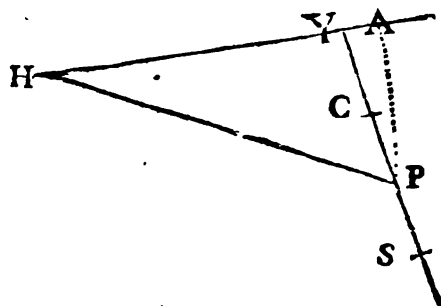


Datis asymptoto, umbilico & tangente; invenitur umbilicus alter ac proinde axis transversus positio & centrum. Sit enim asymptotus data CG, umbilicus S, tangens BD, ex umbilico S, ad asymptotum &

tangentem, demittantur perpendiculara ST; St, & producantur ad Y & V ut sint TY = ST, & V = St; per punctum Y, agatur YH, asymptoto parallela, & juncta YV, bisecetur in M, perpendicularo MH; perpendiculari hujus & rectæ YH communis intersectio H, est umbilicus alter, recta enim HY, asymptoto parallela transit per punctum contactus asymptoti, adeoque ob TY = TS, transit etiam per umbilicum H; Porro rectæ YH, VH, per umbilicum H, ductæ sunt æquales axi principali hyperbolæ per Lem. XV., & ideo æquales inter se; quare perpendiculum HM, ex umbilico H in rectam YV demissum eam in M bisecat.



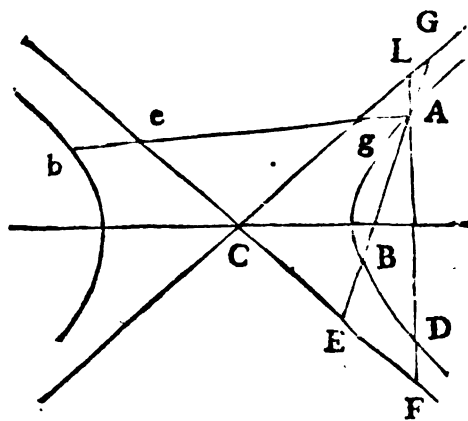
Datis asymptoto CG, puncto P, & umbilico S, invenitur umbilicus alter H, demisso ad asymptotum perpendiculo ST, & sumpta TY = ST, actaque YH asymptoto parallela jungatur YP, & in ea capiatur MN = SP, & ita locetur ut sit YM = PN, hyperbola umbilicis Y, P, & axe principali MN, descripta, rectam YH secabit in altero umbilico H quaesito. Nam PS seu MN est rectarum HY, HP differentia, quæ semper æqualis est axi principali HY.



Aliter. Huc redit problema, datis in triangulo HYP latere PY, angulo Y, & latere HY, HP differentia PS, invenire

venire latera. Ex puncto P, in HY, demittatur perpendicularis PA, capiatu-  
 terum HP, HY, differentia PC = PS,  
 & sumatur YH ad CY, ut est YS ad  
 SC  $\mp$  2YA, scribendo  $-$  2YA, si an-  
 gulus HYP est obtusus, &  $+$  2YA,  
 si acutus, & delendo  $\mp$  YA, si fuerit  
 rectus, erit H punctum quæsitum, facilis  
 est demonstratio ob angulum rectum A.

Sectionis V<sup>æ</sup>. problemata, ubi asymptotus  
 alterutra data est, ad sequentia revocantur.

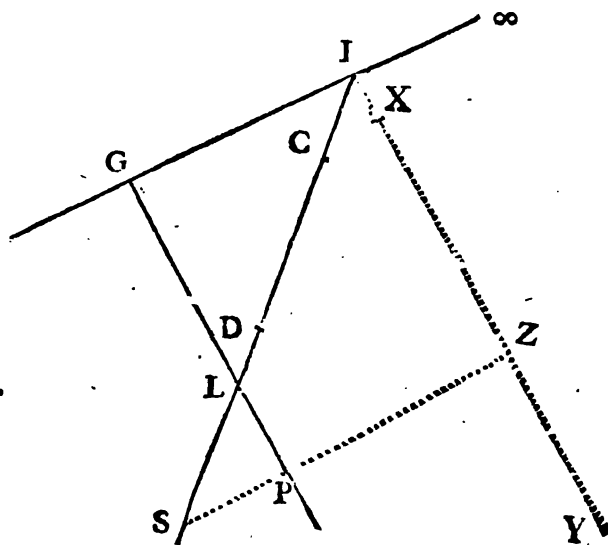


349. Datâ asymptoto CG, cum tribus  
 punctis A, D, B, vel b, hyperbolam de-  
 scribere. Per punctum quodvis A, datum &  
 alia duo D, B, vel b, agantur lineæ infi-  
 nitæ AD, AB vel Ab, asymptoto da-  
 tæ occurrentes in L & G, vel g; tum ca-  
 piantur FD = AL, BE = GA, vel be  
 = gA, juncta FE, aut Fe, erit asympto-  
 tus altera (per prop. 8<sup>am</sup>. lib. 2. Conic. Apoll.  
 per Lem. I. de Conic. p. 115.) quare  
 (34<sup>æ</sup>.) hyperbola describitur, cum facili in-  
 veniri possint quinque sectionis puncta, per  
 angulos mobiles organicè potest describi.

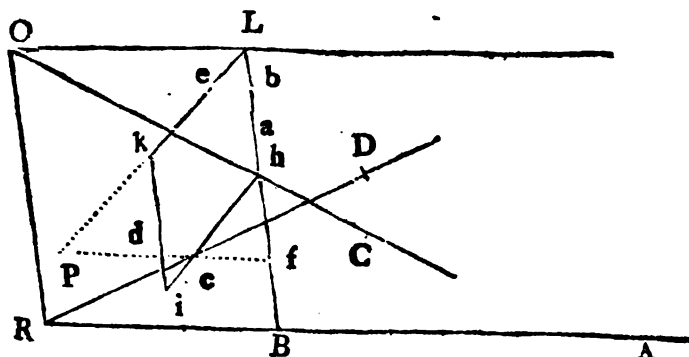
350. Datis asymptoto GI, tangente GL,  
 punctisque duobus C, D, Hyperbolam de-  
 scribere, constructio & demonstratio eadem  
 ferè sunt ac problematis (XVI.).

Per puncta duo data C, D, age rectam  
 infinitam CD, asymptoto & tangenti oc-  
 currentem in punctis I, L, actam ita se-  
 ca in S, ut sit IS ad LS, ut est media  
 proportionalis inter CI & LD ad me-  
 diam proportionalem inter CL & LD,

deinde age SP asymptoto GI parallelam, LIBER  
 hæc secabit tangentem GI, in puncto con-  
 tactus P; nam si P supponatur esse punctum  
 contactus, & per punctum I agatur IY tan-  
 genti GL parallela quæ occurrat hyperbolæ



in X & Y, & in eâ sumatur IZ, media  
 proportionalis inter IX & IY erit (per  
 prop. 3. & 10. lib. 2. Conic. Apoll.)  $IX \times IY$   
 five  $IZ^2 = PG^2$ , sit enim  $\infty$  punctum con-  
 tactus Hyperbolæ & Asymptoti erit  $\infty I^2$ :  
 $\infty G^2 = IX \times IY : PG^2$  (per Cor.  
 2. Lem. III. de Conic. p. 118.) sed cum  
 $\infty I$  &  $\infty G$  sint lineæ infinitæ quan-  
 titate finitâ GI differentes, pro æquali-  
 bus habentur, ergo etiam  $IX \times IY$   
 five  $IZ^2 = PG^2$ , atque adeò  $IZ$   
 = PG, & consequenter juncta PZ, pa-  
 rallela est asymptoto GI; recta ZP pro-  
 ducta secet rectam IL, in puncto aliquo  
 S, & ob similia triangula SIZ, SLP,  
 erit  $IZ^2 : LP^2 = IS^2 : LS^2$ ; verum  
 (vid. Nos. ad probl. XVI. aut Lem.  
 III. de Conic. p. 117.)  $XI \times IY (IZ^2)$ :  
 $LP^2 = CI \times ID : CL \times LD$ ; ergò  $IS^2$ :  
 $LS^2 = CI \times ID : CL \times LD$ , quare si  
 recta IL ita secetur in S, ut sit  $IS^2$ :  
 $LS^2 = CI \times ID : CL \times LD$ ; & agatur  
 SP, asymptoto GI parallela, erit P pun-  
 ctum contactus. Datis autem tribus pun-  
 ctis C, P, D, Hyperbola describitur (349.)

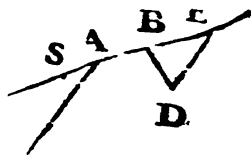


351. Datis asymptoto OL, duabus tangentibus OC, RD, & puncto A, Hyperbolam describere; ( solutio facile deducitur ex problemate XVII ).

Per concursum O asymptoti OL cum tangente OC, & concursum R tangentis alterius RD cum recta RA quæ per punctum datum A & punctum contactus asymptoti transit, seu quæ est asymptoto parallela; age rectam infinitam OR, eaque adhibita pro radio ordinato primo, OL verò pro radio ordinato novo usurpata, sumptisque ordinatis novis asymptoto parallelis ( ad majorem constructionis facilitatem ), transmutetur figura per Lem. XXII. in figuram novam, nimirum linea BA in lineam Ba, ( 330 ), punctum A in a, linea RD in ik ipsi BL parallelam ( 329 ) OC in ih, OL in kL ipsi ih parallelam ( 327 ) & punctum contactus asymptoti infinite distans transferetur in L; Nam punctum contactus asymptoti est communis intersectio linearum RA, OL infinitarum, & ideo transfertur in L communem interfectionem rectarum kL, BL parallelogrammi hikL; Tria ergo latera hi, ik, kL tangunt novam sectionem conicam quæ transire debet per punctum a, dicantur c & d puncta contactuum linearum hi, ik, sic invenietur punctum c, sumatur Radix quadrata facti  $hL \times ha$  & addatur

lineæ ik, illa summa erit ad duplum lineæ hi ut ea ipsa Radix quadrata ad portionem hc. Hoc est  $ik + \sqrt{hL \times ha} : 2hi = \sqrt{hL \times ha} : hc$ . Nam ( per Cor. 2. & 3. Lem. III. de Conic. p. 118. ) est  $dk^2 : kL^2 = di^2 : ic^2 = hL \times ha : hc^2$  inde est  $dk : kL = di : ic = \sqrt{hL \times ha} : hc$ ; & sumendo summam Antec. & Conseq. est  $dK + di + \sqrt{hL \times ha} : KL + ic + hc$  five  $ik + \sqrt{hL \times ha} : kL + hi ( 2hi ) = \sqrt{hL \times ha} : hc$ : Invenio autem puncto c invenitur punctum d, si quidem est  $di : ic = \sqrt{hL \times ha} : hc$ : Construitur autem hæc solutio capiendi hf, æqualem medię proportionali inter Lh & ah, & producta Lk ad P, ut sit  $kP = kL$ , agendo per f & P rectam fP, illa fP latera hi, ik secabit in punctis quæstis c, d; nam ob parallelas ch, PL & ik, fL est  $Lf ( ik + \sqrt{ah \times hL} ) : LP ( 2kL \text{ five } 2ih ) = hf ( \sqrt{ah \times hL} ) : hc$ ; &  $hc : hf = ic : id$ ; per inversas operationes Lem. XXII. ( 331 ), transferantur puncta c, d, in figuram primam, nimirum in C, D, & data erunt tria hyperbolæ puncta D, C, A, cum asymptoto OL, quare describetur hyperbola ( 349 ).

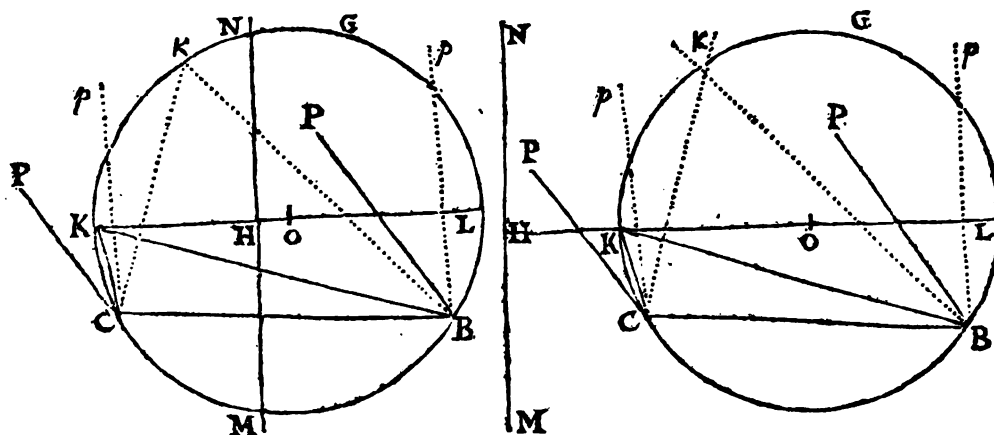




GR x R Plex natura hyperbolice inter a sympha-  
tosos, quare per compositionem rationum  
 $LI^2 \times GH \times LH : GL^2 \times HI \times LH =$   
 $DI^2 : GP^2 = LI^2 \times GH : GL^2 \times HI$ .  
Verum (per construct.)  $GH : HI = GL^2 :$   
 $GL \times LN$ , &  $GK^2 = GL \times LN$ , ac  
proinde  $GH : HI = GL^2 : GK^2$ , unde  
 $DI^2 : GP^2 = LI^2 \times GL^2 : GL^2 \times GK^2 =$   
 $LI^2 : GK^2$ , &  $DI : GP = LI : GK$ ,  
atque add.  $LI : DI = GK : GP$ ; sed su-  
pra invenimus  $GP + LP : GP = LI : DI$ ,  
ergo  $GK : GP = GP + LP : GP$ , atque

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 243

Postquam trajectoria descripta est, invenire licet axes & umbilicos ejus hâc methodo. In constructione & figurâ lemmatis DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS. **xxi.** fac ut angulorum mobilium  $PBN$ ,  $PCN$  crura  $BP$ ,  $CP$ , quorum concursu trajectoria describebatur, sint sibi invicem parallela, cumque servantia situm revolvantur circa polos suos  $B$ ,  $C$  in figurâ illâ. Interea vero describant altera angulorum illorum crura  $CN$ ,  $BN$ , concursu suo  $K$  vel  $k$ , circulum  $BGKC$ .



Sit circuli hujus centrum  $O$ . Ab hoc centro ad regulam  $MN$ , ad quam altera illa crura  $CN$ ,  $BN$  interea concurrebant, dum trajectoria describebatur, demitte normalem  $OH$  circulo occurrentem in  $K$  &  $L$ . Et ubi crura illa altera  $CK$ ,  $BK$  concurrunt ad punctum illud  $K$  quod regulæ propius est, crura prima  $CP$ ,  $BP$  parallela erunt axi majori, & perpendicularia minori; & contrarium eveniet, si crura eadem concurrunt ad punctum remotius  $L$ . Unde si detur trajectoriæ centrum, dabuntur axes. (d) Hisce autem datis, umbilici sunt in promptu.

Axiom

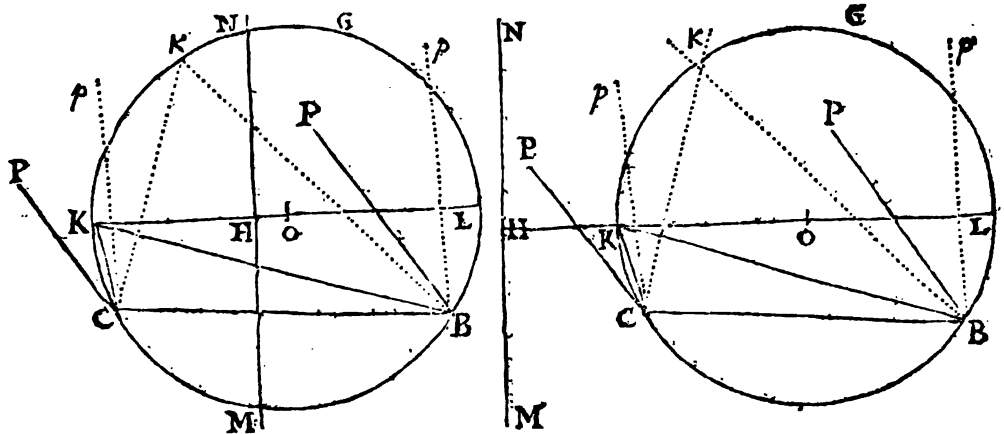
ita  $GK = GP + LP$ ; seu  $GL + LK = GL + 2LP$ , ac proinde  $LK = 2LP$ , &  $LP = \frac{1}{2}LK$ ; invento autem puncto contactus  $P$ , si capiatur  $PQ = PG$ , & per punctum  $Q$ , agatur  $QC$ , ipsi  $LH$  parallela, crit  $Q$  altera asymptotus, & hyperbola describetur (346).

(d). \* Vid. Not. 314.

Hh 2



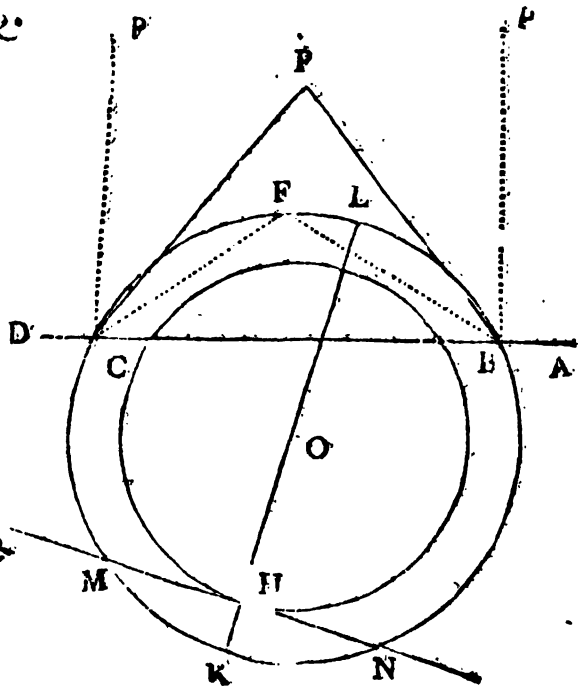
DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.



(e) Axiom vero quadrata sunt ad invicem ut  $KH$  ad  $LH$  & inde facile est trajectoriam (f) specie datam per data quatuor puncta describere. Nam si duo ex punctis datis constituentur poli

(e) \* Vid. Not. 315.

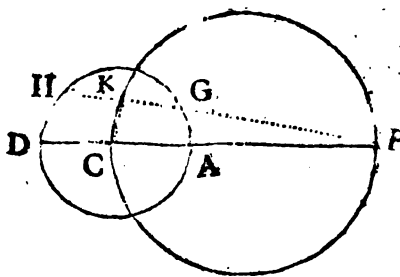
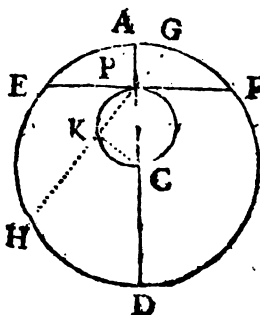
(f) Sit describenda trajectoria specie data per puncta quatuor  $C, B, P, Q$ , duo puncta  $C, B$ , constituentur poli & junctis  $CP, BP$  erunt  $PCB, PBC$  anguli mobiles, fac ut angulorum illorum crura  $BP, CP$  sint sibi invicem parallela; nempe in positione quavis  $Bp, Cp$ , & crura alia  $BC, CB$  se mutuo interfecent in  $F$ ; & centro  $O$  describe circulum per tria puncta  $C, F, B$  transeuntem: cujusque proinde segmentum  $CFB$  capit angulum  $CFB$ , centro  $O$  radio  $OH$  describatur circulus, (punctum verò  $H$ , ita determinetur in Diametro  $KE$  ut sit  $KH$  ad  $LH$  ut sunt ad invicem quadrata axiom trajectoriæ). Tum crurum  $BP, CP$  concursus adducatur ad punctum  $Q$  & interea notetur punctum  $R$  ubi concurrunt alia crura  $CA, BD$ , & ex puncto  $R$  agatur recta  $RMN$  tangens circulum radio  $OH$  descriptum; erit  $NM$  regula cujus ope trajectoria describitur.



DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

Sunt & alia lenuata quorum ope trajectoriæ speciei datæ, datis punctis & tangentibus, describi possunt. (h) Ejus generis est quod, si recta linea per punctum quodvis positione datum ducatur, quæ datam coni sectionem in punctis duobus interfecet, & intersectionum intervallum bisecetur, punctum bisectionis tanget aliam coni sectionem ejusdem speciei cum priore, atque

(h) \* Hoc Lemma facile demonstratur in circulo. Intra vel extra circulum AFDE datum sit punctum P per quod & per centrum circuli C agatur PD; tum diameter PC describatur circulus PKCP, chorda quælibet GH per punctum P ducta, bifariam divisa est in puncto K ubi circulo PKC occurrit; Nam juncta KC, erit angulus CKP rectus ac proinde chorda HG bisecta in K.



# Hi

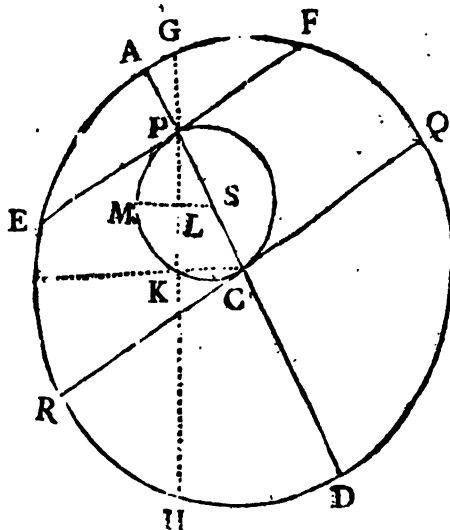
DE M<sup>o</sup> atque axes habentem prioris axibus parallelas. Sed proporo ad  
TU COR- magis utilia.

FORUM.

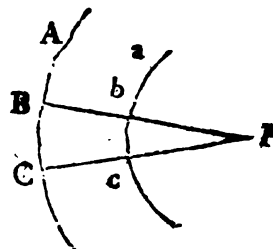
LIBER

PRIMUS.

L E M.



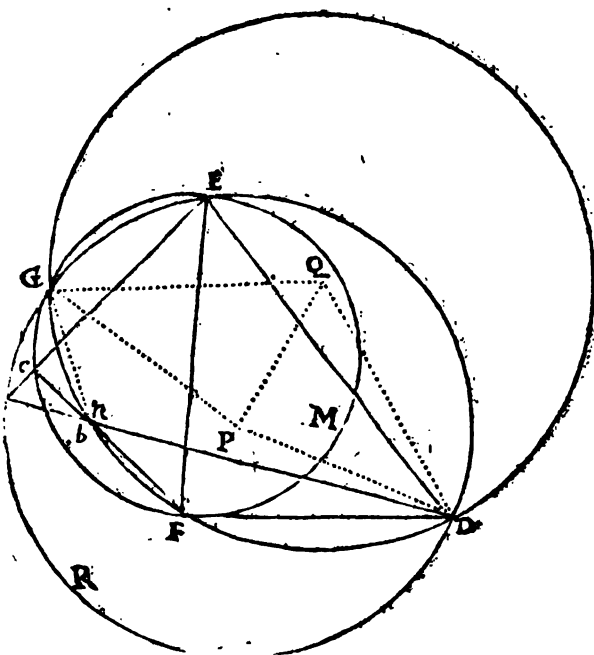
parallelas; sed quia in triangularis similibus  
 $PSL$ ,  $PCK$  est  $PS = SC$  erit quoque  $PL$   
 $= LK$ , ac proinde  $PLK$  erit ordinata ad  
diametrum  $SM$ , adeoque  $GKH$  erit ordi-  
nata ad diametrum  $NC$ ; quare  $GK = KH$   
ergo punctum bisectionis  $K$  tanget curvam  
priori similem & axes habentem prioris  
axibus parallelas. Eadem est demonstra-  
tio, si punctum  $P$  extra sectionem sumat-  
ur.



\* Idem Lemma pari facilitate in cas-  
teris sectionibus conicis demonstratur.  
Datum sit punctum  $P$ , per hoc & per cen-  
trum  $C$  sectionis conicæ  $AFDE$  agatur  
diametrum  $AD$ , tum diametro  $PC$ , quæ  
similis sit diametro  $AD$ , describatur alia  
sectio conica  $PMKC$ , ejusdem speciei  
cum datâ, & diameter conjugata ipsius  $PC$ ,  
similis erit & parallela diametro  $RQ$ , con-  
jugatæ ipsius  $AD$ , & quia in duabus figu-  
ris similibus, si duo latera homologa pa-  
rallela sint, cætera omnia latera similia sunt  
etiâ parallela, ambarum sectionum coni-  
carum similes diametri omnes, adeoque &  
axes paralleli erunt; agatur nunc per pun-  
ctum datum  $P$ , chorda quævis  $GPH$ , sec-  
tioni  $PMC$  occurrens in  $K$ , dico esse  
 $KH = KG$ . Nam jungatur  $CK$ , & pro-  
ducatur donec trajectoriæ  $AHD$  occurrat  
in  $N$ , & per centrum  $S$  trajectoriæ  $PKC$ ,  
agatur  $SM$  parallela  $CK$ , chordæ  $PK$  oc-  
currens in  $L$  & sectioni in  $M$ , erunt  $SM$ ,  
 $NC$  diametri similes, & earum ordinatæ

354. Adjungemus aliud Lemma maximè  
universale. Si ex puncto quovis  $P$  dato du-  
catur recta  $PB$ , curvæ cuilibet  $ABC$  oc-  
currens in  $B$ , & recta illa  $PB$  ita divida-  
tur in  $b$ , ut sit semper  $Pb$  ad  $PB$  in ra-  
tione datâ, punctum  $b$ , tanget curvam  $abc$   
ejusdem speciei & ordinis cum curvâ  $ABC$ ,  
atque lineas habentem similibus curvæ  $ABC$   
lineis parallelas. Nam si fuerit  $ABC$  poly-  
gonum rectilineum cujus latus unum  $BC$ ,  
cum sit (*per hyp.*)  $Pb : PB = Pc : PC$ , si-  
milis erunt triângula  $PBC$ ,  $Pbc$ , & latera  
 $BC$ ,  $bc$ , parallela & in datâ ratione  $Pb$ , ad  
 $Pb$ , ac proinde totum polygonum  $ABC$   
simile polygono  $abc$ , & eorum latera  
homologa parallela erunt. Laterum poly-  
goni  $ABC$  numerus augeatur in infinitum  
& ipsorum longitudo in infinitum mi-  
nuatur & duo polygona  $ABC$ ,  $abc$  mu-  
tabuntur in curvas similes in quibus latera  
homologa sunt parallela.

**LIBER  
PRIMUS.**



hæris *ACBA* in orbem redeant; deinde compleantur hæc seg-  
menta in circulos integros. Secent circuli duo priores se mutuo in  
*G*, sintque centra eorum *P* & *Q*. Junctis *GP*, *PQ*, cape *G* &  
ad *AB* ut est *GP* ad *PQ*, & centro *G*, intervallo *Ga* de-  
scribe circulum, qui secet circulum primum *DGE* in *a*. Jun-  
gatur. tum *aD* secans circulum secundum *DEG* in *b*, tam *aE*  
secans



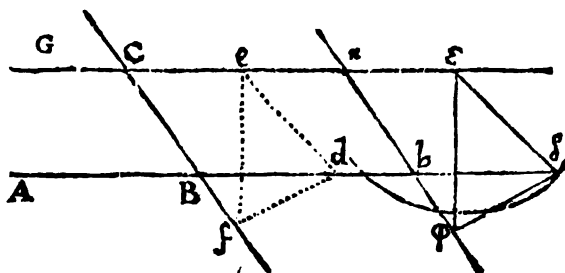
ideoque triangulum  $anc$  triangulo  $ABC$  æquiangulum. Ergo  $\angle anc$  seu  $\angle Fnd$  angulo  $ABC$ , ideoque angulo  $FbD$  æqualis est; & propterea punctum  $n$  incidit in punctum  $b$ . Porro angulus  $GPQ$ , <sup>(k)</sup> qui dimidius est anguli ad centrum  $GPD$ , æqualis est angulo ad circumferentiam  $GaD$ ; & angulus  $GQP$ , qui dimidius est anguli ad centrum  $GQD$ , æqualis est complemento ad duos rectos anguli ad circumferentiam  $GbD$ , ideoque æqualis angulo  $Gba$ ; suntque ideo triangula  $GPQ$ ,  $Gab$  similia; &  $Ga$  est ad  $ab$  ut  $GP$  ad  $PQ$ ; id est (ex constructione) ut  $Ga$  ad  $AB$ . Æquantur itaque  $ab$  &  $AB$ ; & propterea triangula  $abc$ ,  $ABC$ , quæ modo similia esse probavimus, sunt etiam æqualia. Unde cum tangant insuper trianguli  $DEF$  anguli  $D$ ,  $E$ ,  $F$  trianguli  $abc$  latera  $ab$ ,  $ac$ ,  $bc$  respectivè, compleri potest figura  $ABCdef$  figuræ  $abcDEF$  similis & æqualis, atque eam complendo solvetur problema. *Q. E. F.*

*Corol.* Hinc recta duci potest cujus partes longitudine datæ rectis tribus positione datis interjacebunt. Concipe triangulum  $DEF$ , puncto  $D$  ad latus  $EF$  accedente, & lateribus  $DE$ ,  $DF$  in directum positis, mutari in lineam rectam, cujus pars data  $DE$  rectis positione datis  $AB$ ,  $AC$ , & pars data  $DF$  rectis positione datis  $AB$ ,  $AC$ , interponi debet; &

(k) \* Angulus  $GPQ$  dimidius est anguli ad centrum  $GPD$ , recta enim  $PQ$ , quæ circulorum  $DRGD$ ,  $DGFD$  centra jungit, perpendicularis est ad rectam  $GD$ , quæ puncta intersectionum circulorum jungeret adeoque angulum  $GPD$  bisecat.

355. Si trium rectarum  $GC$ ,  $AB$ ,  $CB$  positione datarum duæ  $GC$ ,  $AB$  sint parallelæ & oporteat triangulum datum  $DEF$  ita locare ut angulus ejus  $D$  lineam  $AB$ , angulus  $E$  lineam  $GC$ , & angulus  $F$  lineam  $BC$  tangat, centro quovis  $\epsilon$  in lineâ  $GC$ , ad arbitrium sumpto & radio  $\epsilon d$ , æquali  $ED$ , describatur circulus rectæ  $AB$ , occurrens in  $d$ ; super basi  $\epsilon d$  construatur triangulum  $\epsilon d \phi$  simile & æquale triangulo dato  $EDF$ , & ex angulo illius  $\phi$  agatur  $\phi u$  rectæ  $EC$  parallela secans  $GC$  in  $u$ , &  $AB$  in  $b$ ,

*lem. I.*



& compleatur figura  $CBfd\epsilon$  similis & æqualis figuræ  $\epsilon b \phi d$ , patet factum. Si recta  $ED$  minor sit parallelarum  $GC$ ,  $AB$  distantia, problema impossibile est; si major fuerit circulus radio  $\epsilon d$ , descriptus, rectam  $AB$  in duobus punctis secabit, & duæ erunt rectæ  $\epsilon d$  positiones.



*I. i*

# 250 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO- & applicando constructionem præcedentem ad hunc casum sol-  
TU COR- vetur problema.

PORUM.

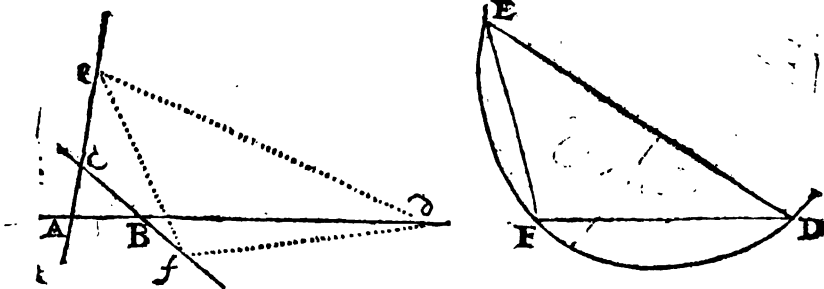
LIBER

PRIMUS.

## PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA XX.

*Trajectoriam specie & magnitudine datam describere, cujus partes  
datæ rectis tribus positione datis interjacebunt.*

Describenda sit trajectoria, quæ sit similis & æqualis lineæ  
curvæ  $DEF$ , quæque à rectis tribus  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$  positione



datis, in partes datis hujus partibus  $DE$  &  $EF$  similes & æquæ-  
les fecabitur.

Age rectas  $DE$ ,  $EF$ ,  $DF$ , & trianguli hujus  $DEF$  pone  
angulos  $D$ ,  $E$ ,  $F$  ad rectas illas positione datas (*per lem. xxvi.*)

(<sup>1</sup>) dein circa triangulum describe trajectoriam curvæ  $DEF$   
similem & æqualem.  $Q. E. F.$

LEM.

(1) \* Si enim data sit curvæ  $DEF$ ,  
triangulo dato  $EFD$  circumscripta, dabi-  
tur diametrorum & axium ejusdem curvæ  
positio ad trianguli  $EFD$  latera, & hinc

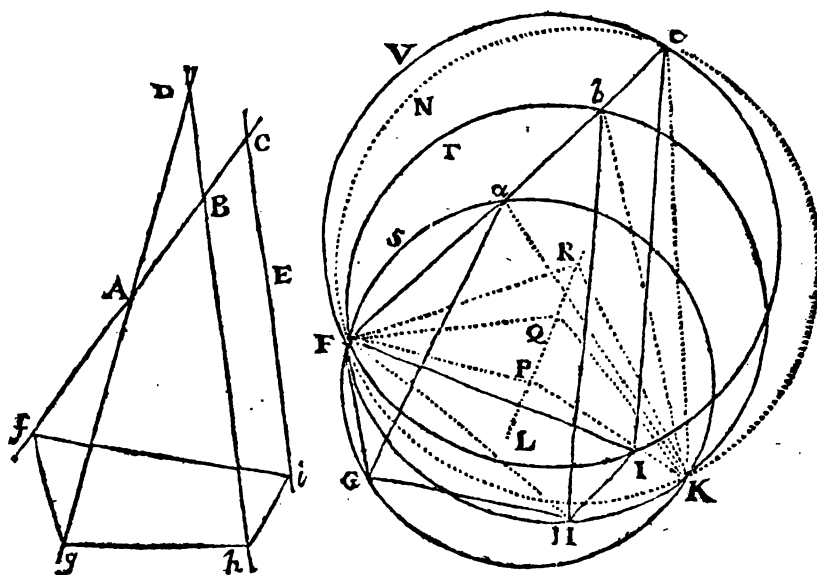
habebitur positio diametrorum & axium  
curvæ similis & æqualis circa triangulum  
e f d describendæ.

LEMMA XXVII.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Trapezium specie datum describere, cujus anguli ad rectas quatuor positione datas, quæ neque omnes parallelæ sunt, neque ad commune punctum convergunt, singuli ad singulas consistant.*

Dentur positione rectæ quatuor  $ABC$ ,  $AD$ ,  $BD$ ,  $CE$ ; quarum prima secet secundam in  $A$ , tertiam in  $B$ , & quartam in  $C$ : & describendum sit trapezium  $fhgi$ , quod sit trapezio  $FGHI$  simile; & cujus angulus  $f$ , angulo dato  $F$  æqualis, tan-

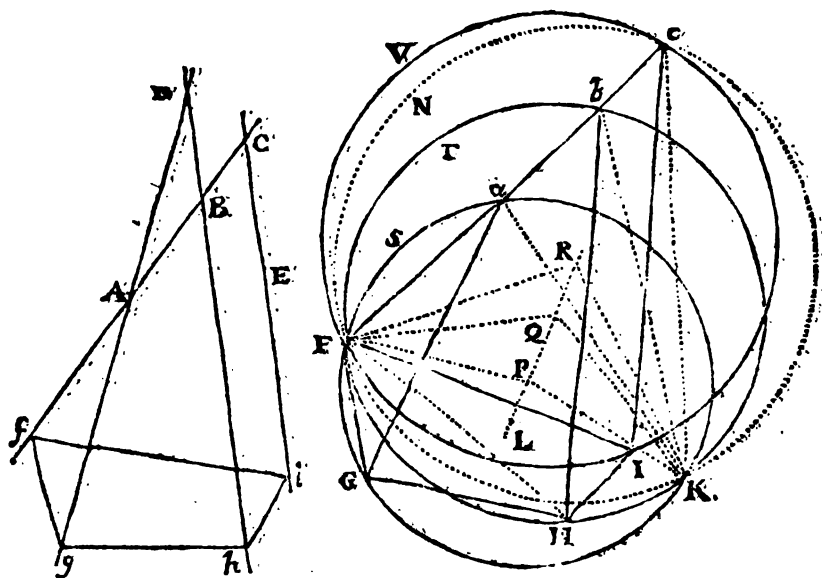


gat rectam  $ABC$ ; cæterique anguli  $g$ ,  $h$ ,  $i$ , cæteris angulis datis  $G$ ,  $H$ ,  $I$  æquales, tangant cæteras lineas  $AD$ ,  $BD$ ,  $CE$  respectivè. Jungatur  $FH$  & super  $FG$ ,  $FH$ ,  $FI$  describantur totidem circulorum segmenta  $FSG$ ,  $FTH$ ,  $FVI$ ; quorum primum  $FSG$  capiat angulum æqualem angulo  $BAD$ , secundum  $FTH$  capiat angulum æqualem angulo  $CBD$ , ac ter-



DE MOTU CORP. FORUM. LIBER PRIMUS.

tium  $FVI$  capiat angulum æqualem angulo  $ACE$ . Describi autem debent segmenta ad eas partes linearum  $FG$ ,  $FH$ ,  $FI$ , ut literarum  $FSGFI$  idem sit ordo circularis qui literarum  $BADB$ , utque literæ  $FTHF$  eodem ordine cum literis  $CBDC$ , & literæ  $FVIF$  eodem cum literis  $ACEA$  in orbem redeant. Compleantur segmenta in circulos integros; sitque  $P$  centrum circuli primi  $FSG$ , &  $Q$  centrum secundi  $FTH$ . Jungatur & utrinque producat  $PQ$ , & in eâ capiatur  $QR$  in eâ ratione



ad  $PQ$  quam habet  $BC$  ad  $AB$ . Capiatur autem  $QR$  ad eas partes puncti  $Q$  ut literarum  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  idem sit ordo atque literarum  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , centroque  $R$  & intervallo  $RF$  describatur circulus quartus  $FNc$  secans circulum tertium  $FVI$  in  $c$ . Jungatur  $Fc$  secans circulum primum in  $a$ , & secundum in  $b$ . Agantur  $aG$ ,  $bH$ ,  $cI$ , & figuræ  $abcFGHI$  similis constitui potest figura  $ABCfghi$ . Quo facto erit trapezium  $fghi$  illud ipsum, quod constituere oportebat.

Secent enim circuli duo primi  $FSG$ ,  $FTH$  se mutuo in  $K$ . Jungantur  $PK$ ,  $QK$ ,  $RK$ ,  $aK$ ,  $bK$ ,  $cK$ , & producat  $QP$  ad  $L$ . Anguli ad circumferentias  $FaK$ ,  $FbK$ ,  $FcK$  sunt semisses.

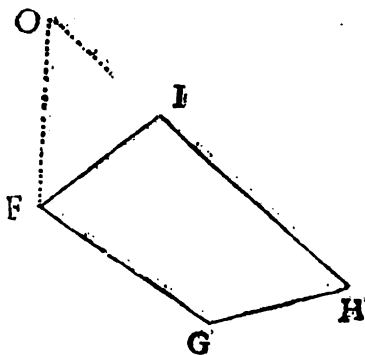
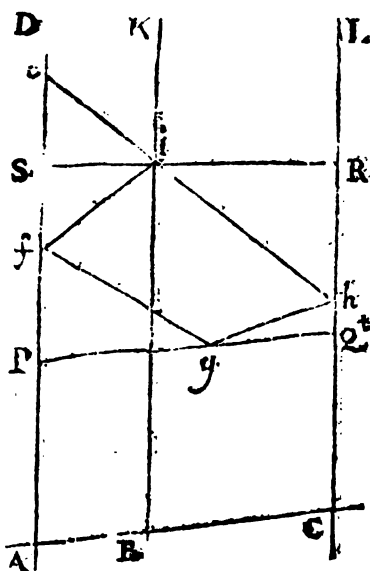
# PRINCIPIA MATHEMATICA. 253

misses angulorum  $FPK$ ,  $FQK$ ,  $FRK$  ad centra, ideoque  $DE$  Mo-  
angulorum illorum dimidiis  $LPK$ ,  $LQK$ ,  $LRK$  æquales. **TU COR-**  
(m) Est ergo figura  $PQRK$  figuræ  $abcK$  æquiangula & si- **PORUM.**  
milis, & propterea  $ab$  est ad  $bc$  ut  $PQ$  ad  $QR$ , id est, ut **LIBER**  
 $AB$  ad  $BC$ . Angulis insuper  $FaG$ ,  $FbH$ ,  $FcI$  æquantur **PRIMUS.**  
 $fAg$ ,  $fBh$ ,  $fCi$  per constructionem. Ergo figuræ  $abcFGHI$   
figura similis  $ABCfghi$  compleri potest. Quo facto trapezium  
 $fghi$  constituetur simile trapezio  $FGHI$ , & angulis suis  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $i$   
tanget rectas  $ABC$ ,  $AD$ ,  $BD$ ,  $CE$ . **Q.E.F.** **Co-**

(m)\* Est enim angulus  $Kab = KPR$ ,  
angulus  $Kba = KQP$ , ac proinde trian-  
gulum  $Kab$ , simile triangulo  $PQK$ , & si-  
militer patet triangulum  $bKc$ , esse simile  
triangulo  $QKR$ , adeoque totam figuram  
 $abcK$ , similem esse figuræ  $PQRK$ .

\* Si ex quatuor rectis positione datis  
duæ vel tres fuerint parallelæ maneat ead-  
em constructio. Potest tamen hæc alia  
adhiberi quæ etiam valet, ubi quatuor sunt  
parallelæ. Datæ sint tres parallelæ  $AD$ ,  
 $BK$ ,  $CL$  quas quarta  $AC$  in  $A$ ,  $B$ ,  $C$   
secat & oporteat describere trapezium simi-  
le trapezio  $FIHG$  & cujus anguli angulis  
 $F$ ,  $I$ ,  $H$ ,  $G$  æquales, rectis  $AD$ ,  $BK$ ,  $CL$ ,  
 $AC$ , tangant per punctum quodvis  $i$ , rectæ  
 $BK$ , agatur  $SiR$ , parallelis  $AD$ ,  $BK$ ,  
 $CL$  normalis, iisque occurrens in  $S$ , &  
 $R$ , producat  $HI$ , ad  $O$ , ut sit  $HI$  ad  
 $IO$  ut est  $Ri$  ad  $iS$  junganturque  $FO$ ; tum  
ex puncto  $i$ , agatur  $if$ , parallelam  $AD$   
secans in  $f$ , ita ut sit angulus  $fiB$  seu  
 $ifD$ , æqualis angulo  $IFO$ , & super la-  
tere  $fi$ , simili  $FI$  construat **trapezium**  
 $fihg$  simile trapezio  $FIHG$ , ac per an-  
gulum  $g$  agatur recta  $PQ$  ipsi  $AC$  paral-  
lela, & tandem super recta  $AC$ , construa-  
tur figura similis figuræ  $RQhifg$ . Dico  
factum.

Demonstrandum est angulum  $h$  esse in-  
parallelam  $CL$ ; si punctum  $h$ , non est in  
linea  $CL$  producat  $iH$  donec rectæ  $CL$   
occurrant in  $t$ , & producat  $ti$ , donec  
occurrat rectæ  $AD$  in  $o$  & erit  $HI : IO$   
 $= hi : io = Ri : iS$ , ob figuras  $oifh$ ,  
 $OIFH$ , (per constr.) similes; sed ob simi-  
lia triangula  $tIR$ ,  $oIS$ ,  $ti : io = Ri : iS$ ,  
ergo  $hi : io = ti : io$ , atque adeo  $hi =$   
 $ti$ , quare punctum  $t$ , cum  $h$ , coincidit.



## 254 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO.  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Corol.* Hinc recta duci potest cujus partes, rectis quatuor positione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli  $FGH$ ,  $GHI$  usque eo; ut rectæ,  $FG$ ,  $GH$ ,  $HI$  in directum jaceant, & in hoc casu construendo problema ducetur recta  $fghi$ , cujus partes  $fg$ ,  $gh$ ,  $hi$ , rectis quatuor positione datis  $AB$  &  $AD$ ,  $AD$  &  $BD$ ,  $BD$  &  $CE$  interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ  $FG$ ,  $GH$ ,  $HI$ , eundemque servabunt ordinem inter se. Idem verò sic fit expeditius.

Producantur  $AB$  ad  $K$ , &  $BD$  ad  $L$ , ut sit  $BK$  ad  $AB$  ut  $HI$  ad  $GH$ ; &  $DL$  ad  $BD$  ut  $GI$  ad  $FG$ ; & jungatur  $KL$  occurrens rectæ  $CE$  in  $i$ . Producat  $iL$  ad  $M$ , ut sit  $LM$  ad  $iL$  ut  $GH$  ad  $HI$ , & agatur tum  $MQ$  ipsi  $LB$  parallela, rectæque  $AD$  occurrens in  $g$ , tum  $gi$  secans  $AB$ ,  $BD$  in  $f$ ,  $h$ . Dico factum.

Secet enim  $Mg$  rectam  $AB$  in  $Q$ , &  $AD$  rectam  $KL$  in  $S$ , & agatur  $AP$  quæ sit ipsi  $BD$  parallela & occurrat  $iL$  in  $P$ , & crunt  $gM$  ad  $Lh$  ( $gi$  ad  $hi$ , <sup>(n)</sup>  $Mi$  ad  $Li$ ,  $GI$  ad  $HI$ ,  $AK$  ad  $BK$ ) &  $AP$  ad  $BL$  in eadem ratione. Secetur  $DL$  in  $R$  ut sit  $DL$  ad  $RL$  in eadem illâ ratione, & ob proportionales  $gS$  ad  $gM$ ,  $AS$  ad  $AP$ , &  $DS$  ad  $DL$ ; erit, <sup>(o)</sup> ex æquo, ut  $gS$  ad  $Lh$  ita  $AS$  ad  $BL$  &  $DS$  ad  $RL$ ; & mixtim,  $BL - RL$  ad  $Lh - BL$  ut  $AS - DS$  ad  $gS - AS$ . Id est  $BR$  ad  $Bh$  ut  $AD$  ad  $Ag$ , ideoque ut  $BD$  ad  $gQ$ . Et vicissim  $BR$  ad  $BD$  ut  $Bh$  ad  $gQ$ , seu  $fh$  ad  $fg$ . Sed ex constructione linea  $BL$  eadem ratione secta fuit in  $D$  &  $R$  atque linea  $FI$  in  $G$  &  $H$ : ideoque est  $BR$  ad  $BD$  ut  $FH$  ad  $FG$ . Ergo  $fh$  est ad  $fg$  ut  $FH$  ad  $FG$ . Cum igitur sit etiam  $gi$  ad  $hi$  ut  $Mi$  ad  $Li$ , id est, ut  $GI$  ad  $HI$ , patet lineas  $FI$ ,  $fi$  in  $g$  &  $h$ ,  $G$  &  $H$  similiter sectas esse. *Q. E. E.*

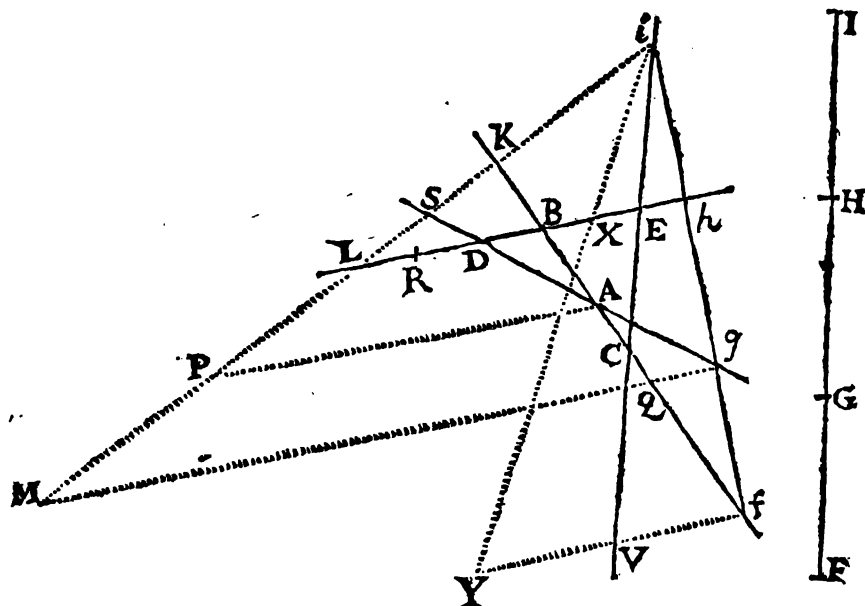
In

(n) \* Nam (per constr.)  $LM:iL = GH:HI = AB:BK$ , ac proinde componendo consequentes cum antecedentibus  $Mi:L i = GI:HI = AK:BK = AP:BL$  ob parallelas.

(o) \* Quoniam enim

$$gM:Lh = AP:BL = DL:RL \\ \& gS:gM = AS:AP = DS:DL$$

patet esse  $gS:Lh = AS:BL = DS:RL$ , & consequenter  $gS - AS:Lh - BL = AS - DS:BL - RL = gS:Lh$ ; unde invertendo permutando & alternando  $BL - RL:Lh - BL = AS - DS:gS - AS$  id est  $BR:Bh = AD:Ag = BD:gQ$ , ob similia triangula  $ADB$ ,  $AgQ$ .



In constructione corollarii hujus postquam ducitur  $LK$  secans  $CE$  in  $i$ , producere licet  $iE$  ad  $V$ , ut sit  $EV$  ad  $Ei$  ut  $FH$  ad  $HI$ , & (p) agere  $Vf$  parallelam ipsi  $BD$ . (q) Eodem recidit si centro  $i$ , intervallo  $IH$ , describatur circulus secans  $BD$  in  $X$ , & producat  $iX$  ad  $Y$ , ut sit  $iY$  æqualis  $IF$ , & agatur  $Yf$  ipsi  $BD$  parallela.

Problematis hujus solutiones alias *Wrennus* & *Wallisus* olim excogitarunt.

PRO

(p) \* Si enim ex puncto  $f$ ; per superiorē constructionem invento agatur  $fV$  parallela  $BD$  & linea  $iE$  productæ occurrunt in  $V$ , erit ob similia triangula  $iEh$ ,  $iVf$ ,  $EV : Ei = fh : hi$ , sed ex suprā demonstratis  $fh : hi = FH : HI$ , ergo  $EV : Ei = FH : HI$ .

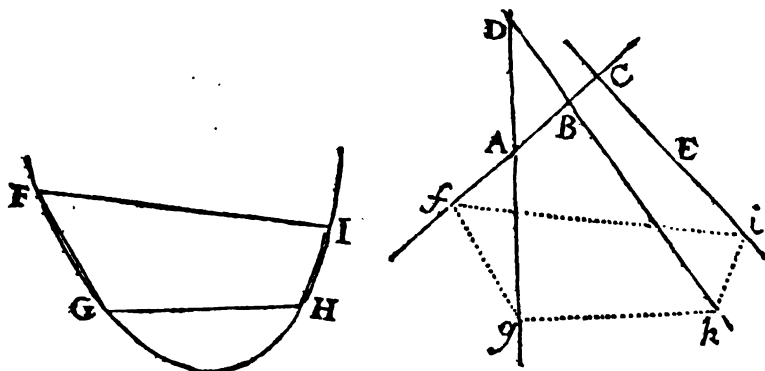
(q) \* Nam si ex puncto  $f$ ; ut suprā invento agatur  $fY$ , ipsi  $BD$ , parallela & rectæ  $iX$ , productæ occurrunt in  $Y$ , erit ob similia triangula  $iXh$ ,  $iYf$ ,  $ih : hf = iX : XY = IH : HF$ . Unde cum sit  $iX = IH$  (ex hyp.) erit  $XY = HF$ .

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

## PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA XXI.

*Trajectoriam specie datam describere, quæ à rectis quatuor positione datis in partes secabitur, ordine, specie & proportione datas.*

Describenda sit trajectoria, quæ similis sit lineæ curvæ  $FGHI$ , & cujus partes, illius partibus  $FG$ ,  $GH$ ,  $HI$  similes & proportionales, rectis  $AB$  &  $AD$ ,  $AD$  &  $BD$ ,  $BD$  &  $CE$  positione datis, prima primis, secunda secundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis  $FG$ ,  $GH$ ,  $HI$ ,  $FI$  describatur (per



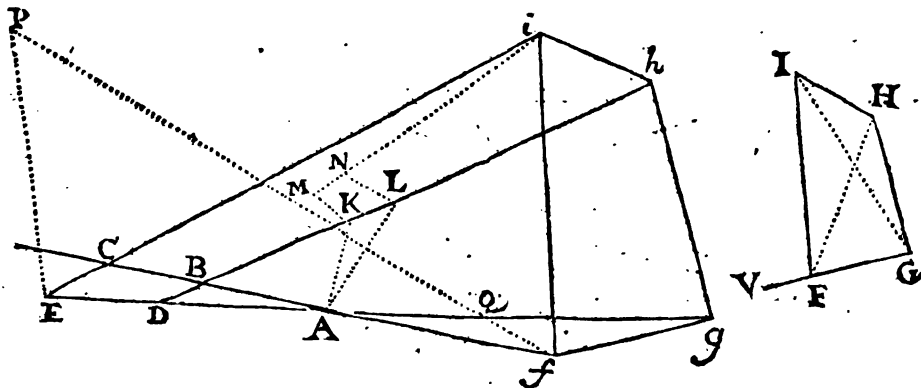
lem. xxviii. ) Trapezium  $fghi$ , quod sit trapezio  $FGHI$  simile, & cujus anguli  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $i$  tangant rectas illas positione datas  $AB$ ,  $AD$ ,  $BD$ ,  $CE$ , singuli singulas dicto ordine. Dein circa hoc trapezium describatur trajectoria curvæ lineæ  $FGHI$  confimilis.

*Scholium.*

Construi etiam potest hoc problema ut sequitur. Junctis  $FG$ ,  $GH$ ,  $HI$ ,  $FI$  produc  $GF$  ad  $V$ , jungeque  $FH$ ,  $IG$ , & angulis  $FGH$ ,  $VFH$  fac angulos  $CAK$ ,  $DAL$  æquales. Concurrent  $AK$ ,  $AL$  cum recta  $BD$  in  $K$  &  $L$ , & inde agantur  $KM$ ,  $LN$ , quarum  $KM$  constituat angulum  $AKM$  æqualem angulo  $GHI$ , sitque ad  $AK$  ut est  $HI$  ad  $GH$ ; &  $LN$  constituat angulum  $ALN$  æqualem angulo  $FHI$ , sitque ad  $AL$

# PRINCIPIA MATHEMATICÁ. 257

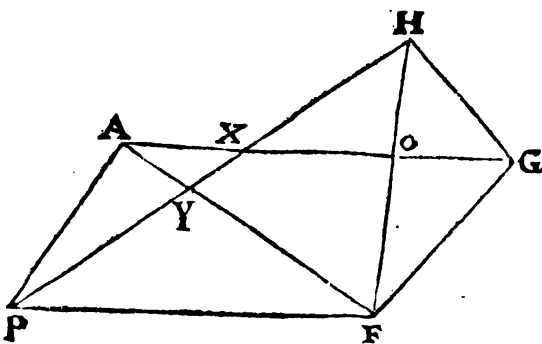
*AL* ut *HI* ad *FH*. Dúcantur autem *AK*, *KM*, *AL*, *LN* De Mō-  
ad eas partes linearum *AD*, *AK*, *AL*, ut literæ *CAKMC*, <sup>TU COR-</sup>  
*ALKA*, *DALND*, eodem ordine cum literis *FGHIF* in <sup>PORUM.</sup>  
orbem redeant; & acta *MN* occurrat rectæ *CE* in *i*. Fac an- <sup>LIBER</sup>  
gulum *iEP* æqualem angulo *IGF*, sitque *PE* ad *Ei* ut *FG* ad <sup>PRIMUS.</sup>  
*GI*; & per *P* agatur *PQf*, quæ cum rectâ *ADE* contineat  
angulum *PQE* æqualem angulo *FIG*, rectæque *AB* occurrat



in *f*, & jungatur *fi*. Agantur autem *PE* & *PQ* ad eas par-  
tes linearum *CE*, *PE*, ut literarum *PEiP* & *PEQP* idem  
sit ordo circularis qui literarum *FGHIF*; & si super lineâ *fi*  
eodem quoque literarum ordine constituatur trapezium *fg hi* tra-  
pezio *FGHI* simile, & circumscribatur trajectory specie data,  
solvetur problema. (r) Hac-

(r) Hæc nova constructio hoc præmis-  
so Lemmate demonstratur.

**Lemma.** Si ex puncto *A* extrâ triangulum  
*FGH* dato, agatur ad angulum *F* recta *AF*,  
& ad angulum *G* recta *AG*, secans latus  
oppositum *HF* in *O*, & super rectam *AF*,  
construatur triangulum *FAP*, simile trian-  
gulo *FGH*, jungaturque *PH* secans *AG*  
in *X*, & *AF* in *Y*, similia erunt triangu-  
la *PHF*, *AGF*, & anguli *HXG*, *HFG*  
æquales; quoniam enim anguli *AFP*, *HFG*  
sunt æquales (per hyp.) æquales quoque  
erunt anguli *PFH*, *AFG*; & quoniam  
duo triangu- *PFA*, *HFG*, similia sunt  
(per hyp.) erit *PF:AF = HF:FG*,  
adeoque triangu- *AFG*, *PFH*, quorum  
latera proportionalia æqualem angulum  
continent sunt similia, & hinc anguli *HPF*,  
*GAF* æquantur; cumque anguli oppositi



*PYF*, *AYX*, sint etiam æquales, liquet  
angulum *AXY* sive *HXG*, æqualem esse  
angulo *AFP = HFG*. Q. e. D.



SECTIO VI.

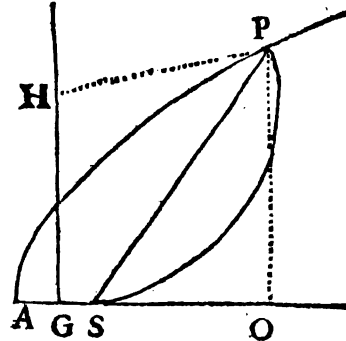
*De inventione motuum in orbibus dotis.*

DE MOTU CORPORUM.  
LIBER PRIMUS.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XXII.

*Corporis in datâ trajectoryâ parabolicâ moti invenire locum ad tempus assignatum. (†).*

(†) Sit  $S$  umbilicus &  $A$  vertex principalis parabolæ, sitque  $4AS \times M$  æquale areæ parabolicæ abscindendæ  $APS$ , quæ radio  $SP$ , vel post excessum corporis de vertice descripta fuit, vel ante appulsum ejus ad verticem de-



rectæ  $Bh$ , parallela, ob similia triangula  $figh$ ,  $fAP$  erit.....  $fg:hg = Af:PA$  ob sim. tri.  $fgi$ ,  $fAQ$ ....  $gi:fg = QA:Af$  ob sim. tri.  $ghi$ ,  $AKM$ ....  $hg:gi = AK:AM$  ob sim. tri.  $AKL$ ,  $PAR$ ....  $AK:AL = PA:PR$  ob sim. tri.  $fQi$ ,  $fPh$ ....  $fh:fi = Ph:Qi$ ; sed ob sim. tri.  $fhi$ ,  $ALN$ ,  $fh:fi = AL:AN$ , ergo  $AL:AN = Ph:Qi$  &  $AL:AN = Ph:AL:Qi:AN$  & quia  $AL = Rh$  est  $AL:AN = PR:Qi$  —  $AN$  undè per compositionem rationum & ex æquo,  $AK:AN = QA \times AK:AM \times (Qi - AN)$  quare  $AK \times AM:AN \times AM = QA \times AK:AM \times Qi - AN$ , ac proinde  $AM:AN = QA:Qi - AN$ , adeoque  $AM:AN = QM$  seu  $QA + AM:Qi$  seu  $Qi - AN + AN$ . Quoniam igitur rectæ  $AN$ ,  $Qi$ , sunt parallelæ per constr. ) patet puncta  $M$ ,  $N$ ,  $i$ , esse in unâ rectâ, arque hæc est prima pars constructionis *Newtonianæ* quæ erat demonstranda.

2<sup>a</sup>. illius pars facile ostenditur. Nam (vid. fig. *Newton.*) junctâ  $Pi$ , erit (per constr.) triangulum  $PiE$ , super rectâ  $Ei$  constructum simile triangulo  $fig$ , ad cujus angulos  $i$  &  $g$ , ductæ sunt ex puncto  $E$ , rectæ  $Ei$ ,  $Eg$ ; quare (356), si per

punctum  $P$  agatur recta  $PQ$ , quæ cum rectâ  $Eg$ , contineat angulum  $PQE$  æqualem angulo  $fig$ , recta illa  $PQ$ , producta tanget angulum  $f$ , trianguli  $fig$ , seu trapezii  $fighi$ . Q. e. D.

(†) 358. *NEWTONUS* in hac tota sectione supponit corpus in trajectoryâ conicâ datâ itâ moveri, ut radiis ad trajectoryæ umbilicum ductis areas seu sectores describat temporibus proportionales; eâ enim lege planetas omnes in orbitis conicis revolvî ex phænomenis lib. 3<sup>o</sup>. ostendit. Præterea supponit notum esse tempus quo corpus ex puncto trajectoryæ dato v. g. ex vertice illius principali ad aliud ejusdem trajectoryæ punctum datum pervenit, datamque esse aream seu trajectoryæ sectorem huic tempori correspondentem, atque ex his datis quærit locum mobilis in trajectoryâ ad aliud quodvis tempus datum, aut contrâ quærit tempus quo mobile datum quodvis trajectoryæ punctum attingit; nam cum sint areæ temporibus proportionales, dato tempore quovis, datur area hoc tempore descripta, & vicissim datâ areâ descriptâ datur tempus quo describitur.

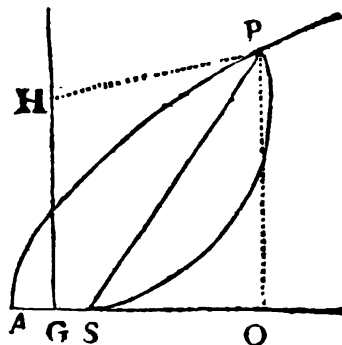
(†) \* Sit  $S$  umbilicus, &  $A$ , vertex principalis parabolæ, datumque sit tempus quo

K k 2 cor



DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

scribenda est. Innotescit quantitas  
areæ illius abscindendæ ex tempo-  
re ipsi proportionali. Biseca  $AS$  in  
 $G$ , erigeque perpendicularum  $GH$   
æquale  $\frac{3}{4} M$ , & circulus centro  $H$ ,  
intervallo  $HS$  descriptus secabit pa-  
rabolam in loco quæsito  $P$ . Nam,  
demissâ ad axem perpendiculari  $PO$   
& ductâ  $PH$ , (u) est  $AGq + GHq$



(= (x)  $HPq = AO - AG : quad. + PO - GH : quad.$ ) =  $AOq + POq$   
 $- 2GAO - 2GH \times PO + AGq + GHq$ . (y). Unde  $2GH \times$   
 $PO (= AOq + POq - 2GAO) = AOq + \frac{1}{4}POq$ . Pro  $AOq$   
 scribe  $AO \times \frac{POq}{4AS}$ ; & applicatis terminis omnibus ad  $\frac{3}{4}PO$  du-  
 ctisque in  $2AS$ , fiet  $\frac{2}{3}GH \times AS (= \frac{1}{3}AO \times PO + \frac{1}{3}AS \times PO$   
 $= \frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \times PO = \text{areæ } \overline{APO - SPO})$   
 $= \text{areæ } APS$ . Sed  $GH$  erat  $\frac{3}{4}M$ , & inde  $\frac{2}{3}GH \times AS$  est  $\frac{4}{3}AS$   
 $\times M$ . Ergo area abscissa  $APS$  æqualis est abscindendæ  $\frac{4}{3}AS$   
 $\times M$ . Q. E. D.

Co-

corpus in parabolâ motum, ut modò ex-  
 posuimus (358.) ex vertice  $A$  ad pun-  
 ctum  $P$ , aut ex puncto  $P$  ad vericem  $A$ .  
 pervenit, seu datum sit tempus quo sector  
 quilibet  $APS$  describitur.

(u) \* Est  $AG^2 + GH^2 = HP^2$ ;  
 nam  $AG = GS$ ,  $HP = HS = HA$ , & an-  
 gulus  $G$  rectus (per constr.) quare  $HA^2$   
 $= HP^2 = AG^2 + GH^2$ .

(x) \*  $HP^2 = AO - AG^2 + PO - GH^2$   
 Nam ex puncto  $H$ , ad rectam  $PO$  de-  
 missa intelligatur perpendicularis, hæc erit  
 æqualis ipsi  $GO = AO - AG$ , & pars  
 rectæ  $PO$  inter perpendicularem & pun-  
 ctum  $P$  intercepta æqualis erit  $PO - GH$ .

(y) \* Unde sublatis utrinque quadra-  
 tis  $AG^2 + GH^2$ , & addito utrinque re-  
 ctangulo  $2GH \times PO$ , est  $2GH \times PO$   
 $= AO^2 + PO^2 - 2GAO$ ; quoniam au-  
 tem in parabolâ latus rectum  $= 4AS = 3AG$ ,

est  $3AG \times AO$  five  $3GAO = PO^2$ , &  
 $2GAO = \frac{1}{3}PO^2$ , &  $PO^2 - 2GAO$   
 $= \frac{2}{3}PO^2$ . Cum verò sit  $4AS \times AO$   
 $= PO^2$ , adeoque  $4AS \times AO^2 = AO \times$   
 $PO^2$ , &  $AO^2 = \frac{AO \times PO^2}{4AS}$ , erit igi-

tur  $2GH \times PO = \frac{AO \times PO^2}{4AS} + \frac{3}{4}PO^2$ ,

& dividendo utrinque per  $\frac{3}{4}PO$ , fiet  $\frac{2}{3}GH$   
 $= \frac{AO \times PO}{12AS} + \frac{1}{4}PO$ , ductisque om-  
 nibus terminis in  $2AS$ , fiet  $\frac{2}{3}GH \times AS$

$= \frac{1}{6}AO \times PO + \frac{1}{2}AS \times PO =$   
 $\frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \times PO$

ob

# PRINCIPIA MATHEMATICÆ. 261

*Corol. 1.* Hinc  $GH$  est ad  $AS$ , ut tempus quo corpus descripsit arcum  $AP$  ad tempus quo corpus descripsit arcum inter verticem  $A$  & <sup>(a)</sup> perpendicularum ad axem ab umbilico  $S$  erectum.

*Corol. 2.* <sup>(b)</sup> Et circulo  $ASP$  per corpus motum  $P$  perpetuo transeunte, velocitas puncti  $H$  est ad velocitatem quam corpus

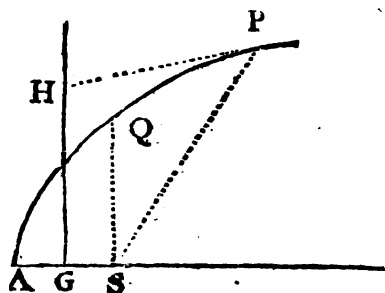
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

ob  $AS = AO - SO$  unde est  $3 AS = 3 AO - 3 SO$ . Verum  $\frac{4 AO \times PO}{6}$

seu  $\frac{2}{3} AO \times PO$ , est area parabolica  $APOA$ , (*Archimed. prop. 17. quadr. Parab. sup. Theor. IV. de Parab. pag. 133.*) &  $\frac{3 SO \times PO}{6}$  seu  $\frac{1}{2} SO \times PO$ ,

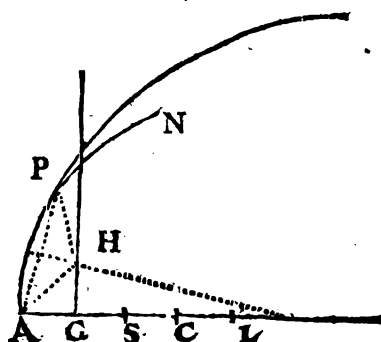
est area trianguli  $PSO$ , ergo area sectoris Parabolici  $APS$ , æqualis est  $\frac{4AO - 3SO}{6}$

$\times PO$ , quare  $\frac{4}{3} GH \times AS = \text{area APS}$ ; sed  $GH = 3 M$ , (*per constr.*) &c.



(a) \* Sit perpendicularum illud  $SQ$ , erit area  $ASP$ , ad aream  $ASQ$ , ut  $\frac{4}{3} GH \times AS$ , ad  $\frac{2}{3} AS \times SQ$  (*Theor. IV. de Par. p. 133.*), sed ex naturâ Parabolæ (*Vid. Cor. 2. Theor. I. de Par. p. 131.*)  $SQ$  æqualis dimidio lateri recto  $= 2 AS$ , ergo area  $ASP$  est ad aream  $ASQ$ , seu tempus per  $AP$  ad tempus per  $AQ$ , ut  $\frac{4}{3} GH \times AS$  ad  $\frac{2}{3} AS^2$ , hoc est, ut  $GH$  ad  $AS$ . Dato igitur tempore quo

describitur arcus  $AQ$ , & tempore quo describitur  $AP$ , per simplicem proportionem invenitur  $HG$ , & inde punctum  $P$  habetur.



(b) \* Jungatur  $AP$ , & ad medium ejus punctum  $q$ , erigatur perpendicularum  $qL$ , axem secans in  $L$ , & quoniam (*ex Dem.*) est semper  $HP = HA$ , ideoque est  $AP$  chorda circuli cujus centrum est  $H$ . Itaque (*per 1. 3<sup>1</sup>. Elem.*) perpendicularum illud  $qL$ , rectæ  $GH$ , occurrit in  $H$ ; & ob similitudinem triangularum  $LGH$ ,  $LqA$ , est  $GH : qA$  seu  $\frac{1}{2} AP = LG : Lq$ . Sumatur  $AC = 2 AS$  dimidio nempe lateris recti parabolæ & centro  $C$ , & intervallo  $CA$ , describatur circulus  $AN$ , hic parabolam osculatur in  $A$  (*241*); coeuntibus vero punctis  $P$  &  $A$ ,  $H$  &  $G$ , coeunt etiam  $L$  &  $C$ , fitque  $Lq = LA = CA = 2 AS = 4 GS$ , &  $LG = CG = 3 GS$ , atque arcus  $AP$  æqualis chordæ  $AP$ , (*Lem. VII.*); unde cum in proportionem superiori sit  $GH : \frac{1}{2} AP = LG : Lq$  erit in hoc casu  $GH : \frac{1}{2} AP = 3 GS : 4 GS$

Kk 3; hoc

## 262 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

De Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

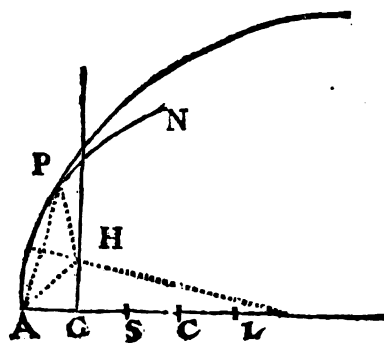
pus habuit in vertice  $A$  ut 3 ad 8 ; ideoque in eâ etiam ratione est linea  $GH$  ad lineam rectam quam corpus tempore motus sui ab  $A$  ad  $P$ , eâ cum velocitate quam habuit in vertice  $A$ , describere posset.

*Corol.* 3. Hinc etiam vice versâ inveniri potest tempus quo corpus descripsit arcum quemvis assignatum  $AP$ . Junge  $AP$  & ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ  $GH$  occurrens in  $H$ .

### L E M M A XXVIII.

*Nulla extat figura ovalis cujus area, rectis pro lubitu abscissa ; possit per æquationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri.*

(<sup>c</sup>) Intra ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta, uniformi cum motu, & interea in recta illa exeat punctum mobile de polo, pergat-



hoc est,  $GH : AP = 3 : 8$ . Verum ob motum æquabilem & æquidistantium per nascentes  $AP$ ,  $GH$ , velocitas puncti  $H$  in  $G$ , est ad velocitatem corporis  $P$  in  $A$  ut  $GH$  ad  $AP$ , & quoniam (*ex Dem.*) est semper  $\frac{4}{3} AS \times GH$  æqualis areæ  $AP S$ , &  $\frac{4}{3} AS$ , est quantitas

constans, erit semper  $GH$ , ut area  $AP S$ , hoc est, ut tempus quo punctum  $H$ , percurrit  $GH$ , estque proinde motus illius æquabilis & velocitas ubique eadem. Quare velocitas puncti  $H$ , est ubique ad velocitatem quam habet corpus  $P$  in  $A$ , ut nascentem  $GH$ , ad nascentem  $AP$ , hoc est, ut 3. ad 8. Q. e. D.

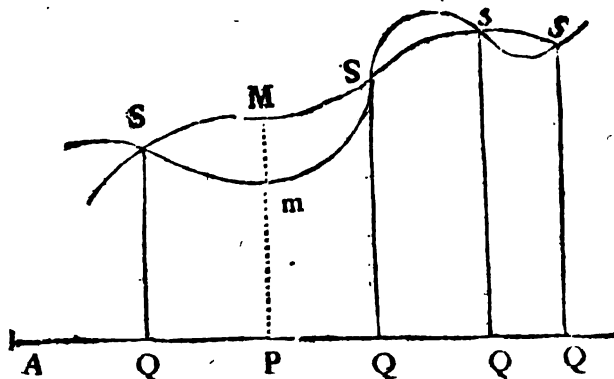
(<sup>c</sup>) 359. Intra ovalem  $ACBA$  detur punctum quodvis  $P$ , circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta infinita  $PS$ , uniformi cum motu, ita ut punctum datum  $A$  illius lineæ circuli  $Aa m X$  arcus æquales æqualibus temporibus describat, & interea in recta illâ  $PS$ , exeat punctum mobile  $p$  de polo  $P$ , pergatque semper in eadem recta  $PS$  cum velocitate quæ sit ut rectæ illius intra ovalem quadratum, hoc est, cum linea  $PS$  pervenit ad situm  $P f$ , & punctum mobile  $p$  ad  $p$ , velocitas puncti  $p$  sit ut quadratum rectæ  $P Q$  inter polum  $P$  & ovalem  $A Q C B$  contentæ, hoc motu punctum illud  $p$ , describet spiralem  $P p n Z$ , gyris infinitis,



DE MO- finitam inveniri possunt : & propterea rectæ cujuscvis positione  
TU COR- datæ intersectio cum spirali inveniri etiam potest per æquatio-  
NEM. nem finitam. Atqui recta omnis infinite producta spiralem se-  
LIBER cat in punctis, numero infinitis, & (e) æquatio, quâ intersec-  
PRIMUS. tio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum intersectio-  
nes omnes radicibus totidem, ideoque ascendit ad tot dimen-  
siones

eà ex naturâ ovalis A Q C B, datur alia æquatio inter PH & QH, inveniuntur ergò quatuor æquationes finitæ quæ simul quinque tantum variables, nimirum Pp, PF, pF, PH, QH continent, quæque proinde ad unicam æquationem finitam poterunt reduci in quâ duæ tantum variables PF, pF reperientur, adeoque per hanc æquationem finitam omnia spiralis puncta inveniri poterunt, & propterea rectæ cujuscvis S p positione datæ intersectio p

cum spirali inveniri etiam poterit per æquationem finitam; cum enim duæ rectæ Sp, SB positione datæ sint, linea SP magnitudinæ & triangulum SPF specie dantur, & hinc datur ratio lineæ SF seu SP  $\mp$  PF ad Fp, & nova invenitur æquatio inter PF & Fp; per hanc igitur æquationem & per alteram quæ ad spiralem est, determinabuntur PF, & Fp, punctumque intersectionis p invenietur per æquationem finitam.



(e) 362. Lineæ duæ SMS, Sm s se mutuo interfecantes in punctis S, s ad eandem rectam A Q positione datam referantur, sintque A Q, A P abscissæ communes, & QS, PM, Pm ad eas ordinatæ; quoniam in communibus linearum SMs, Sm s, intersectionibus S, s, ordinatæ PM, Pm sunt æquales, si in duabus ad lineas SMs, Sm s æquationibus, manente abscissâ communi, loco ordinarum PM, Pm, eadem scribatur littera, v. gr. y, & deinde ex illis æquationibus eliminetur littera quæ abscissam communem exprimit, obtinebitur æquatio ex solâ y, & constantibus composito. Porro hæc ultima æquatio non magis primam ordinatam communem S Q,

seu primam intersectionem S, quam secundam aut tertiam &c. determinabit, cum sit eadem omnium lex & conditio idemque calculus; hæc igitur æquatio debet omnes communes ordinatas QS, omnesque intersectiones S, simul complexi & indifferenter exhibere, & ita tot radices seu ipsius y valores reddere quot sunt communes ordinatæ seu intersectiones, æquatio autem tot dimensiones habet quot radices; Si itaque linearum SMs, Sm s, intersectiones S, s, sunt numero finitæ, æquatio quoque quæ illas determinat finita est; at si fuerint intersectiones numero infinitæ, erit æquatio numero dimensionum & radicum infinita.

fiones quot sunt interfectiones. Quoniam circuli duo se mutuo DE MO-  
secant in punctis duobus, interfectio una non invenietur nisi per TU COR-  
æquationem duarum dimensionum, quâ interfectio altera etiam PORUM.  
inveniat. (f) Quoniam duarum sectionum conicarum qua- LIBER  
tuor esse possunt interfectiones, non potest aliqua earum gene- PRIMUS.  
raliter inveniri nisi per æquationem quatuor dimensionum, quâ  
omnes simul inveniantur. Nam si interfectiones illæ seorsim quæ-  
rantur, quoniam eadem est omnium lex & conditio, idem erit  
calculus in casu unoquoque, & propterea eadem semper conclu-  
sio, quæ igitur debet omnes interfectiones simul complecti &  
indifferentiter exhibere. Unde etiam interfectiones sectionum co-  
nicarum & curvarum tertiæ potestatis, eo quod sex esse pos-  
sunt, simul prodeunt per æquationes sex dimensionum, & in-  
terfectiones duarum curvarum tertiæ potestatis; quia novem esse  
possunt, simul prodeunt per æquationes dimensionum novem.  
(g) Id nisi necessario fieret, reducere liceret, problemata omnia  
solida ad plana, & plusquam solida, ad solida. (h) Loquor hic  
de

(f) \* Exempli causâ. Sint  $ap + px = yy$ , &  $bx - xx = yy$ , æquationes ad pa-  
rabolam & circulum, & invenietur  $x =$   
 $yy - ap$ , &  $bxy - bap$   $y^4 + 2apyy - aapp$

$\frac{p}{p^2}$ , &  $\frac{p}{p^2}$   $\frac{p^2}{p^2}$   
 $= yy$ , æquatio quatuor dimensionum,  
quoniam quatuor esse possunt parabolæ &  
circuli interfectiones. Sint  $ap^2 + p^2 x$   
 $= y^3$ , &  $bx - xx = y^2$  æquationes ad  
parabolam 3<sup>m</sup>. potestatis & ad circulum,  
erit  $x = \frac{y^3 - ap^2}{p^2}$  &  $\frac{bys - bap^2}{p^2}$

$\frac{y^6 + 2ap^2y^3 - a^2p^4}{p^2} = yy$  æquatio sex

dimensionum quod esse possint intersec-  
tiones sex, & ita de cæteris. Generatim ve-  
ro tot esse possunt curvarum duarum inter-  
fectiones quot sunt unitates in facto ex  
potestatis curvæ unius indice seu exponen-  
te in alterius exponentem; index autem  
potestatis curvæ idem est cum numero di-  
mensionum æquationis ad illam curvam.

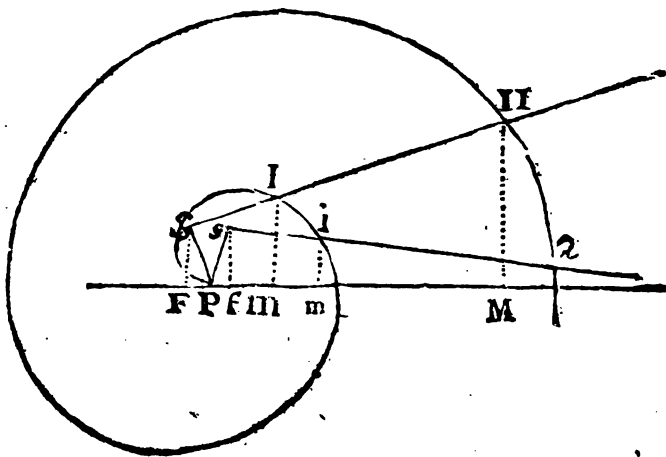
(g) \* Nam in solidorum problematum  
construcone duæ adhibentur sectiones co-

nicae quarum interfectiones; seu ordinatæ  
duabus coni sectionibus communes, pro-  
blematis solutionem seu ultimæ æquatio-  
nis radices suppeditant. Quare si hujus-  
modi interfectiones vel ordinatæ commu-  
nes generaliter possent per æquationem  
quadraticam inveniri, problemata solida  
per æquationes duarum dimensionum sol-  
vi ac construi possent, atque ita ad plana  
reducerentur, eademque ratione plus quam  
solida ad solida, indeque ad plana revo-  
carentur.

(h) Nonnunquam proposita ad curvam  
æquatio ad inferiorem potestatem aut in  
duas æquationes inferioris potestatis re-  
solvitur potest. Sic æquatio  $ax^3 - a^2x^2 -$   
 $bx^2y + axy^2 + abxy - by^3 = 0$  resol-  
vi potest in duas  $xx - ax + yy = 0$ , &  $ax$   
 $= by = 0$  quarum prior est ad circulum,  
posterior ad parabolam. Parabolæ autem  
& circuli cum lineâ quavis interfectiones  
per calculos diversos seorsim inveniri pos-  
sunt.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

de curvis potestate irreducibilibus. Nam si æquatio, per quam curva definitur, ad inferiorem potestatem reduci possit: curva non erit unica, sed ex duabus vel pluribus composita, quarum intersectiones per calculos diversos seorsim inveniri possunt. Ad eundem modum intersectiones binæ rectarum & sectionum conicarum prodeunt semper per æquationes duarum dimensionum, ternæ rectarum & curvarum irreducibilium tertix potestatis per æquationes trium, quaternæ rectarum & curvarum irreducibilium quartæ potestatis per æquationes dimensionum quatuor, & sic in infinitum. Ergo rectæ & spiralis intersectiones numero infinitæ, cum curvâ hæc sit simplex & in curvas plures irreducibilis, requirunt æquationes numero dimensionum & radicum infinitas, quibus intersectiones omnes possunt simul exhiberi. Est enim eadem omnium lex & idem calculus. (i) Nam si à polo in rectam illam secantem demittatur perpendiculum, & perpen-



(i) \* Sic polus P, secans SI, II; ad eam ex polo normalis Ps, intersectio prima in i, secunda in II, &c. circa polum P, revolvatur perpendiculum Ps, apud cum secante SI, II ad illud semper normali, ubi perpendiculum pervenit ad situm Ps, & secans SI, II ad situm si 2, intersectio prima: I, percurso arcu I i,

pervenit ad i; & post integram revolutionem cum si 2, redit ad situm SI, II, prima intersectio I, seu i, pervenit ad II, & fit secunda, & post duas revolutiones fit tertia & sic deinceps. Ex punctis S, s, ad rectam PM infinitam & positione datam demittantur perpendiculara SF, sf; manente secantis SI, II, positione,

diculum illud unà cum secante revolvatur circa polum, inter-  
 sectiones spiralis transibunt in se mutuo, quæque prima erat seu  
 proxima, post unam revolutionem secunda erit, post duas ter-  
 tia, & sic deinceps: nec interea mutabitur æquatio nisi pro mu-  
 tatâ magnitudine quantitatum per quas positio secantis determi-  
 natur. Unde cum quantitates illæ post singulas revolutiones re-  
 deunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam pri-  
 mam, ideoque una eademque exhibebit intersectiones omnes,  
 & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes  
 exhiberi possunt. Nequit ergo intersectio rectæ & spiralis per  
 æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla extat  
 ovalis cujus area, rectis imperatis abscissa, possit per talem æqua-  
 tionem generaliter exhiberi.

(<sup>k</sup>) Eodem argumento, si intervallum poli & puncti, quo spi-  
 ralis describitur, capiatur Ovalis perimetro abscissæ proportio-  
 nale, probari potest quod longitudo perimetri nequit per finitam  
 æqua-

tione; constantes sunt rectæ  $SF, FP$ ;  $SP$ , quibus illa positio determinatur, & demissâ ex  $I$  ad  $PM$  perpendiculari  $Im$  datur æquatio aliqua inter  $Pm$  vel  $Im$  & datas  $SP, FP, SF$ , quâ intersectio  $I$  exhibetur; ubi verò secans  $SIII$ , pervenit ad situm  $siz$ , manente secantis  $siz$  positione, datur æquatio inter  $im$  vel  $Pm$  & datas  $sP$ , seu  $SP, Pf, sf$ , & æquatio hæc à priori diversa non est, nisi ratione quantitatum  $FPFS$ , quæ mutatz sunt in  $fP, fs$ , per quas secantis  $siz$ , positio determinatur, cum utraque æquatio in situ  $SIII$ , & situ  $siz$ , ab æquatione ad spiralem quæ eadem semper manet & ab æquatione secantis positionem determinante diducantur. Quoniam igitur lineæ  $fs, fP$  post primam revolutionem ac proinde post singulas redeunt ad magnitudines pri-

mas  $FS, FP$  intersectione primâ in se eundam transeunte, secundâ in tertiam, & sic deinceps, æquatio inter  $IIM$ , vel  $PM$ , & datas  $PF, PS, SF$ , redibit ad formam primam quam habebat æquatio inter  $Im$ , vel  $Pm$ , & easdem datas quantitates  $PF, PS, SF$ , adeoque una eademque æquatio exhibebit intersectiones omnes  $I, II$ , &c. seu valores  $Im, IIM$ , &c. propterea radices exhibebit numero infinitas quibus omnes exhiberi possunt.

(<sup>k</sup>) \* Eâ enim ratione spiralis describetur gyris infinitis ad quam proinde æquatio erit numero dimensionum infinita; quæ quidem finita deberet esse, si longitudo perimetri ovalis pro lubitu abscissæ seu intervallum puncti spiralem describentis & poli, per finitam æquationem generaliter exhiberi posset.

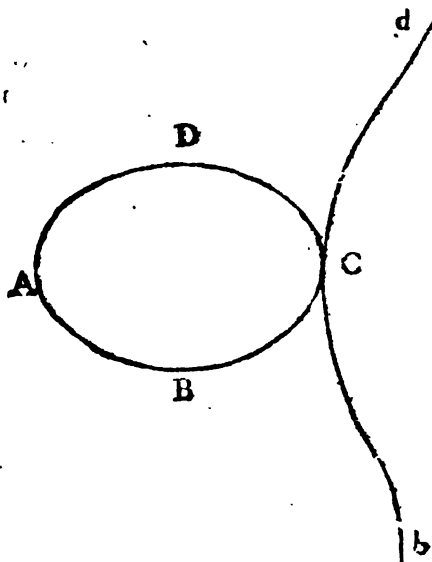


DE MO-æquationem generaliter exhiberi. <sup>(1)</sup> De ovalibus autem hic  
TU COR- loquor quæ non tanguntur à figuris conjugatis in infinitum per-  
FORUM. gentibus.

LIBER  
PRIMUS.

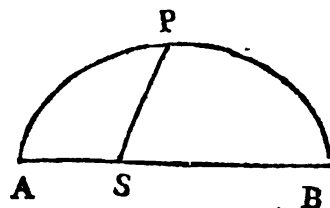
*Corollarium.*

(<sup>m</sup>) Hinc area ellipseos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto describitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam; & propterea per descriptionem curvarum geometricè rationalium determinari nequit. Curvas geometricè rationales appello quarum puncta omnia per longitudines æquatio-



(1) \* Ovalem ABCD tangat in C curva conjugata bCd, cujus rami Cb, Cd in infinitum pergant, pro hujusmodi ovalibus non valet NEWTONI demonstratio. Supponit enim circa punctum datum in ovali perpetuò revolvi lineam rectam uniformi cum motu quæ sit ad peripheriam ovalis terminata, & abscindat areas sibi proportionales; si autem ovalis tangatur à figurâ conjugatâ bCd, cujus rami in infinitum pergunt, evidens est lineâ rectâ ipsâ ovalem revolventē non percurri to-

tam novæ hujus figuræ aream, nec gyris perpetuis ac infinitis simplicem spiralem describi.



(<sup>m</sup>) 363. Sit Ellipseos APB, axis AB, umbilicus S, radius vector SP, dataque sint totius Ellipsis area & tempus periodicum, sique tempus periodicum ad tempus per arcum AP, ita area totius ellipseos ad aream sectoris APS, obtinebitur æquatio inter aream APS, & tempus quo illa describitur. Unde si postea inveniri posset æquatio finita inter aream indefinitam APS & radium vectorem SP ac datas quantitates, inveniretur quoque æquatio finita inter tempus per arcum quemvis AP, & radium vectorem SP, qui ita ex dato tempore per æquationem finitam prodiret; Et viceversâ, si ex tempore quo arcus AP describitur, radii vectoris SP longitudo per æquationem finitam posset determinari, ope hujus æquationis & superioris proportionis inter tempora & areas obtineretur æquatio finita inter aream quamlibet ASP & radium vectorem SP ac datas quantitates; quod impossibile esse demonstratum est; & propterea longi-

tu;

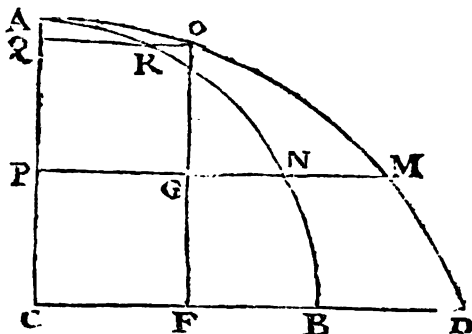
tionibus definitas, id est, per longitudinum rationes complicatas, determinari possunt; cæterasque (ut spirales, quadratrices, trochoides) geometricè irracionales. Nam longitudines quæ sunt vel non sunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo elementorum) sunt arithmeticè rationales vel irracionales. Aream igitur ellipseos tempori proportionalem abscindo per curvam geometricè irracionalem ut sequitur.

DE MOTU  
CORPORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

PRO-

tudo (ac proinde positio quæ ex longitudine data est) radii vectoris  $SP$ , per descriptionem curvarum geometricè rationalium determinari nequit. Sunt autem curvæ geometricè rationales in quibus ordinarum & abscissarum rectarum relatio æquatione finitâ exprimi potest, quarumque proinde puncta omnia per harum rectarum linearum rationes complicatas determinari possunt. Si in æquatione ad curvam  $ax + by + cz = 0$  numerus terminorum finitus sit & exponentes  $m, n$ , rationales fuerint, curva erit geometricè rationalis contra si numerus terminorum infinitus fuerit, & summari nequeant, aut si exponens aliquis irrationalis fuerit, curva est geometricè irrationalis.

364. Circuli (adeoque & Ellipsis) quadraturam seu rectificationem indefinitam finitâ æquatione exhiberi non posse demonstravit Saurinus in Commentariis Parisiensibus an. 1720. illius demonstrationem ut potè facilem & brevem referemus. Sit quadrans circuli  $CAB$ , & ex puncto quovis  $N$  arcus  $AB$  demittatur ad radium  $AC$  perpendicularis  $NP$ , demonstrandum est arcus  $AN$ , & rectarum  $AP, PN$  relationem nullâ æquatione finitâ posse exprimi. Descripta intelligatur curva  $AOMD$  cujus hæc sit natura ut recta  $MP$  ex puncto quovis  $M$  ad radium  $AC$  perpendiculariter demissa, sit æqualis arcui abscisso  $AN$ ; ope curvæ  $AOMD$  arcus  $AN$  in ratione quavis datâ rectæ  $PG$  ad  $PM$  dividi potest in  $R$ ; nam si per punctum  $G$  agatur recta  $Go$ , ipsi  $PM$  normalis & curvæ  $AOMD$  occurrens in  $o$ , atque ex puncto  $o$ , ducatur ad  $A$   $C$  perpendicularis  $oQ$  arcum  $AN$  secans in  $R$ , erit  $AR = Qo$ , adeoque  $AR : AN = PG : PM$ . Verùm demonstravit Clariss. Hospitalius art. 443. lib. 10. Sectionum Conicarum,



quod si arcus  $AN$  sit in partes æquales dividendus quarum una sit  $AR$ , æquatio quâ determinatur partis unius Chorda  $AR$ , tot dimensiones obtinet quot sunt in arcu  $AN$ , partes æquales, atque adeò si dividendus sit arcus  $AN$  in ratione indefinitâ rectæ  $PG$  ad  $PM$ , æquatio illa finitâ esse nequit. Ergò curva  $AOMD$ , quâ arcus quilibet  $AN$  in ratione quavis  $PG$  ad  $PM$  per eandem semper constructionem dividitur geometricè, rationalis non est; sed si arcus  $AN$  & rectarum  $AP, PN$  relatio posset æquatione finitâ exprimi, eadem æquatio exhiberet quoque relationem abscissæ  $AP$  ad ordinatam  $PM$ , ac proinde curva  $AOMD$  esset geometricè rationalis. Ergò rectificatio arcus  $AN$ , æquatione finitâ generaliter exhiberi non potest. Q. E. D.

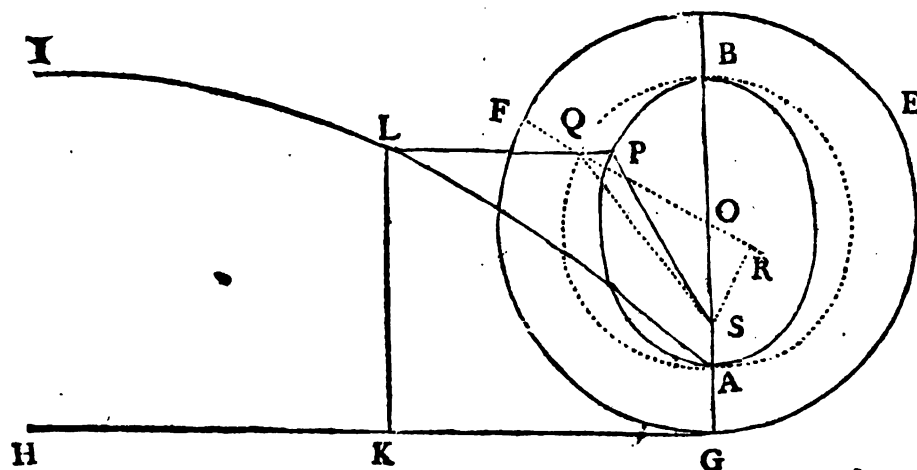
365. Hinc patet curvas omnes quarum descriptio pender à quadraturâ vel rectificatione circuli & ovalium indefinitâ, quales sunt spirales, quadratrices, trochoides esse geometricè irracionales. Ex demonstratis autem minimè sequitur, circuli & ovalium quadraturam vel rectificationem determinatam seu quadraturam vel rectificationem totius ovalis aut portionis illius determinatæ impossibilem esse.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

## PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XXIII.

*Corporis in datâ trajectoriaâ ellipticâ moti invenire locum ad tem-  
pus assignatum.*

Ellipseos  $APB$  sit  $A$  vertex principalis,  $S$  umbilicus, &  $O$  centrum, sitque  $P$  corporis locus inveniendus. Produc  $OA$  ad  $G$ , ut sit  $OG$  ad  $OA$  ut  $OA$  ad  $OS$ . Erige perpendiculum  $GH$ , centroque  $O$  & intervallo  $OG$  describe circulum  $GEF$ , & super regula  $GH$ , ceu fundo, progrediatur rota  $GEF$  revolvendo circa axem suum, & interea puncto suo  $A$



describendo trochoidem  $ALI$ . Quo facto; cape  $GK$  in ratione ad rotæ perimetrum  $GEFG$ , ut est tempus, quo corpus progrediendo ab  $A$  descripsit arcum  $AP$ , ad tempus revolutionis unius in ellipsi. Erigatur perpendiculum  $KL$  occurrens trochoidi in  $L$ , & acta  $LP$  ipsi  $KG$  parallela occurret ellipsi in corporis loco quæsito  $P$ .

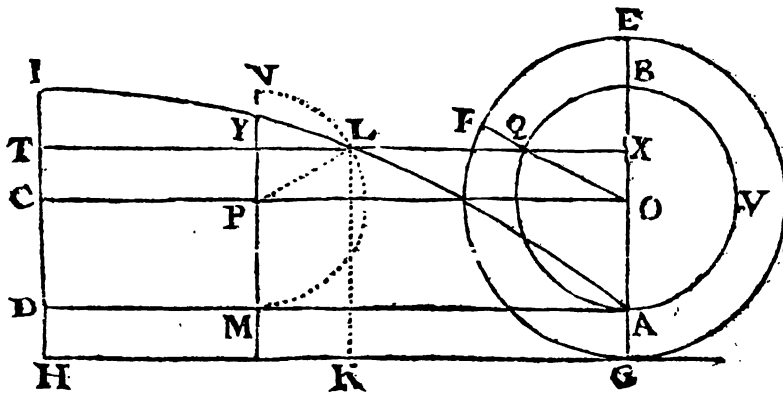
Nam centro  $O$ , intervallo  $OA$  describatur semicirculus  $AQB$ , & arcui  $AQ$  occurrat  $LP$  si opus est producta in  $Q$ , junganturque  $SQ$ ,  $OQ$ . Arcui  $EF$  occurrat  $OQ$  in  $F$ , & in  
can-

eandem  $OQ$  demittatur perpendicularum  $SR$ . (n) Area  $APS$ , De Mo-  
est ut area  $AQS$ , id est, ut differentia inter sectorem  $OQA$  & triangulum  $OQS$ , five ut differentia rectorum  $\frac{1}{2} OQ$   
 $\times AQ$  &  $\frac{1}{2} OQ \times SR$ , hoc est, ob datam  $\frac{1}{2} OQ$ , ut differen-  
tia inter arcum  $AQ$  & rectam  $SR$ , ideoque (cum (p) eadem  
sint datæ rationes  $SR$  ad sinum arcus  $AQ$ ,  $OS$  ad  $OA$ ,  $OA$   
ad  $OG$ ,  $AQ$  ad  $GF$ , & divisim (q)  $AQ - SR$  ad  $GF -$   
sinu arcus  $AQ$ ) ut  $GK$  differentia inter arcum  $GF$  & sinum  
arcus  $AQ$ . Q. E. D.

(n) 366. Area  $APS$  est ut area  $AQS$   
(251) sed area  $AQS$  æqualis est differen-  
tia inter sectorem  $OQA$  & triangulum  
 $OQS$ , sector verò  $OQA = \frac{1}{2} OQ \times AQ$ ,  
& triangulum  $OQS = \frac{1}{2} OQ \times SR$ . Er-  
gò ob datam  $\frac{1}{2} OQ$ , area  $AQS$  adæ-  
que & area  $APS$  est ut differentia in-  
ter arcum  $AQ$  & rectam  $SR$  ex foco  $S$   
in radium  $OQ$  perpendiculariter demissam.

(p) 367. Si ex puncto  $Q$  ad diame-  
trum  $AB$ , demittatur perpendicularum seu  
sinus arcus  $AQ$ , triangulum  $OSR$ , simi-

le erit triangulo contento sub radio  $OQ$   
sinu & cosinu arcus  $AQ$ ; unde erit  $SR$   
ad sinum arcus  $AQ$ , in datâ ratione  $OS$   
ad  $OQ$  seu  $OA$ ; sed (per constr.)  $OS$  :  
 $OA = OA : OG$ , &  $OA$  ad  $OG$  ut  
arcus  $AQ$  ad arcum  $GF$ , & divisim  $AQ$   
—  $SR$  est ad  $GF$  — sinu arcus  $AQ$  ut  $SR$   
ad sinum arcus  $AQ$ , five in datâ ratione  
 $OS$  ad  $OA$ . Est igitur differentia inter  
arcum  $AQ$ , & rectam  $SR$ , adæque &  
area  $APS$ , ut differentia inter  $GF$ , &  
sinum arcus  $AQ$ .

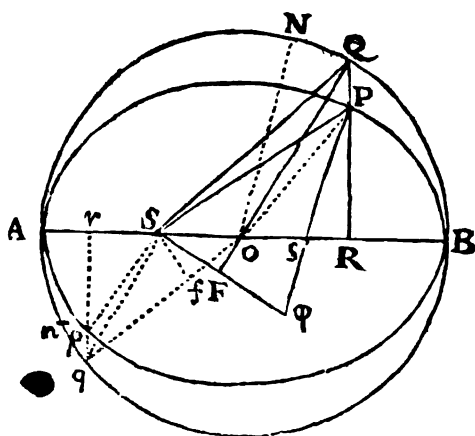


(q) Quod autem sit  $GK$  æqualis dif-  
ferentia inter arcum  $GF$  & sinum arcus  
 $AQ$  facile est demonstrare. Sit enim  
 $AL$  dimidia trochois semirevolutione  
notæ  $GFE$  descripta, erit  $GH$ , æqualis

semiperipheriæ  $CFE$ , &  $HT$  æqualis &  
parallèla rectæ  $GB$ ; Per puncta  $A$ ,  $O$ ,  
 $E$  agantur rectæ  $AD$ ,  $OC$ ,  $XT$  parallèle  
& æquales rectæ  $GH$ , & trochois descripta  
intelligatur duplici motu circuli  $A.VBQ$ ,  
al-

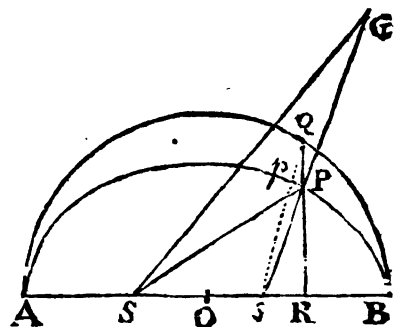




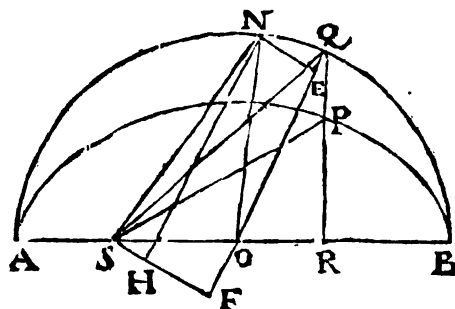


his angulis  $PSB, SQO, NOQ$  quibus etiam quam proximè æqualis est angulus  $PsB$ , nam coeuntibus focis  $S$  &  $s$  cum centro  $O$ , puncta  $Q$  &  $P$  etiam coeunt & angulus  $SP O$  angulo  $SQ O$  est quàm proximè æqualis; pariter ut  $QO$  proximè coincidit cum  $PO$  fingatur  $SF$  esse perpendicularem in ipsam  $PO$ , & produci donec cum  $P s$  producto in  $\phi$  concurrat, erunt quam proximè  $OF, s\phi$  parallelæ, ideoque ob æquales  $SO, Os$ , æquales erunt  $SF \& F\phi, SP \& P\phi$ , ut & anguli  $SPF \& F\phi\phi$  five  $OPs$ , sed ob  $SF$  æqualem  $QN$  &  $SQ$  five  $SP$  prope æqualem  $OQ$  est angulus  $SPF$  five  $OPs$  prope æqualis angulo  $NOQ$ : ergo totus angulus  $SPs$  est æqualis angulis  $SQO$  &  $NOQ$  simul sumptis, & cum angulus  $PsB$  sit æqualis angulis  $PSB$  &  $SPs$ , æqualis prope erit angulis  $PSB, SQO, NOQ$  sicut angulus  $NOB$ , ergo angulus  $PsB$  est quàm proximè anomalia media cujus anomalia coæquata est  $PSB$ .

Dato autem angulo  $BsP$ , angulum  $PSB$ , ita quærit *Wardus*. Producatur  $sP$ , ad  $G$ , ut fit  $PG = PS$ , & jungatur  $SG$ , erit  $sG = SP + Ps = AB$  (*ex nar. Ellips.*) adeoque in triangulo  $GsS$ , datis lateribus  $Gs, Ss$ , angulo  $SsG$  dantur anguli  $SGs (= GSP, ob SP = PG)$  &  $CSs$ , undè cognoscetur angulus  $PSs$  five  $PSB$  æqualis nempe differentię angulorum  $Gss, GSP$ , quare in triangulo  $SPs$ , datis angulis duobus  $PsS, PSs$ , angulo  $SPs$ , qui est summa angulorum  $GSP, SG P$ , & latere  $Ss$ , invenietur latus  $SP$  seu intervallum.



Ubi excentricitas paulo major est, *Wardi* methodum ita corrigit *Bullialdus*. Per punctum  $P$  *Wardi* methodo determinatum agatur  $QR$  axi  $AB$  normalis, & excentrico occurrens in  $Q$ , jungaturque  $sQ$  orbitam secans in  $p$ , erit  $p$ , locus planeræ accuratior.

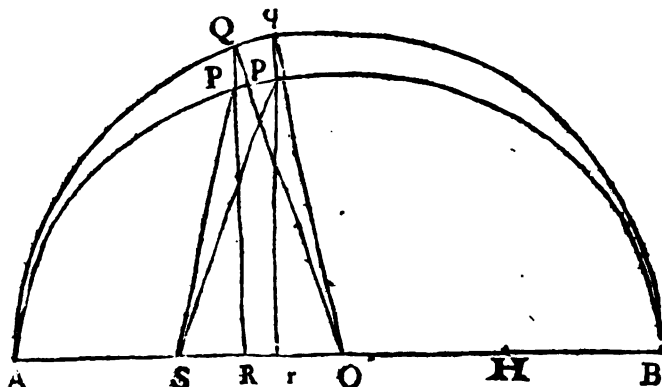


*Methodus Cassini.* Omnibus positis (ut supra num. 369.) jungantur  $SN, ON$  & agantur  $NH$  rectæ  $QF$  parallela & lineæ  $SF$  occurrens in  $H$ , &  $NE$  parallela  $SF$  rectæ  $QF$  occurrens in  $E$ , erit  $NE = HF$  finis arcus  $NQ$ ; cumque fit  $SF = NQ$  (369) erit  $SH$  differentia inter arcum  $NQ$  & ipsius finem  $NE$ ; si excentricitas  $SO$  exigua fuerit erit fere  $NQ = NE = HF = SF$  & proinde  $SN$  parallela  $FQ$ , adeoque angulus  $SNO$ , æqualis angulo  $NOQ$ ; Porro in triangulo  $SNO$ , datis duobus lateribus  $NO, SO$ , & angulo intercepto  $SON$  (complemento nempe anomalie mediæ datæ ad duos rectos) invenietur angulus  $SNO$  seu  $NOQ$ , & ipsius mensura nempe arcus  $NQ$ ; & inde innotescet anomalia excentri  $BQ$ ; Hinc in triangulo  $SQO$ , datis lateribus  $SO, OQ$  & angulo  $SOQ$ , invenietur

*Scholium.*

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

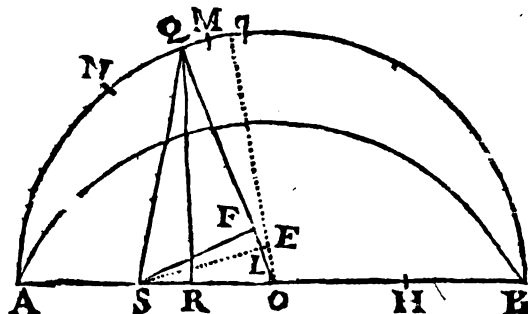
(<sup>r</sup>) Cæterum, cùm difficilis sit hujus curvæ descriptio; præstat solutionem vero proximam adhibere. Inveniatur tum angulus quidam  $B$ , qui sit ad angulum graduum  $57.29578$ , quem



arcus radio æqualis subtendit, ut est umbilicorum distantia  $SH$  ad ellipseos diametrum  $AB$ ; tum etiam longitudo quædam  $L$ , quæ sit ad radium in eâdem ratione inversè. Quibus semel inven-

angulus  $QSO$ , & sumptâ  $SR$  pro sinu toto, erit  $QR$  ad  $PR$  seu axis major ad minorem, ut tangens anguli dati  $QSB$  ad tangentem anguli ad solem  $PSB$ , qui ita obtinebitur.

Hæc satis sunt in orbitis planetarum non valde excentricis, sed in orbitis Mercurii & Martis quarum major est excentricitas ita invenitur arcus  $NQ$ . Ex datis in triangulo  $SNO$ , lateribus  $SO, NO$ , & angulo  $SON$ , inveniuntur latus  $SN$ , & angulus  $SNO$ ; deindè quæritur in partibus decimalibus radii  $ON$  differentia inter arcum qui metitur angulum  $SNO$ , & ejus sinum quæ citrà errorem sensibilem supponi potest æqualis rectæ  $SH$ , seu differentiæ inter arcum  $NQ$  anguli  $NOQ$  mensuram & ejus sinum  $NE$ . Sitque ille decimalium numeri  $A$ . Invenietur numerus decimalium radii  $SN$  quem eadem linea  $SH$  continet dicendo ut  $SN$  ad  $NO$  sic  $A$  ad numerum quæsitum  $B$ , & quoniam in triangulo rectangulo  $SHN$  est  $SN$  ad sinum totum ut  $SH$  sive  $B$  ad sinum anguli  $SNH$ , invenietur ergò angulus  $SNH$ , ex angulo invento  $SNO$  subducendus, ut relinquatur angulus  $HNO$ , seu æqualis  $NOQ$ , sive arcus  $NQ$ .



(<sup>r</sup>) 373. Sit axis major ellipseos  $AB$ , centrum  $O$ , umbilici  $S$  &  $H$ , & feratur planeta à perihelio  $A$  ad aphelium  $B$ , radio  $AO$  describatur circulus excentricus  $AQB$ ; quoniam radius circuli æqualis est arcui graduum  $57.29578$ , si fiat  $AB$  ad  $SH$  seu  $QO$  ad  $SO$ , ut arcus vel angulus  $57.29578$ , ad arcum  $B$ , erit  $B$  arcus æqualis rectæ  $SO$ . Cognoscitur arcus  $AN$  tempore proportionalis, & dicatur  $N$ ; deinde per methodum *Wardi* aut *Cassini*, vel aliâ ratione inveniamur arcus

$MM$  2  $AQ$ ,





pus revolutionis unius in ellipfi. Sit angulus iste N. Tum capiatur & angulus D ad angulum B, ut est sinus iste anguli  $AOQ$  ad radium, & angulus E ad angulum  $N - AOQ + D$ , ut est longitudo L ad longitudinem eandem L cosinu anguli  $AOQ$  diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Postea capiatur tum angulus F ad angulum B; ut est sinus anguli  $AOQ + E$  ad radium, tum angulus G ad angulum  $N - AOQ - E + F$  ut est longitudo L ad longitudinem eandem cosinu anguli  $AOQ + E$  diminutam ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Tertiâ vice capiatur angulus H ad angulum B, ut est sinus anguli  $AOQ + E + G$  ad radium; & angulus I ad angulum  $N - AOQ - E - G + H$ , ut est longitudo L ad eandem longitudinem cosinu anguli  $AOQ + E + G$  diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Et sic pergere licet in infinitum. Denique capiatur angulus  $AOq$  æqualis angulo  $AOQ + E + G + I + \&c.$  Et (f) ex cosinu

DE MOTU CORP. LIBER PRIMUS.

Sed OE, est ferè æqualis OF, ergò  $OQ - OF : OQ = QM : Qq$ . Porro  $OQ$ , est ad RO, seu radius ad cosinum anguli  $AOQ$ , ut  $SO$ , ad OF, adeoque  $OQ = \frac{SO \times \cos. AQ}{R}$ . Crescentibus AN,

AQ, QR, decrefcit RO, & evanescit ubi AQ est circuli quadrans, ac tandem fit negativa ubi AQ quadrante major est. Quare cum fit  $+OQ : +SO = RO : OF$ , OF idem signum + vel - habere debet cum RO, adeoque si angulus  $AOQ$ , seu arcus AQ est quadrante minor, OF est quantitas affirmativa; Si AQ quadrans est, OF evanescit; Si AQ est quadrante major, OF fit negativa. Est igitur  $OQ = \frac{SO \times \cos. AQ}{R}$ :

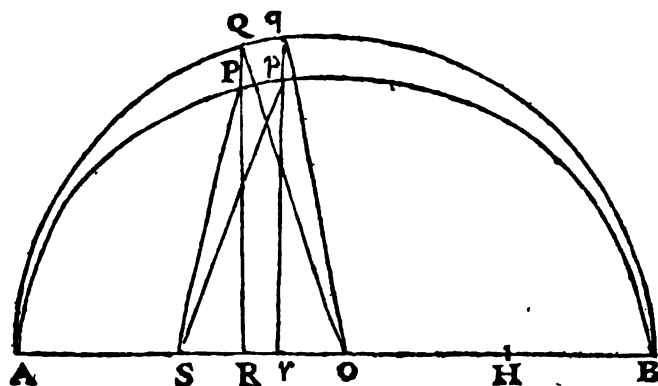
$OQ = QM : Qq$ , seu ob  $QO = \frac{SO \times L}{R}$ , est  $\frac{SO \times L - SO \times \cos. AQ}{R} : \frac{SO \times L}{R}$ , si-

ve  $L - \cos. AQ : L = QM : Qq$ , si fuerit AQ minor quadrante, &  $L + \cos. AQ : L = QM : Qq$ , si fuerit AQ major quadrante. Est autem arcus  $QM = AN - AQ + NM = N - AQ + D$ , quare si

arcus  $Qq$ , dicatur E, erit  $E : N - AQ + D = L : L \mp \cos. AQ$  &  $AQ + E$ , erit æqualis Aq; invento itaque E per ultimam proportionem, si loco AQ capiatur arcus accuratior Aq, seu angulus  $AOQ + E$ , & instituatur processus priori similis, capiendò arcum F, ad arcum B, ut est sinus arcus  $AQ + E$  seu Aq ad radium, & arcum G ad arcum  $N - AQ + F$ , seu  $N - AQ - E + F$ , ut est longitudo L, ad longitudinem eandem cosinu anguli  $AOq$  seu  $AOQ + E$  diminutam ubi angulus  $AOq$  recto minor est, auctam ubi major, erit  $AQ + E + G$ , seu Aq + G, arcus magis verus, & similiter si loco arcus Aq, usurpetur arcus Aq + G & idem repetatur processus, inveniatur novus arcus  $AQ = E + G + I$ , seu Aq + G + I, accuratior arcu Aq + G, & sic pergere licet in infinitum & quantumvis proximè ad veritatem accedere.

(f) \* Ex cosinu Or. Est enim radius ad cosinum anguli inventi  $AOq$ , ut  $qO$  ad Or, inveniuntur ergò punctum r, & ordinata q r. Deinde si fiat ut axis major ad minorem, ita q r ad p r, habebitur locus corporis p.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.



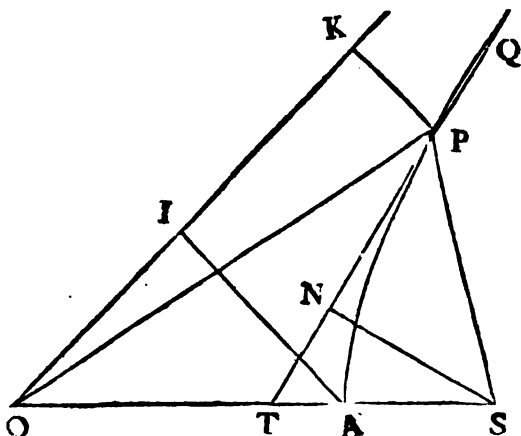
finu ejus  $Or$  & ordinata  $pr$ , quæ est ad sinum ejus  $qr$  ut ellipseos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus  $p$ . (†) Si quando angulus  $N - AOQ + D$  negativus est, debet signum  $+$  ipsius  $E$  ubique mutari in  $-$ , & signum  $-$  in  $+$ . Idem intelligendum est de signis ipsorum  $G$  &  $I$ , ubi anguli  $N - AOQ - E + F$ , &  $N - AOQ - E - G + H$  negativi prodeunt. Convergit autem series infinita  $AOQ + E + G + I + \&c.$  quam celerrimè, adeo ut vix unquam opus fuerit ultra progredi quam ad terminum secundum  $E$ . Et fundatur calculus in hoc theoremate, quod area  $APS$  sit ut differentia inter arcum  $AQ$  & rectam ab umbilico  $S$  in radium  $OQ$  perpendiculariter demissam,

Non

(†) \* Si quando angulus  $N - AQ + D$ , seu arcus  $QM$ , (vid. fig. Not.) negativus est, seu si punctum  $M$ , cadit infra punctum  $Q$ , debet signum ipsius  $+$   $E$ , ubique mutari in  $-$ , & signum  $-$  in  $+$ . Quoniam enim supra invenimus  $E : N - AQ$

$+ D = L : L \mp \cos. AQ$ , si fuerit arcus  $N - AQ + D$ , negativus, debet quoque arcus  $E$  esse negativus, & arcus  $AQ$  erit  $AQ - E$ . Idem intelligendum est de signis ipsorum  $G$  &  $I$  &c. ob eandem rationem.

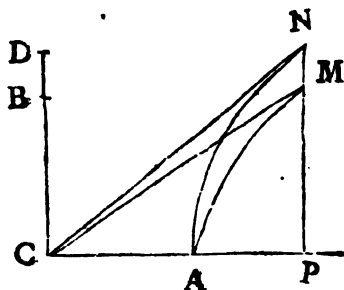
Non diffimili calculo conficitur problema in hyperbolâ. Sit ejus centrum  $O$ , vertex  $A$ , umbilicus  $S$  & asymptotos  $OK$ . Cognoscatur quantitas areæ abscindendæ temporis proportionalis. Sit ea  $A$ , & fiat conjectura de positione rectæ  $SP$ , quæ aream  $APS$  abscindat veræ proximam.



Jungatur  $OP$ , & ab  $A$  &  $P$  ad asymptoton agantur  $AI$ ,  $PK$  asymptoto alteri parallelæ, & (a) per tabulam logarithmorum dabitur area

(a) 374. Diximus superius (*Theor. IV. de Hyp.* p. 124.) aream inter asymptotum, Hyperbolam, ordinatam in vertice erectam & aliam ordinatam comprehensam, esse Logarithmum abscissæ, idem verò, more veterum demonstrare & ad hanc Propositionem propius accommodare hic non pigebit.

*Lemma.* Sint duæ hyperbolæ  $AM$ ,  $AN$  quarum centrum  $C$ , semidiameter communis  $AC$ , semidiametri conjugatæ  $CB$ ,  $CD$ , per punctum quodvis  $P$  agatur  $PMN$  ordinatim ad diametrum  $CP$  applicata, hyperbolis occurrens in punctis  $M$  &  $N$ , junganturque  $CM$ ,  $CN$  spatia hyperbolica  $AMP$ ,  $ANP$  & sectores  $AMC$ ,  $ANC$  sunt ad invicem in ratione semidiametrorum conjugatarum  $CB$ ,  $CD$ , vel etiam ordinarum  $PM$ ,  $PN$ . Nam ex naturâ hyperbolæ (*Theor. II. de Hyp.*)  $PM^2 : CB^2 = CP^2 - CA^2 : CA^2$ , &  $PN^2 : CD^2 = CP^2 - CA^2 : CA^2$ ; unde  $PM^2 : CB^2 = PN^2 : CD^2$ , &  $PM^2 : PN^2 = CB^2 : CD^2$ , ac  $PM : PN = CB : CD$ , cùmque idem semper eveniat quâcumque in parte cadat ordinata  $PMN$ , liquet spatia hyperbolica  $AMP$ ,  $ANP$  esse inter se ut  $CB$  ad  $CD$ , vel  $PM$

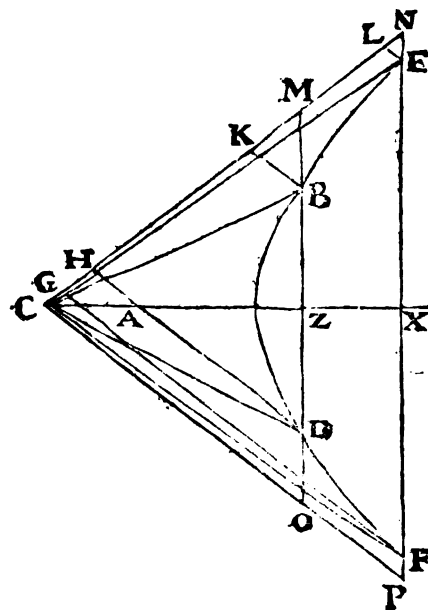


ad  $PN$ , sed triângula  $CPM$ ,  $CPN$  sunt ad invicem ut  $PM$  ad  $PN$  vel  $CB$  ad  $CD$ ; ergò  $CPM - AMP : CNP - ANP = AMC : ANC = PM : PN = CB : CD$ . Q. e. D.

375. *Coroll.* Si duæ semidiametri conjugatæ  $CA$ ,  $CD$  fuerint æquales, hyperbola  $AN$  erit æquilatera; quare inventa quadraturâ spatiorum hyperbolicorum  $ANP$  vel  $ANC$  in hyperbolis æquilateris, habebitur etiam quadratura spatiorum hyperbolicorum  $AMP$  vel  $AMC$  in aliis quibuscvis hyperbolis.

DE MO. 376. Lemma. Si super hyperbolæ E B D F  
TU COR- asymptoto C N sumantur quatuor partes  
PORUM. CG, CH, CK, CL, ut sit  $CG : CH$   
LIBER  $= CK : CL$  ducantur autem rectæ GF,  
PRIMUS. HD, KB, LE alteri asymptoto CP pa-  
rallæ, & hyperbolæ occurrentes in punctis F, D, B, E, junganturque semidiametri CF, CD, CB, CE, sectores hyperbolici CBE, CDF erunt æquales. Agantur enim rectæ BD, EF asymptotis occurrentes in punctis M, O, N, P, & ob parallælas KB, HD, CO erit  $MB : MK = DO : CH$ , & ob parallælas LE, GF, CP erit etiam  $NE : NL = FP : CG$ ; sed, ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos (Lem. I. de Conic. pag. 115.)  $MB = DO$ , &  $NE = FP$ , undè  $MK = CH$  &  $NL = CG$ ; Porro  $CG : CH = CK : CL$  (per hyp.) hoc est,  $NL : MK = CK : CL = LE : KB$ , ex naturâ hyperbolæ intrâ asymptotos (Theor. IV. de Hyp. p. 124.) rectæ igitur NE, MB, hoc est, EF, BD erunt parallæ, ac proinde, linea per earum medium X, Z ducta erit Diameter, transibitque per centrum C; (Lem. IV. de Conic. p. 119.) unde facile deducitur trapezia MXZN, OXZP forte æqualia ut & areæ mixtilinæ BXZE, DXZF, unde singulis ex correspondenti trapezio subtractis relinquentur areæ MBEN & ODFP æquales, quibus addantur Triangula MBC, ODC, æqualia ob bases æquales MB, OD in eadem lineâ positas, & ob vertices ad idem punctum C concurrentes, erunt æquales areæ CMNEBC, COPFDC, ex quibus denique subtractis Triangulis NEC, PFC quæ æqualia sunt ob bases æquales NE, PF in eadem lineâ positas, & ob vertices ad idem punctum C concurrentes, supererunt sectores hyperbolici CBE, CDF inter se æquales. Q. e. D.

377. Lemma. Si per puncta quævis asymptoti CL, agantur duæ rectæ GF, HD alteri asymptoto CP parallæ, & hyperbolæ occurrentes in F & D, junganturque semidiametri CF, CD, trapezium hyperbolicum GFDH æquatur sectori CFD. Nam, ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos, triangula CHD, CGF, æquantur ob æquales angulos G & H & latera reciproca (per Theor. IV. de Hyp. p. 124.) adeoque sublato communi trian-



gulo CGA, residua spatia GADH, CAF erunt æqualia, quibus si addatur idem spatium hyperbolicum DAF, tummæ GFDH, CFD erunt æquales. Q. e. D.

378. Coroll. 1. Hinc iisdem positis quæ (num. 376.) trapezia hyperbolica GFDH, KBEL sunt æqualia.

379. Coroll. 2. Si asymptoti partes CG, CH, CK fuerint continuè proportionales, duo sectores CFD, CDB & duo trapezia hyperbolica GFDH, HDBK, æquantur. Eadem enim ratione quâ num. 376. ostenditur rectam BF tangenti per punctum D ductæ esse parallælam. Undè si super asymptoto CL sumantur partes quocumque CG, CH, CK, CL &c. in continuâ progressionem geometricâ, & ex punctis G, H, K, L &c. agantur rectæ GF, HD, KB, LE &c. alteri asymptoto parallæ, trapezia hyperbolica GFDH, HDBK, KBEL erunt æqualia; & vicissim si trapezia illa æquantur, erunt rectæ CG, CH, CK, CL &c. in continuâ progressionem geometricâ.

380. Coroll. 3. Sit hyperbola  $FDBE$  æquilatera, cujus centrum  $C$ , asymptotus  $CL$ , semiaxis transversus  $CF$ , capiantur in asymptoto partes  $CG, CH, CK, CL$ , &c. in continuâ progressionē geometricā, aganturque  $GF, HD, KB, LE$  &c., alteri asymptoto  $CP$  parallelæ, trapezia hyperbolica  $GFDH, HDBK, KBEL$  &c. erunt æqualia; quare eorum summæ, scilicet  $o, GFDH, GFBK, GFEL$ , &c. erunt in continuâ progressionē arithmetica. Si itaque  $CG$  sit unitas,  $CH, CK, CL$ , &c. numeri, erunt  $o, GFDH, GFBK, GFEL$ , illorum numerorum logarithmi.

381. Coroll. 4. Itaque per logarithmorum hyperbolicorum tabulas, inveniri possunt trapeziorum quorumvis  $GFDH, BGFK$ , &c. areæ; Sumptâ enim  $CG$  pro unitate, querantur in numeris valores rectarum  $CH, CK$ , &c. & horum numerorum logarithmi exhibebunt trapezia hyperbolica  $GFDH, GFBK$ , &c.

382. Coroll. 5. Sit  $CG = 1, GH = x, CH = 1 + x, HD = y$ , & erit, ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos  $1 + x \times y = 1$ ,

adeoque  $y = \frac{1}{1+x}$ , & trapezii  $GFDH$

elementum  $DHQM$  seu  $y dx = \frac{dx}{1+x}$ ; Si

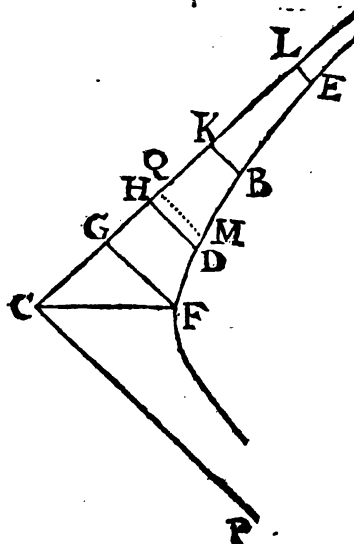
igitur  $L. 1 + x$ , denotet logarithmum numeri  $1 + x$ , erit  $L. 1 + x = GFDH$ ; & elementum logarithmi seu  $d. L. 1 + x$

$= y dx = \frac{dx}{1+x}$ . Et similiter elementum

logarithmi numeri cujusvis  $x$  seu  $d. L. x = \frac{dx}{x}$ .

383. Coroll. 6. Cum sit  $y = \frac{1}{1+x}$ ; si

peragatur divisio, erit  $y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$  &c. in infinitum, ac proinde  $y dx = dx - x dx + x^2 dx - x^3 dx$  &c. in infinitum, & sumptis utrinque fluentibus  $S. y dx = GFHD = L. 1 + x = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$  &c. in infinitum. Si autem numerus propositus sit unitate minor, seu  $1 - x$ , eodem modo invenietur ipsius

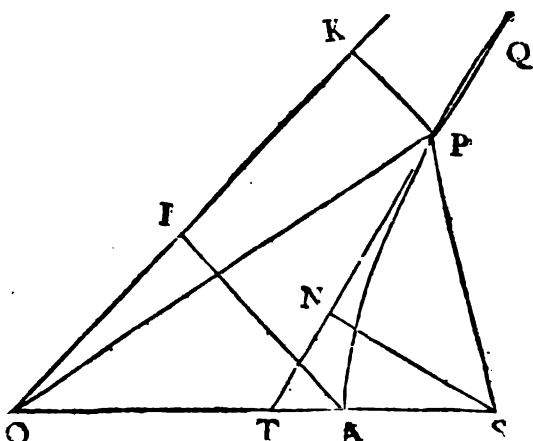


logarithmus  $S. -y dx = L. 1 - x = -x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5$  &c.

384. Scholium. Observandum est logarithmos hyperbolicos Neperi à logarithmis Briggsii quibus vulgè utimur differre; verum cum hyperbolici sint semper ad Briggianos seu vulgares in eadem constanti ratione, nimirum logarithmus hyperbolicus numeri denarii 2. 302585 est ad logarithmum Briggianum numeri denarii 1. 000000, ut quilibet logarithmus hyperbolicus ad ejusdem numeri logarithmum Briggianum, facile est hyperbolicos ad Briggianos & contrâ Briggianos ad hyperbolicos reducere, adeoque hyperbolarum quadraturam per logarithmos etiam vulgares invenire. Si dividatur 1. 000000, per 2. 302585 &c., quotiens 0. 4342948 &c. per logarithmum quemvis Hyperbolicum multiplicatus, dabit logarithmum vulgarem, & viceversâ, si logarithmus quilibet vulgaris per 0. 4342948 & dividatur, quotiens erit logarithmus hyperbolicus.

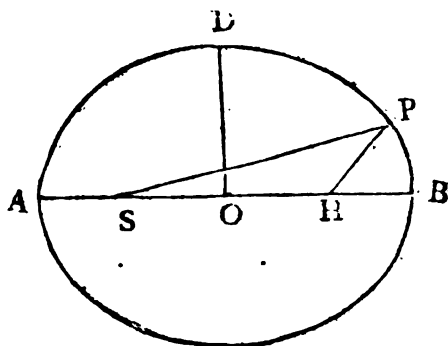
\* Et per tabulam. (381, 384.)

DE MO. AIKP, (b) eique æqua-  
TU COR- lis area  $OPA$ , quæ sub-  
PORUM. ducta de triangulo  $OPS$  re-  
LIBER. linquet aream abscissam  
PRIMUS.  $APS$ . Applicando areæ  
PROP.  $APS$  abscindendæ  $A$  & abscissæ  
XXXI.  $APS$  differentiam duplam  
 $2APS - 2A$  vel  $2A - 2$   
 $APS$  ad lineam  $SN$ , quæ  
ab umbilico  $S$  in tangen-  
tem  $TP$  perpendicularis  
est, (c) orietur longitudo  $O$



chordæ  $PQ$ . Inscribatur autem chorda illa  $PQ$  inter  $A$  &  $P$ , fit area abscissæ  $APS$  major fit areâ abscindendâ  $A$ , secus ad puncti  $P$  contrarias partes; & punctum  $Q$  erit locus corporis accuratio. Et computatione repetitâ invenietur idem accuratio in perpetuum.

Atque his calculis problema generaliter confit analyticè. Verùm usibus astronomicis accommodatio est calculus particularis qui sequitur. Existentibus  $AO$ ,  $OB$ ,  $OD$  semiaxibus ellipseos &  $L$  ipsius latere recto, ac  $D$  differentia inter semiaxem minorem  $OD$  & lateris recti semissem  $\frac{1}{2}L$ ; quære tum angulum  $Y$ , cujus sinus sit ad radium ut est rectangulum sub differentia illa  $D$ , & semisumma axium  $AO + OD$  ad quadratum axis majoris  $AB$ ; tum angulum  $Z$ , cujus sinus sit ad radium ut est



du-

\* (b) Eique æqualis area  $OPA$  (377).

\* (c) Orietur longitudo. Nam cum arcus  $PQ$  exiguus sit, accipi potest pro chorda  $PQ$  seu parte  $HQ$  tangentis  $TP$  productæ; undè triangulum rectilineum  $SQP$ , quam proximè æquatur differentiæ spatiorum hyperbolicorum  $APS$ ,  $ASQ$  seu  $A$ .

sed triangulum rectilineum  $SQP = \frac{PQ \times SN}{2}$

$$\text{ergò } \frac{PQ \times SN}{2} = A - APS, \text{ vel } = APS$$

$$- A, \text{ ac proindè } PQ = \frac{2A - 2APS}{SN} \text{ vel}$$

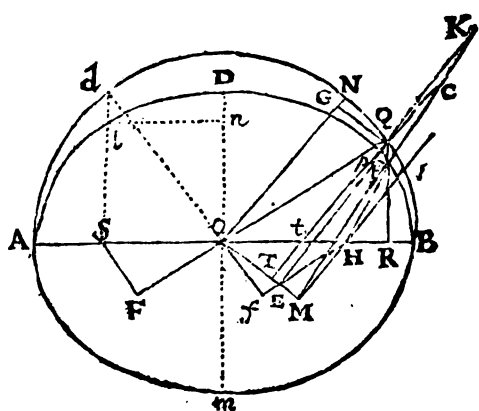
$$= \frac{2APS - 2A}{SN}; \text{ prout area } A \text{ major vel}$$

minor est area  $APS$ .

duplum rectangulum sub umbilicorum distantia  $SH$  & differen-  
tia illâ  $D$  ad triplum quadratum femiaxis majoris  $AO$ . His an-  
gulis semel inventis, locus corporis sic deinceps determinabitur.  
Sume angulum  $T$  proportionalem tempori quo arcus  $BP$  de-  
scriptus est, seu motui medio (ut loquuntur) æqualem; & an-  
gulum  $V$ , primam medii motus æquationem, ad angulum  
 $Y$ , æquationem maximam primam, ut est sinus dupli anguli  $T$   
ad radium; atque angulum  $X$ , æquationem secundam, ad an-  
gulum  $Z$ , æquationem maximam secundam, ut est cubus sinus  
anguli  $T$  ad cubum radii. Angulorum  $T$ ,  $V$ ,  $X$  vel summæ  
 $T+X+V$ , si angulus  $T$  recto minor est, vel differentiæ  $T+X-V$ ,  
si is recto major est rectisque duobus minor, æqualem cape angulum  
 $BHP$ , motum medium æquatum; & si  $HP$  occurrat ellipsi in  $P$ ,  
actâ  $SP$  abscindet aream  $BSP$  tempori proportionalem quam proxi-  
mè. Hæc praxis satis expedita videtur, propterea quod angulorum  
perexiguorum  $V$  &  $X$ , in minutis secundis, si placet, positorum;  
figuras duas tresve primas invenire sufficit. Sed & satis accu-  
rata est ad theoriam planetarum. Nam in orbe vel Martis ip-  
sius, cujus æquatio centri maxima est graduum decem, error  
vix superabit minutum unum secundum. Invento autem an-  
gulo motus medii æquati  $BHP$ , angulus veri motus  $BSP$ ,  
& distantia  $SP$  in promptu sunt per methodum notissimam. (d)

Hæc

(d) 385. Ellipseos quam Planeta de-  
scribit sit Centrum  $O$ , umbilici  $S$ ,  $H$ ,  
& semiaxes  $OB$ ,  $OD$ ; Sole in  $S$  pos-  
ito umbilicus alter  $H$  erit ferè centrum  
medii motus Planetæ, (372) id est, si ex  
umbilico  $H$  agatur linea  $HI$ , quæ cum  
lineâ apsidum  $OB$ , constituat angulum  $IHB$   
anomalie mediæ æqualem, recta illa  $HI$ ,  
ferè transibit per locum Planetæ in orbi-  
tâ ellipticâ parum excentricâ revolvētis,  
transeat autem  $HP$ , per locum verum  
Planetæ  $P$  & erit angulus  $PHI$ , ano-  
malie mediæ  $IHB$ , addendus (vel de-  
trahendus) ut motus medius æquatus  $BHP$   
habeatur, & angulus  $PHI$  aut ipsi æqui-  
pollens dicetur æquatio tota medii motus;  
quam in duas partes dividit NEWTONUS,  
quarum unam primam æquationem & al-



N n

teram





neam ME; Dicatur autem angulus anomaliz  
mediz T erit ( per construct. ) HOM ejus  
complementum ad duos Rectos, fiatque ut  
Radius ( qui in toto hoc calculo sumitur æ-  
qualis OB ) ad Cof. T sic OH ad MH.

$$\frac{OH \times \text{Cof. } T}{OB}, \text{ Præterea arcus } NQ = SF,$$

$$\& \text{ est } OQ \text{ (five } OB \text{) ad } QR \text{ ut est } OS \text{ (five } OH \text{) ad } SF \text{ ideoque } SF \text{ five } NQ = \frac{OH \times QR}{OB}$$

$$\text{unde proportio superius inventa } OB : NQ = MH : ME \text{ in hanc vertitur } OB : \frac{OH \times QR}{OB}$$

$$= \frac{OH \times \text{Cof. } T}{OB} : ME = \frac{OH^2 \times QR \times \text{Cof. } T}{OB}$$

$$\text{five quia ( per nat. Ellips. ) } OH^2 = OB^2 - OD^2 = OB + OD \times OB - OD \text{ ( per 6. 2. Elem. ) est } ME = \frac{OB + OD \times OB - OD \times QR \times \text{Cof. } T}{OB}$$

Radius verò KM hac ratione determina-  
tur: Ducatur ex P linea Pp, perpendicu-  
laris in TQ ac proinde parallela lineæ  
ME, ejus portio terminata in linea EK  
est quidem ita proximè æqualis ipsi Pp,  
ut Pp pro illa sumi possit, est verò ob pa-  
rallelas ME: Pp = KM: KP.

Facile autem determinatur ratio ME ad  
Pp, nam angulus TQR est complemen-  
tum anomaliz mediz QtR, unde est,  
Radius OB, ad Cof. T sicut QP ad Pp  
 $= \frac{\text{Cof. } T}{OB} \times QP$ , est autem QP differentia

$$\text{inter } QR \& PR, \text{ est verò } QR \text{ ad } PR \text{ ut semiaxis major } OB \text{ ad minorem } OD, \text{ est ergo } PR = \frac{OD \times QR}{OB} \& QP = QR -$$

$$= \frac{OD \times QR}{OB} = \frac{QR}{OB} \times OB - OD, \text{ ita-}$$

$$\text{que } Pp = \frac{\text{Cof. } T \times QR}{OB^2} \times OB - OD,$$

$$\text{ideoque } ME \text{ ad } Pp \text{ sicut } \frac{OB + OD \times OB - OD \times QR \times \text{Cof. } T}{OB^2}$$

$$\text{ad } \frac{OB - OD \times QR \times \text{Cof. } T}{OB^2}$$

utroque autem termino multiplicato per  
OB

$$OE - OD \times QR \times \text{Cof. } T \text{ superest. ra-}$$

tio OB + OD ad OB, æqualis rationi  
ME ad Pp five KM ad KP, unde con-  
vertendo est OD: OB + OD = KM  
— KP (MP): KM; five quia OB + OD  
est ferè 2 OB, est OD: 2 OB = MP: KM.

Erit autem MP proximè æqualis lineæ  
Tp, hæc verò lineæ Qt, cum enim par-  
va sit excentricitas, Qp compenfat fe-  
rè partem neglectam Tt, est verò Qt  
parallela NO, ideoque est QtR æqua-  
lis anomaliz mediz, ergo est sinus anoma-  
liz mediz ad radium ut QR ad Qt, si-  
ve fin. T: OB = QR: Qt =  $\frac{OB \times QR}{\text{fin. } T}$

$$= MP \text{ unde cum sit } OD \text{ ad } 2 OB$$

$$\text{sicut } MP \text{ five } \frac{OB \times QR}{\text{fin. } T} \text{ ad } KM \text{ erit } KM =$$

$$\frac{2 OB^2 \times QR}{OD \times \text{fin. } T}, \text{ sed inventa erat } ME = \frac{OB + OD \times OB - OD \times QR \times \text{Cof. } T}{OB}$$

$$\text{multiplica ergo valores } KM \& ME \text{ per}$$

$$\frac{2 \text{ fin. } T \times OD}{QR} \text{ eritque } KM \text{ ad } ME \text{ five ra-}$$

$$\text{dius ad sinum anguli K ut } 4 OB^2 \text{ (five } AB^2 \text{) ad } 2 OD \times OB + OD \times OB - OD \times \text{fin. } T \times \text{Cof. } T$$

$$\& \text{ cum sit semi latus rectum } \frac{1}{2} L = \frac{OD^2}{OB}, \text{ erit}$$

$$OD - \frac{1}{2} L = OD - \frac{OD^2}{OB} = \frac{OD}{OB} \times OB - OD,$$

$$\text{vocetur } D \text{ ea differentia semi-}$$

$$\text{axis minoris \& semilateris recti, \& substi-}$$

$$\text{tuto } D \text{ loco } \frac{OD}{OB} \times OB - OD \text{ erit Ra-}$$

$$\text{dius ad sinum anguli K ut } AB^2 \text{ ad } D \times$$

$$OB + OD \times \frac{2 \text{Cof. } T \times \text{fin. } T}{OB^2}$$

$$387. \text{ Ergo in quovis gradu anomaliz}$$

$$\text{mediz erit, est semper Radius ad } AB^2$$

$$\text{ut sinus Anguli K, ad } D \times \frac{OB + OD}{OB} \times$$

$$\frac{2 \text{Cof. } T \times \text{fin. } T}{OB} \text{ cum verò ratio Radii ad}$$

$$AB^2 \text{ sit constans, hæc altera etiam erit con-}$$

$$\text{stans, ideoque in omni casu sinus Anguli K}$$

$$\text{ubi anomalia media est T, erit ad ejus sinum}$$

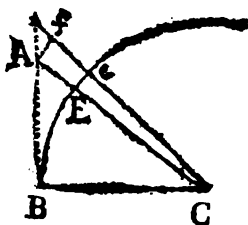
$$\text{ubi anomalia media erit t, ut } D \times OB + OD$$

$$N. 2; \times 2 \text{Cof.}$$





DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XXXI.



Unde collatis terminis corresponden-  
tibus harum serierum est  $A^2 - r^2 A^2$   
 $= 0$ , ideoque  $A^2 = r^2$ , &  $A = r$ ; est  
 $4r + B^2 v^2 = 4A + B^2 v^2 - 2r^2 AB v^2$ ,  
sive divisis omnibus terminis per  $B v^2$  &  
posito loco  $A$ ;  $4r + B = 4r - 2r^2$

ideoque est  $B = \frac{1}{2r}$ ,

est  $16r + B C v^4 = 6A^2 B v^4 + 4A + C v^4$   
 $= 2r^2 A C v^4 - r^2 B B v^4$ , quæ divisa  
per  $v^4$  substitutisque valoribus  $A$  &  $B$   
dant

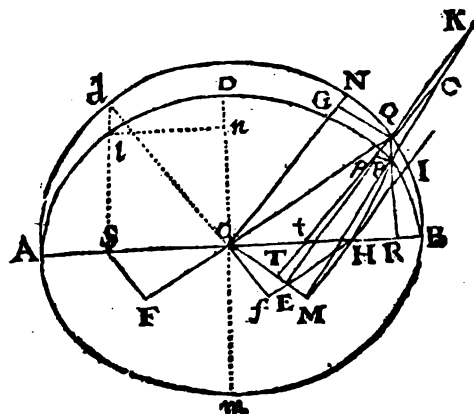
$8r + C = \frac{5}{4} + 4r + C - 2r + C - \frac{1}{4}$  unde est  
 $6r + C = \frac{5}{4}$  &  $C = \frac{5}{2 \times 1 \times 4r}$  &c.

Series ergo ad secantis valorem expri-  
mendum  $A + B v^2 + C v^4$  &c. in hanc  
vertitur  $r + \frac{v^2}{2r} + \frac{5v^4}{2 \times 3 \times 4r}$  &c.

Quæ satis prompte convergit si modo ar-  
cus  $v$  sit exiguus, ut isto in casu.

His positis, invenientur commodè par-  
tes lineæ TE, sive sinus secundæ æquation-  
is, ea enim constat ex differentia inter ar-  
cum NQ & ejus finem (dato radio OB)  
& ex differentia inter eum ipsum arcum  
NQ sumptum ut radius in angulo FOE &  
illius anguli secantem.

Primum ergo differentia inter arcum NQ  
& ejus finem, ex primâ serie invenit-  
ur, sit enim  $v = NQ$  &  $r = OB$ , sinus  
arcus NQ per eam seriem invenitur  
 $NQ - \frac{NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$  &c. & omittis reliquis termi-  
nis seriei, hic admodum exiguis, liquet dif-  
ferentiam inter arcum NQ & ejus finem  
esse terminum  $\frac{NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$  qui erat in eâ



serie ex arcu NQ tollendus ut oblineretur  
sinus.

Secundo, ut differentia inter radius &  
secantem anguli FOE obtineatur, loco  
radii  $r$  in serie superius inventâ valor ra-  
dii Of sive NQ est substituendus, & lo-  
co arcus  $v$ , valor arcus qui mensurat  
eum angulum & qui inventus fuit  $= \frac{NQ^2}{OB}$ ,

ergo series quæ secantem exprimit in hanc  
abit  $NQ + \frac{NQ^4}{2 OB^2 \times NQ}$  &c. reliquis  
terminis ut pote minimis omittis, excessus  
secantis super radius est  $\frac{NQ^3}{2 OB^2}$ , qui  
junctus cum excessu arcus super finem  
superius invento  $\frac{NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$  efficit sum-

nam  $\frac{4NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$  sive  $\frac{2NQ^3}{3 OB^2}$  pro va-  
lore sinus æquationis secundæ; sed est  
(369) ut Radius OB ad QR ita SH sive  
OH ad SF sive NQ, ergo  $NQ = \frac{OH}{OB} \times QR$

&  $\frac{2NQ^3}{3 OB^2} = TE = \frac{2OH}{3 OB} \times QR$ ;

Itaque cum in hac secundâ æquatione ra-  
dius QE sit in omni anomaliz gradu idem  
aut prope idem, & anguli sint minimi  
erunt inter se quam proximè ut eorum sinus  
TE

TE, cumque in valore TE quantitas  $\frac{2OH}{3OB}$

$\frac{2D \times SH}{3OB \times OD}$  QR.

fit constans, sinus illi sunt inter ut QR, sed QR est sinus anomalie excentri, & in eadem prope sunt ratione sinus anomalie medie, hinc istae aequationes secundae in variis anomalie medie gradibus adhibendae, sunt inter se ut cubi sinuum anomalie medie. Si itaque sumatur anomalie media 90. graduum ejus sinus est ipse Radius, eritque illic maxima aequatio, quae erit ad aliam quamvis, ut cubus Radii ad cubum sinus anomalie medie ipsi convenientis ut statuit NEWTONUS.

In nonagesimo vero gradu anomalie medie linea OM five OE in axem OB cadit & QT cui ferè æqualis est QE coincidit cum QR, unde QE pro QR sumi potest, & præterea QR nonnihil excedit lineam Sd five axem minorem DO, cum non nihil citra focum cadat, minor tamen est radio OB, unde QR<sup>2</sup> pro OB x OD satis accuratè sumi potest,

sicque valor TE =  $\frac{2D \times SH}{3OB \times OD}$  QR;

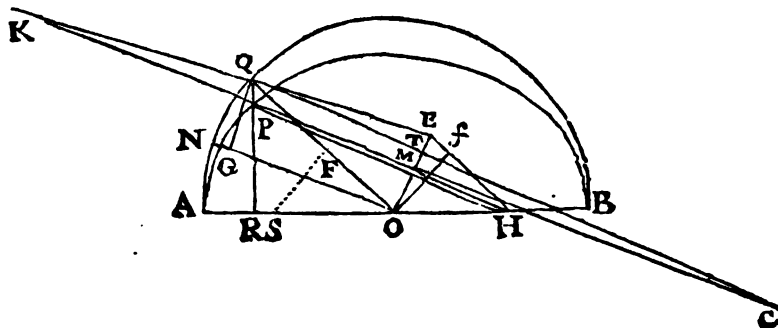
in hanc abit TE =  $\frac{2D \times SH}{3OB^2}$  QE,

sed Radius est ad sinum æquationis maximæ secundæ ut QE ad TE (five  $\frac{2D \times SH}{3OB^2}$

x QE) & QE ad  $\frac{2D \times SH}{3OB^2}$  QE sicut

4 OB<sup>2</sup>, ad D x SH, ergo æquatio secunda maxima invenietur dicendo ut triplum Quadrati semi axis majoris ad duplum Rectangulum sub umbilicorum distantia SH & differentia D semi axis minoris & semi Lateris Recti, ita Radius ad sinum secundæ æquationis ubi est maxima, & ea data reliquæ invenientur dicendo ut cubus Radii ad cubum sinus anomalie medie propositæ ita hæc maxima æquatio, ad quæsitam. Q. E. D.

$\frac{2OH}{3OB}$  QR, est æqualis  $\frac{2OH \times 2D}{3OB \times OD}$  x QR; vel quia 2 OH = SH est TE =



389. Annihilatur prima æquatio in 90. gradu anomalie medie & in primo, negativa fit in secundo quadrante, positiva in tertio, negativa iterum in quarto.

Etenim in 90. gradu anomalie medie Tom. I.

OM coincidit cum OH ex constructione, sicque linea fH, non amplius fecat lineam OM in E, evanescit itaque ME sinus primæ Equationis.

Excedat verò anomalie media 90. fiat que







## S E C T I O VII.

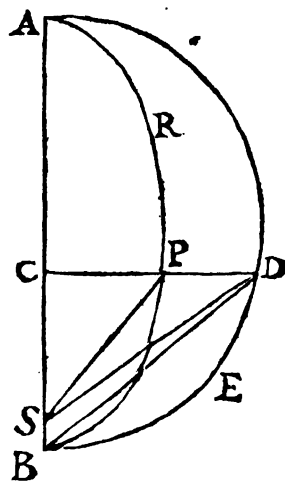
DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XX XII.

*De corporum ascensu & descensu rectilineo.*

## PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XXIV.

*Posito quod vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantiae locorum à centro, spatia definire quæ corpus rectè cadendo datis temporibus describit.*

*Cas. 1.* Si corpus non cadit perpendiculariter, describet id ( *per corol. 1. prop. XIII.* ) sectionem aliquam conicam cujus umbilicus congruit cum centro virium. Sit sectio illa conica  $ARPB$  & umbilicus ejus  $S$ . Et primo si figura ellipsis est; super hujus axe majore  $AB$  describatur semicirculus  $ADB$ , & per corpus decedens transeat recta  $DPC$  perpendicularis ad axem; actisque  $DS$ ,  $PS$  erit area  $ASD$  areae  $ASP$ , atque ideo etiam tempori proportionalis. Manente axe  $AB$  minuatur perpetuo latitudo ellipseos, & semper manebit area  $ASD$  tempori proportionalis. (e) Minuatur



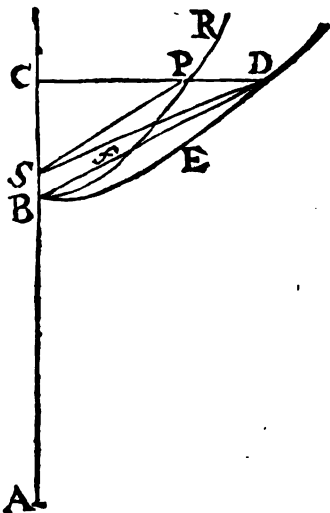
latitu-

(e) 391. *Lemma.* Si sectionis conicæ latus rectum ad axem transversum pertinet perpetuo minuitur, & tandem evanescat, manente sectionis axe transverso, omnes ad axem ordinatæ perpetuo minuantur & tandem evanescunt, ac perimeter sectionis cum axe & umbilici cum axis verticibus coincidunt. Est enim, ( *ex conic.* ) ordinatæ cujusvis quadratum ad rectangulum abscissarum in ratione datâ lateris recti ad axem transversum; quare si manente axe transverso, adeoque & abscissarum rectangulo, latus rectum perpetuo minuitur ac tandem evanescat, ordinatæ quadratum adeoque & ordinata ipsa perpetuo minuitur & tandem evanescit, &

perimeter sectionis conicæ cum axe coincidit. Porro ordinata per umbilicum æqualis est dimidio lateri recto ( *Vid. sup. in Conicis, Theor. III. de Hyperbola & de Ellipsi & Cor. I. Theor. I. de Parab.* ) adeoque quadratum dimidii lateris recti est ad rectangulum ex distantis umbilici à verticibus, ut latus rectum ad axem transversum, unde rectangulum sub quartâ parte lateris recti & axe transverso æquatur rectangulo ex distantis umbilici à verticibus; quare evanescente latere recto & manente axe transverso, rectangulum sub distantis umbilici à verticibus nullum fit, & umbilicus cum proximo vertice coincidit.

latitudo illa in infinitum: & orbe  $APB$  jam coincidente cum axe  $DE$  Mo.  $AB$  & umbilico  $S$  cum axis termino  $B$ , descendet corpus in rectâ  $AC$ , & area  $ABD$  evadet tempori proportionalis. Dabitur itaque spatium  $AC$ , quod corpus de loco  $A$  perpendiculariter cadendo tempore dato describit, si modo tempori proportionalis capiatur area  $ABD$ , & à puncto  $D$  ad rectam  $AB$  demittatur perpendicularis  $DC$  (f). Q. E. I.

Caſ. 2. Si figura illa  $RPB$  hyperbola est, describatur ad eandem diametrum principalem  $AB$  hyperbola rectangula  $BED$ : & (g) quoniam areæ  $CSP$ ,  $CBfP$ ,  $SPfB$  sunt ad areas  $CSD$ ,  $CBED$ ,  $SDEB$ , singulæ ad singulas, in datâ ratione altitudinum  $CP$ ,  $CD$ ; & area  $SPfB$  proportionalis est tempori quo corpus  $P$  movebitur per arcum  $PfB$ ; erit etiam area  $SDEB$  eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum hyperbolæ  $RPB$  in infinitum manente latere transverso, & coibit arcus  $PB$  cum rectâ  $CB$  & umbilicus  $S$  cum vertice  $B$  & recta  $SD$  cum rectâ  $BD$ . Proinde area  $BDEB$  proportionalis erit tempori quo corpus  $C$  recto descensu describit lineam  $CB$ . Q. E. I.



Caſ. 3.

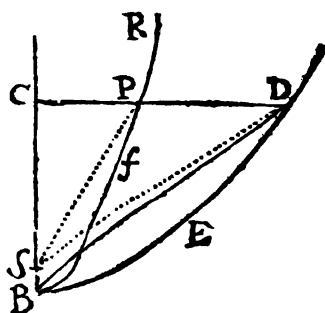
(f) 392. Perpendicularis  $DC$ . Quoniam area  $ABD$ , semper proportionalis est tempori quo corpus ex puncto  $A$  per rectam  $AC$  cadit, erit totius semicirculi area  $ADEB$ , proportionalis tempori quo corpus idem cadendo percurrit lineam  $AB$ , & divisim area segmenti  $BDEB$ , proportionalis tempori quo corpus ex  $A$ , cadendo percurrit lineam  $CB$ .

(g) 393. Quoniam areæ. Nam 1°. triangula  $CSP$ ,  $CSD$  quorum est basis communis  $CS$ , sunt ut altitudines  $CP$ ,  $CD$ . 2°. areæ hyperbolicæ  $CBfP$ ,  $CBED$  sunt ut eædem altitudines  $CP$ ,  $CD$  (374) unde 3°. divisim  $CBfP - CSP$  ad  $CBED - CSD$ , hoc est, sector  $SPfB$  ad sectorem  $SDEB$  ut  $CP$  ad  $CD$ .

# 294 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO- Caf. 3. (h) Et fimili argumento fi  
TU COR- figura  $RPB$  parabola eft, & eodem  
PORUM. vertice principali  $B$  describatur alia pa-  
LIBER. rabola  $BED$ , quæ femper maneat da-  
PRIMUS. ta, interea dum parabola prior, in cu-  
PROP. jus perimetro corpus  $P$  movetur, dimi-  
XXXII. nuto & in nihilum redactò ejus latere

recto, conveniat cum lineâ  $CB$ ; fiet  
segmentum parabolicum  $BDEB$  pro-  
portionale tempori quo corpus illud  $P$  vel  $C$  descendet ad cen-  
trum  $S$  vel  $B$ . *Q. E. I.*



## PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA IX.

*Positis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C est ad velocitatem corporis centro B intervallo BC circum-  
culum describentis, in subduplicatâ ratione quam AC distantia  
corporis à circuli vel hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore A,  
habet ad figuræ semidiametrum principalem  $\frac{1}{2}$  AB.*

Bifecetur  $AB$ , communis utriusque figuræ  $RPB$ ,  $DEB$  dia-  
meter, in  $O$ ; & agatur recta  $PT$ , quæ tangat figuram  $RPB$   
in  $P$ , atque etiam secet communem illam diametrum  $AB$  ( si  
opus est productam ) in  $T$ ; fitque  $SY$  ad hanc rectam, &  $BQ$   
ad hanc diametrum perpendicularis, atque figuræ  $RPB$  latus  
rectum ponatur  $L$ . Constat per corol. 1x. prop. XVI. quod cor-  
poris in lineâ  $RPB$  circa centrum  $S$  moventis velocitas in lo-  
co quovis  $P$  fit ad velocitatem corporis intervallo  $SP$  circa idem  
cen-

(h) 394. Simili argumento. In Parabola  
1°.  $CSP : CSD = CP : CD$ . 2°. sit la-  
tus rectum Parabolæ  $BfP = l$ , latus rec-  
tum Parabolæ  $BED = L$ , erit, ex naturâ  
Parabolæ  $CP^2 = l \times CB$  &  $CD^2 = L \times$   
 $CB$ , adeoque  $CP : CD = \sqrt{l} : \sqrt{L}$ , hoc  
est, in ratione datâ, ergò area  $CBEP$   
est ad aream  $CBED$ , in eadem ratione  
datâ  $CP$  ad  $CD$ ; Quare 3°. divisim  
 $SPfB : SDEB = CP : CD$ . Cætera se  
habent ut in demonstratione casûs secundi.

395. Scholium. Corporis per rectam

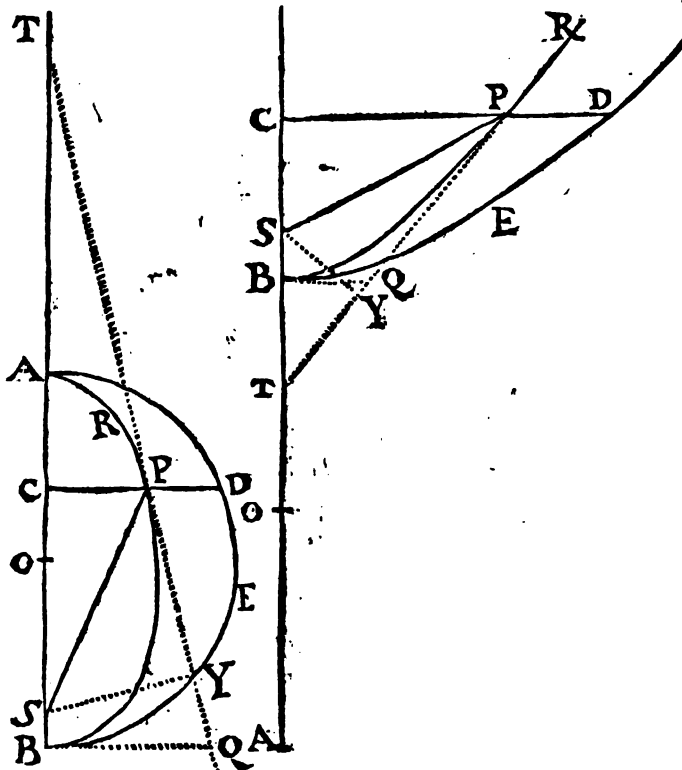
$CS$ , ad centrum  $S$ , cadentis velocitas in  
loco quovis  $C$ , est ad velocitatem corpo-  
ris alterius ad eandem à centro distan-  
tiam circumulum describentis, vel in ratio-  
ne minore quam  $\sqrt{2}$ , ad 1, vel in ra-  
tione majore aut in eâ ipsâ ratione. In  
1°. casû recta  $SC$ , usurpanda est pro el-  
lipfi latitudinis evanescentis; in 2°. casû,  
recta  $SC$ , est hyperbola cujus latus rec-  
tum evanescit; in 3°. casû, recta  $SC$ , est  
parabola lateris recti evanescentis. Hæc  
omnia patent ex coroll. 7°. Prop. XVI.

centrum circuli describentis in subduplicatâ ratione rectanguli  $\frac{1}{2}L \times SP$  ad  $SY$  quadratum. Est autem ex conicis  $ACB$  ad  $CPq$  ut  $2AO$  ad  $L$ , ideoque  $2CPq \times AO$

$\frac{ACB}{ACB}$   
æquale  $L$ . Ergo velocitates illæ sunt ad invicem in subduplicatâ ratione  $CPq \times AO \times SP$   
 $\frac{ACB}{ACB}$

ad  $SY$  quad. (i) Porro ex conicis est  $CO$  ad  $BO$  ut  $BO$  ad  $TO$ ; & compositè vel divisim ut  $CB$  ad  $BT$ . Unde vel dividendo vel componendo fit  $BO -$  vel  $+ CO$  ad  $BO$  ut  $CT$  ad  $BT$ , id est,  $AC$  ad  $AO$  ut  $CP$  ad  $BQ$ ; indeque  $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$

æquale est,  $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$ . Minuatur jam in infinitum figu-



(i) 396. Porro ex conicis. (Vid. Lem. V. de Conicis, Cor. 2.) est  $TO : AO = AO : CO$ , & quia  $AO = BO$ , invertendo & permutando est  $CO : BO = BO : TO$  & in Ellipsi compositè  $CO : BO = CB$  (seu  $CO + BO$ ) :  $BT$  (seu  $BO + TO$ ); & in hyperbolâ divisim,  $CO : BO = CB$  (seu  $CO - BO$ ) :  $BT$  (seu  $BO - TO$ ); Quare in utraque sectione,  $CO : BO = CB : BT$ . Undè in ellipsi dividendo fit  $AC$ , seu  $BO - CO$ , aut  $AO - CO : BO = CT$ , seu  $BT - CB : BT$ , & in hy-

perbolâ; componendo  $AC$  seu  $CO + BO : BO = CT$  seu  $CB + BT : BT$ ; adeoque in utraque sectione  $AC : BO$  seu  $AO = CT : BT$ . Sed propter similitudinem triangulorum  $TCP$ ,  $TBQ$ ,  $CT : BT = CP : BQ$ , ergò  $AC : AO = CP : BQ$ , &  $CP = \frac{BQ \times AC}{AO}$ , ac  $CP^2 = \frac{BQ^2 \times AC^2}{AO^2}$ , indeque  $\frac{CP^2 \times AO \times SP}{AC \times CB} = \frac{BQ^2 \times AC \times SP}{AO \times CB}$ .

DEMO. ræ *R P B* latitudo  
TU COR. *CP*, sic ut pun-  
PORUM. ctum *P* coeat  
LIBER cum puncto *C*,  
PRIMUS. punctumque *S*,  
PROP. cum puncto *B*,  
XXXIII.

*Corol. 1.* Punctis  $B$  &  $S$  coeuntibus, fit  $TC$  ad  $TS$  ut  $AC$  ad  $AO$ .

*Corol. 2. (k)* Corpus ad datam à centro distantiam in circulo quovis revolven-, motu suo sursum verso ascendet ad duplam suam à centro distantiam.

( k ) 397. *Corpus ad datam.* Si fuerit BED circulus, & punctum C coincidat cum puncto O, erit  $AC = AO = \frac{1}{2} AB$ , adeoque velocitas per radium A O cadendo acquisita est æqualis velocitati corporis centro B intervallo  $BO = AO$  circulum describentis. Unde si corpus illud, ad datam à centro distantiam BO in circulo revolvens, sursum per O A, projiciatur cum eâ velocitate quâ circulum de-

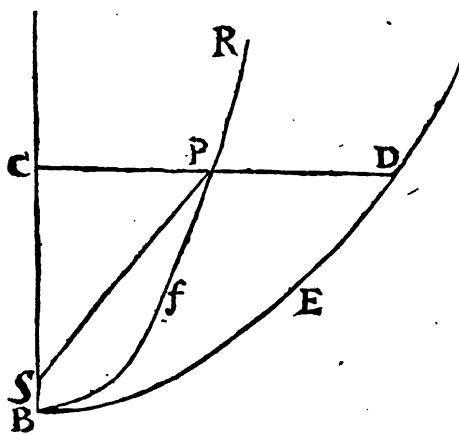
scribit, seu quam per A O cadendo acqui-  
fivit, ascendet ad punctum A, per ip-  
sarium O A (25) seu ad duplam suam à  
centro B distantiam  $BA = 2 BO$ .

398. *Coroll. 1.* Velocitas in puncto quovis C, est ad velocitatem in alio puncto c, in ratione subduplicatâ rectanguli  $AC \times BC$ , ad rectangulum  $A c \times B c$ . Nam velocitas in C, est ad velocitatem corporis intervallo B C circumum describen-

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA X.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XXXIV.

Si figura  $BED$  parabola est ;  
dico quod corporis cadentis ve-  
locitas in loco quovis  $C$  æ-  
qualis est velocitati quâ cor-  
pus centro  $B$  dimidio inter-  
valli sui  $BC$  circulum uni-  
formiter describere potest.



Nam corporis parabolam  
 $RPB$  circa centrum  $F$  de-  
scribentis velocitas in loco  
quovis  $P$  ( per coroll. VII.  
prop. XVI. ) æqualis est velocitati corporis dimidio intervalli  
 $SP$  circulum circa idem centrum  $S$  uniformiter describentis.  
Minuatur parabolæ latitudo  $CP$  in infinitum eo , ut arcus para-  
bolicus  $PfB$  cum rectâ  $CB$ , centrum  $S$  cum vertice  $B$ , &  
intervallum  $SP$  cum intervallo  $BC$  coincidat , & constabit pro-  
positio. *Q. E. D.*

PRO-

bentis ut  $\sqrt{AC}$  ad  $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$  ( per  
hanc prop. ) ; Velocitas cor-  
poris intervallo  $BC$  circulum  
describentis est ad Velocitatem  
corporis intervallo  $Bc$  circulum  
describentis , ( per Cor. 6. Prop.  
IV. ) reciprocè in ratione sub-  
duplicatâ Radiorum , hoc est , ut  
 $\sqrt{Bc}$  ad  $\sqrt{BC}$  ; Denique Ve-  
locitas Corporis intervallo  $Bc$   
circulum describentis est ad Ve-  
locitatem in  $c$  corporis ex  $A$   
cadentis ut  $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$  ad  $\sqrt{AC}$   
( per hanc propositionem ) ; Er-  
go per compositionem ratio-  
num ) est velocitas in  $C$  ad  
velocitatem in  $c$  , in ratione  
compositâ ex ratione compositâ  
ex ratione  $\sqrt{AC}$  ad  $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$  , ratione

A  
C  
c  
O  
B  
A

$\sqrt{Bc}$  ad  $\sqrt{BC}$  ; & ratione  $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$  ad  
 $\sqrt{AC}$  , five ut  $\sqrt{AC} \times \sqrt{Bc}$  ad  $\sqrt{AC} \times \sqrt{BC}$  , hoc est , in ratione subduplicatâ rectanguli  $AC \times Bc$  ad rectangulum  $AC \times BC$ . *Q. E. D.*

399. Coroll. 2. Si fuerit  $BfP$  Para-  
bola , corporis in ea moti velocitas in lo-  
co quovis  $P$ , erit ad velocitatem corporis  
ad distantiam  $SP$ , circulum describentis  
in ratione  $\sqrt{2}$ , ad  $1$  ; si fit Ellipsis in mi-  
nori ratione , in majori verò si fuerit hy-  
perbola ( per Cor. 7. Prop. 16. ) & latitu-  
dine orbis imminuta in infinitum ut coin-  
cidat  $BfP$  cum axe  $BC$  , erit corporis  
cadentis velocitas in loco quovis  $C$  ad ve-  
locitatem corporis ad distantiam  $BC$  circulum  
describentis ut  $\sqrt{2}$  ad  $1$ . adeoque  
 $AC : \frac{1}{2}AB = 2 : 1$  in 2°. casu ratio  $AC$  ,  
ad  $\frac{1}{2}AB$  , minor erit quam ratio  $2$  ad  $1$  ;  
in 3°. casu major , & contrâ.

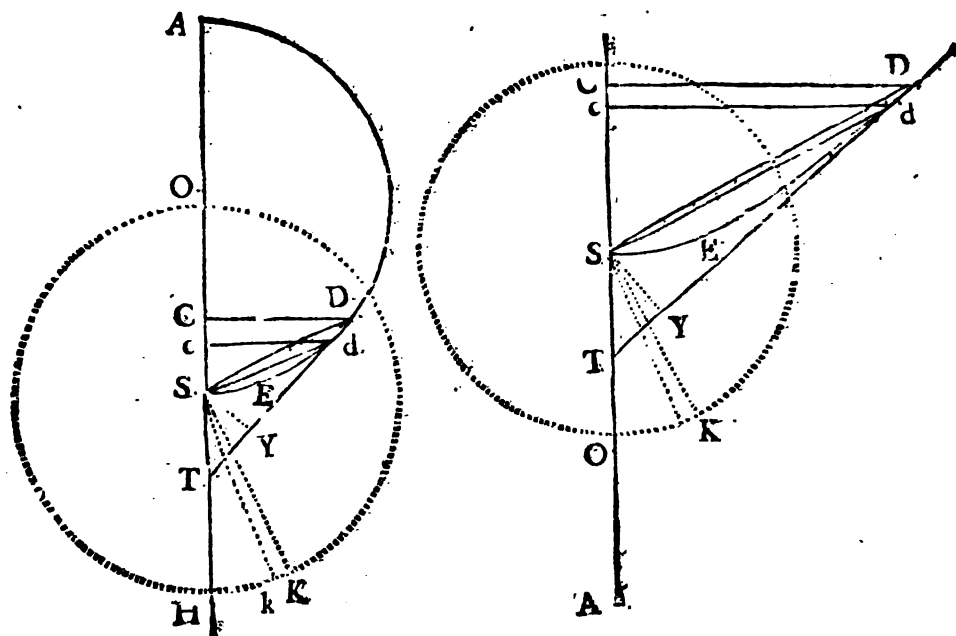
P p

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XXXV.

## PROPOSITIO XXXV. THEOREMA XI.

*Isdem positis, dico quod area figuræ DES, radio indefinito SD descripta, æqualis sit area quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ DES æquante, circa centrum S uniformiter gyrando, eodem tempore describere potest.*



Nam concipe corpus  $C$  quam minima temporis particulâ lineolam  $Cc$  cadendo describere, & interea corpus aliud  $K$ , uniformiter in circulo  $OKk$  circa centrum  $S$  gyrando, arcum  $Kk$  describere. Erigantur perpendiculara  $CD$ ,  $c d$  occurrentia figuræ  $DES$  in  $D$ ,  $d$ . Jungantur  $SD$ ,  $Sd$ ,  $SK$ ,  $Sk$  & ducatur  $Dd$  axi  $AS$  occurrens in  $T$ , & ad eam demittatur perpendicularum  $SY$ .

*Cas. 1.* Jam si figura  $DES$  circulus est vel hyperbola rectangularis, bisecetur ejus transversa diameter  $AS$  in  $O$ , & erit  $SO$

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 299

SO dimidium lateris recti. (1) Et quoniam est  $TC$  ad  $TD$  ut  $De Mo-$   
 $Cc$  ad  $Dd$ , & (m)  $TD$  ad  $TS$  ut  $CD$  ad  $SY$ , erit ex æquo <sup>TU COR-</sup>  
 $TC$  ad  $TS$  ut  $CD \times Cc$  ad  $SY \times Dd$ . Sed (per corol. 1. prop. <sup>PORUM-</sup>  
xxxiii.) (n) est  $TC$  ad  $TS$  ut  $AC$  ad  $AO$ , puta si in coitu <sup>LIBER</sup>  
punctorum  $D, d$  capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo  $ACP$  <sup>PRIMUS.</sup>  
est ad  $AO$  seu  $SK$  ut  $CD \times Cc$  ad  $SY \times Dd$ . Porro corpo- <sup>PROP.</sup>  
ris descendens velocitas in  $C$  est ad velocitatem corporis cir-  
culum intervallo  $SC$  circa centrum  $S$  describentis in subduplicatâ  
ratione  $AC$  ad  $AO$  vel  $SK$  (per prop. xxxiii.) Et hæc  
velocitas ad velocitatem corporis describentis circum  $OKk$  in  
subduplicatâ ratione  $SK$  ad  $SC$  (per corol. vi. prop. 1v.) &  
ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc est lineola  $Cc$  ad ar-  
cum  $Kk$  in subduplicatâ ratione  $AC$  ad  $SC$ , (o) id est in ra-  
tione  $AC$  ad  $CD$ . Quare est  $CD \times Cc$  æquale  $AC \times Kk$ , &  
(p) propterea  $AC$  ad  $SK$  ut  $AC \times Kk$  ad  $SY \times Dd$ , indeque  
 $SK \times Kk$  æquale  $SY \times Dd$ , &  $\frac{1}{2} SK \times Kk$  æquale  $\frac{1}{2} SY \times Dd$ ,  
id est area  $KSk$  æqualis areæ  $SDd$ . Singulis igitur temporis  
particulis generantur arearum duarum particule  $KSk$ , &  $SDd$ ,  
quæ, si magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in  
infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (per co-  
rollarium lemmatis 1v.) areæ totæ simul genitæ sunt semper æqua-  
les. Q. E. D.

Caf

(1) \* Et quoniam est  $TC$  ad  $TD$  ut  $Cc$   
ad  $Dd$ . Quia in Triangulo  $TCD$ , est  $ed$   
parallela basi  $CD$ , ideoque  $TC:TD$  ut  
partes correspondentes  $Cc, Dd$ .

(m) \* Et  $TD$  ad  $TS$  ut  $CD$  ad  $SY$ .  
Sunt enim propter angulos  $Y$ , &  $C$ , re-  
ctos & angulum  $T$ , communem, triangu-  
la  $TCD$ ,  $TSY$ , similia.

(n) Est  $TC:TS$ . Nam punctis  $D, d$ ,  
coeuntibus, fit  $TD$ , tangens; adeoque  
( 396. )  $TC:TS = AC:AO$ .

(o) \* In ratione  $AC$  ad  $SC$ , id est in  
ratione  $AC$  ad  $CD$ . Est enim  $SED$ , cir-  
culus, vel hyperbola æquilatera cujus ver-  
tices  $S$  &  $A$ , sed in circulo & hyperbo-  
lâ æquilaterâ ob axium æqualitatem est  
 $CD^2 = AC \times SC$ , & proinde  $AC:CD$   
 $= CD:SC$ , & hinc  $AC$  ad  $CD$ , in ra-  
tione subduplicatâ  $AC$  ad  $SC$ .

(p) \* Et propterea. Nam ex superius  
demonstratis  $AC:SK = CD \times Cc:SY$   
 $\times Dd$ .

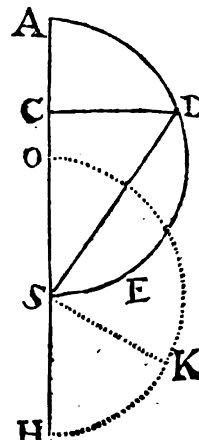




PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XXV.

*Corporis de loco dato A cadentis determinare tempora descensus.*

Super diametro  $AS$  distantia corporis a centro sub initio, describe semicirculum  $ADS$ , ut & huic æqualem semicirculum  $OKH$  circa centrum  $S$ . De corporis loco quovis  $C$  erige ordinatim applicatam  $CD$ . Junge  $SD$ , & areæ  $ASD$  æqualem constitue sectorem  $OSK$ . (1) Patet per prop. xxxv. quod corpus cadendo describet spatium  $AC$  eodem tempore quo corpus aliud, uniformiter circa centrum  $S$  gyrando, describere potest arcum  $OK$ . Q. E. F.



DE MOTU CORPORUM.  
LIBER PRIMUS.  
PROPOSITIO XXXVI.

PRO-

percurrit  $AS$ , (400) ad tempus periodicum corporis ad distantiam  $AS (= 2 SO)$  in circulo revolventis ut Radices quadratæ cuborum distantiarum 1 & 2. sive ut 1, ad  $\sqrt{8}$  (191.), hoc est, ut 1 ad  $2\sqrt{2}$ ; ergo tempus quo corpus cadendo percurrit  $AS$ , est ad tempus periodicum corporis ad distantiam  $AS$  in circulo revolventis ut  $\frac{1}{2}$  ad  $2\sqrt{2}$ , hoc est, ut 1, ad  $4\sqrt{2}$ .

402. Scholium. Si planetarum orbitas circulares esse supponamus, vimque centripetam quâ in suis orbitis retinentur, in duplicatâ ratione distantiarum à centro decrescere, ex datis temporibus periodicis, facile erit tempora definire quibus usque ad centrum sui motus cadendo pervenirent. Exempli causâ, cum tempus periodicum lunæ circa terram revolventis sit dierum 27. hor. 7. minutorum primorum 43, hoc est, minutorum primorum 39343, erit  $4\sqrt{2}$ , ad 1, hoc est, quam proximè 565685, 100000, ut 39343, ad 6955. 5, seu dies 4, hor. 19, min. primorum 55, & secund. 30, tempus quo luna cadendo ad centrum telluris perveniret.

(1) \* Patet per prop. XXXV. Cum enim semicirculorum  $ADS$ ,  $OKH$ , & sectorum  $OSK$ ,  $ASD$ , areæ æquales sint respectivè, erit quoque sector  $OSK$  æqualis segmento  $SED$ , adeoque (401.) tempus quo corpus

ex  $A$  cadendo percurrit  $CS$ , æquatur tempori, quo corpus aliud in circulo  $OKH$  revolvens describit arcum  $KH$ , & quoniam tempus per  $AS$  cadendo æquatur tempori quo corpus revolvens totum semicirculum  $OKH$ , describit (401), erit tempus per  $AC$ , æquale tempori per arcum  $OK$ .

403. Coroll. Arcus  $OK$ , æqualis est summæ arcus  $AD$  & lineæ  $CD$ . Est enim sector  $ASD$ , æqualis sectori  $AOD$ , & triangulo  $DOS$ , sive  $\frac{1}{2} AO \times AD + \frac{1}{2} AO \times CD$ : sector verò  $OSK$ ,  $= \frac{1}{2} SO \times OK = \frac{1}{2} AO \times OK$ , sed est sector  $OSK = ASD$ . Quare  $\frac{1}{2} AO \times OK = \frac{1}{2} AO \times AD + \frac{1}{2} AO \times CD$ , atque adeò  $OK = AD + CD$ . Si itaque fiat ut radius ad arcum grad. 57. 29578, qui radio æqualis est, ita  $CD$ , ad 4<sup>ma</sup>.  $B$ , erit  $B$  arcus rectæ  $CD$  æqualis, & obtinebitur  $OK = AD + B$ . Hinc dato tempore quo corpus datam  $AS$  ex puncto  $A$  cadendo percurrit, invenitur tempus quo datam rectæ  $AS$  partem  $AC$  describit, si fiat ut semicirculus  $OKH$ , seu grad. 180, ad arcum  $AD + B$ , seu  $OS$ , ita tempus quo corpus ex  $A$  cadendo percurrit  $AS$ , ad tempus quo percurrit  $AC$ .

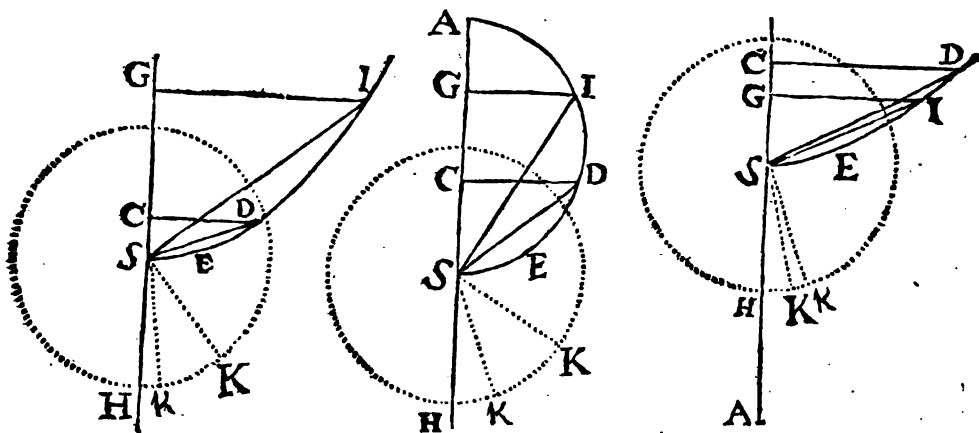
DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XXXVII.

## PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XXVI:

*Corporis de loco dato sursum vel deorsum projecti definire tempora  
ascensus vel descensus.*

Exeat corpus de loco dato  $G$  secundum lineam  $GS$  cum ve-



locitate quâcumque. In duplicatâ ratione hujus velocitatis ad uniformem in circulo velocitatem, quâ corpus ad intervallum datum  $SG$  circa centrum  $S$  revolvi posset, cape  $GA$  ad  $\frac{1}{2} AS$ . Si ratio illa est numeri binarii ad unitatem, punctum  $A$  infinite distat, quo casu parabola vertice  $S$ , axe  $SG$ , latere quovis recto describenda est. Patet hoc *per prop. XXXIV*. Sin ratio illa minor vel major est quam 2 ad 1, priore casu circulus; posteriore hyperbola rectangula super diametro  $SA$  describi debet. (\*) Patet *per prop. XXXIII*. Tum centro  $S$ , intervallo æquan-

(\*) \* *Pate per Prop. XXXIII*. Scilicet, fingatur sectio conica latitudinis quam minimæ, ut proximè coincadat cum axe  $AB$ , & in ea fingatur esse punctum  $G$  ex quo corpus movetur cum datâ velocitate, primo quæritur species illius sectionis, & ex proportionem velocitatis datæ ad velocitatem quâcum corpus ad intervallum datum  $S-G$  circa Centrum  $S$  revol-

veretur, agnoscetur, ex *Cor. 7. Prop. XVI* & si sit Ellipsis vel Hyperbola ejus axis major ex velocitate in  $G$  datâ etiam innotescet, per *Prop. XXXIII*. quia velocitas corporis cadentis in puncto  $G$ , est ad velocitatem corporis in distantia  $SG$  revolvantis in subduplicatâ ratione distantie puncti  $G$  à vertice ulteriore Ellipsis vel Hyperbolæ ad ejus semi-Axem, unde

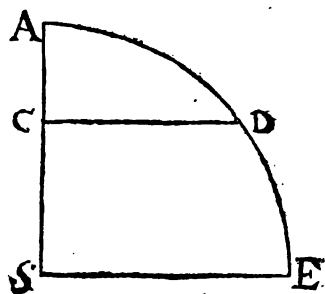
# PRINCIPIA MATHEMATICA. 303

æquante dimidium lateris recti, describatur circulus  $HkK$ , & De Mo.  
ad corporis descendens vel ascendens locum  $G$ , & locum TU COR-  
alium quemvis  $C$ , erigantur perpendiculara  $GI$ ,  $CD$  occurren- FORUM-  
tia conicæ sectioni vel circulo in  $I$  ac  $D$ . Dein junctis  $SI$ , PRIMUS.  
 $SD$ , fiant segmentis  $SEIS$ ,  $SEDS$  sectores  $HSK$ ,  $HSk$  PROP.  
æquales, & per prop. xxxv. corpus  $G$  describet spatium  $GC$  XXXVII.  
eodem tempore quo corpus  $K$  describere potest arcum  $Kk$ .  
*Q. E. F.*

## PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XII.

*Posito quod vis centripeta proportionalis sit altitudini seu distantie lo-  
corum à centro, dico quod cadentium tempora, velocitates &  
spatia descripta sunt arcibus, arcuumque sinibus rectis & sinibus  
versis respectivè proportionalia.*

Cadat corpus de loco quovis  $A$  se-  
cundum rectam  $AS$ ; & centro virium  
 $S$ , intervallo  $AS$ , describatur circuli  
quadrans  $AE$ , sitque  $CD$  sinus rec-  
tus arcus cujusvis  $AD$ ; & corpus  $A$ ,  
tempore  $AD$ , cadendo describit spa-  
tium  $AC$ , inque loco  $C$  acquirat velo-  
citatem  $CD$ .



*Demon-*

unde si fiat  $GA$  ad  $\frac{1}{2} SA$  in duplicatâ  
ratione velocitatis in  $G$  ad velocitatem  
corporis in distantia  $SG$  revolvantis, erit  
 $A$  vertex alterius Ellipsis vel Hyperbolæ,  
&  $\frac{1}{2} SA$  semi-Axis quæsitus.

Fiat ergo in vertice  $S$  Parabola quæ-  
vis, si curva evanescens in qua  $G$  est, sit  
Parabola, vel fiat Circulus, vertice  $S$ ,  
Diametro  $SA$ , si sit Ellipsis; vel Hyper-  
bola æquilatere eodem Diametro si ea cum

va sit Hyperbola, & si Corpus ex  $G$  per-  
veniat in  $C$ , erectis usque ad curvas de-  
scriptas perpendicularibus  $GI$ ,  $CD$ , erunt  
segmenta  $SEI$ ,  $SED$  proportionalia tem-  
poribus quibus corpus propositum ex  $G$   
ad  $S$ , & ex  $C$  ad  $S$  movebitur per Prop.  
XXXII: Sed per Prop. XXXV, corpus  
 $G$  spatia  $GS$ ,  $CS$ , iisdem temporibus  
cadendo percurrit, quibus corpus  $K$ , de-  
scribit arcus  $KH$ ,  $kH$ ; eodem igitur tem-  
pore percurritur  $GC$ , quo  $Kk$ .

DE MO- (u) Demonstratur eodem modo ex propositione x, quo pro-  
TU COR- positio xxxii, ex propositione xi demonstrata fuit.

PORUM.

LIBER

PRIMUS.

PROP.

xxxviii.

Corol. 1. (x) Hinc æqualia sunt tempora, quibus corpus unum de loco A cadendo pervenit ad centrum S, & corpus aliud revolviendo describit arcum quadrantalem ADE.

Corol. 2. Proinde æqualia sunt tempora omnia quibus corpora de locis quibuscumque ad (v) usque centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per corol. iii. prop. iv.) æquantur,

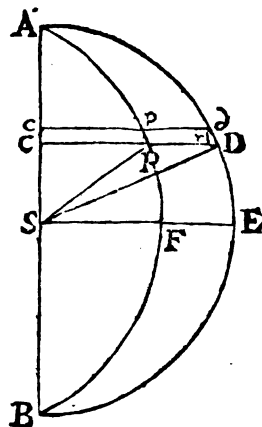
PRO-

(u) \* 404. Demonstratur eodem modo. Nam si corpus non cadit perpendiculariter, describit id (per Cor. 1. Prop. X.) ellipsum aliquam APFB, cujus centrum congruit cum centro virium S; Super hujus ellipseos axe majore AB, describatur semicirculus ADB, & per corpus decedens transeat recta DPC perpendicularis ad axem; actisque DS, PS, erit area ASD, area ASP, atque adeo etiam tempori proportionalis. Manente axe AB, minuatur perpetuo latitudo Ellipseos, & semper manebit area ASD, tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum, & orbe APB jam coincidente cum axe AB, puncto P cum C, & F cum S, descendet corpus in recta AC, & area ASD, seu huic proportionalis arcus AD, evadet tempori proportionalis. In recta AC capiatur linea quam minima Cc, agaturque cd, parallela CD, & circulum secans in puncto d, ex quo ad CD, demittatur perpendicularum dr, & arcus Dd proportionalis erit tempori quo percurritur Cc, (ex demonstr.) atque adeo coeuntibus punctis Cc, & dD, erit ve-

locitas in C, ut  $\frac{Cc}{Dd}$  (s, 145), sed ob triangula Drd, SCD, similia Cc, seu  $d r : d D = C D : S D$ , id est,  $\frac{Cc}{d D} = \frac{C D}{S D}$ .

Quare velocitas in loco C, est ut  $\frac{C D}{S D}$ , hoc est, ob constantem SD, ut CD. Q. E. D.

(x) \* Cor. 1. Hinc æqualia. Nam



per coroll. 2. prop. X. tempora revolutionum in ellipsis quibuscumque APF, ADB, adeoque & tempora per ellipseon quadrantes APF seu AS, ADE, sunt æqualia.

(y) \* Ad usque centrum. Ex quiete cadunt.

405. Æqualia sunt tempora quibus corpus unum de loco A cadendo pervenit ad locum C, & corpus aliud revolviendo describit arcum circuli AD; Cum enim corpus in circulo uniformiter revolvatur, erit tempus per AD ad tempus per AE seu ad tempus per AS, ut arcus AD, ad quadrantem AE, sed est etiam tempus per AC, ad tempus per AS, ut arcus AD, ad quadrantem AE, ergo tempus per AC, æquatur tempori per AD.

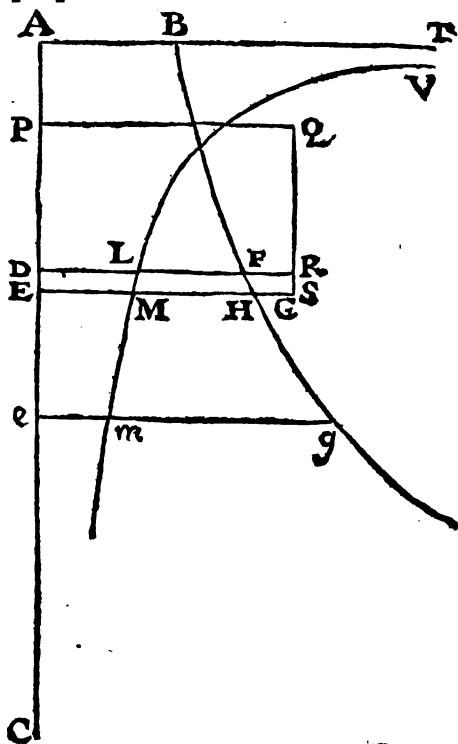
PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XXVII.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XXXIX.

*Posita cujuscunque generis vi centripetâ, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis rectâ ascendentis vel descendens tam velocitas in locis singulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.*

De loco quovis  $A$  in rectâ  $ADEC$  cadat corpus  $E$ , <sup>(2)</sup> de-  
que loco ejus  $E$  erigatur semper perpendicularis  $EG$ , vi cen-  
tripetæ in loco illo ad centrum  
 $C$  tendenti proportionalis: Sit-  
que  $BFG$  linea curva quam  
punctum  $G$  perpetuò tangit.  
Coincidat autem  $EG$  ipso mo-  
tûs initio cum perpendiculari  
 $AB$ , & erit corporis velocitas  
in loco quovis  $E$  <sup>(a)</sup> ut recta,  
quæ potest aream curvilineam  
 $ABGE$ . *Q. E. I.*

In  $EG$  capiatur  $EM$  rectæ;  
quæ potest aream  $ABGE$ , re-  
ciprocè proportionalis, & sit  
 $VLME$  linea curva, quam punc-  
tum  $M$  perpetuo tangit, & cu-  
jus asymptotos est recta  $AB$  pro-  
ducta; & erit tempus, quo cor-  
pus cadendo describit lineam  $AE$ ,  
ut area curvilinea  $ABTVME$ .  
*Q. E. I.*



Ete-

(2) \* Deque loco ejus  $E$ . Id est, per om-  
nia lineæ  $AC$  puncta erigantur perpendicu-  
la ut  $EG$ , vi centripetæ in singulis illis  
punctis proportionalia, sitque  $BFG$  curva  
ad quam omnia illa perpendiculara terminen-  
tur. Possunt autem perpendiculara illa ad ar-  
bitrium assumi, dummodò singula vi centri-  
petæ in singulis locis proportionalia sint.

Tom. I.

(a) Ut recta, quæ potest aream curvilineam  
 $ABGE$ . In prioribus Editionibus erat, ut  
area curvilinea  $ABGE$  latus quadratum; hæ  
scilicet phrasæ synonymæ sunt; phrasis quæ  
hic juxta Editionem Londinensem adhibe-  
tur, veteribus Geometris est familiaris: Ea  
autem linea quæ potest figuram datam, est  
linea cujus quadratum est æquale illi figuræ  
datæ.

Q 9



neolam  $DE$ , ut lineola illa directè & velocitas  $V$  inversè,  $DE$  Mo-  
estque vis ut velocitatis incrementum  $I$  directè & tempus inversè,  $TU$  COR-  
ideoque si primæ nascentium rationes sumantur, ut  $\frac{I \times V}{DE}$ , hoc LIBER  
est, ut longitudo  $DF$ . Ergo vis ipsi  $DF$  vel  $EG$  proportio- PRIMUS.  
nalis facit ut corpus eâ cum velocitate descendat, quæ sit ut rec- XXXIX.  
ta quæ potest aream  $ABGE$ . Q. E. D.

(c) Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ li-  
neola  $DE$  describatur, sit ut velocitas inversè, ideoque inver-  
sè ut linea recta quæ potest aream  $ABFD$ ; (d) sitque  $DL$ ,  
atque ideo area nascens  $DLME$ , ut eadem linea recta in-  
versè: erit tempus ut area  $DLME$ , & summa omnium tem-  
porum ut summa omnium arearum, hoc est (per corol. lem.  
I v.) tempus totum quo linea  $AE$  describitur ut area tota  
 $ATVME$ . Q. E. D.

Corol. 1. Si  $P$  sit locus, de quo corpus cadere debet, ut ur-  
gente aliquâ uniformi vi centripetâ notâ (qualis vulgo supponitur  
gravitas) velocitatem acquirat in loco  $D$  æqualem velocitati,  
quam corpus aliud vi quâcunque cadens acquisivit eodem loco  
 $D$ , & in perpendiculari  $DF$  capiatur  $DR$ , quæ sit ad  $DF$  ut  
vis illa uniformis ad vim alteram in loco  $D$ , & compleatur rec-  
tangulum  $PDRQ$ , eique æqualis abscindatur area  $ABFD$ ;  
erit  $A$  locus de quo corpus alterum cecidit. Namque comple-  
to rectangulo  $DRSE$ , (e) cum sit area  $ABFD$  ad aream  
 $DFGE$  ut  $VV$  ad  $2VI$ , ideoque ut  $\frac{1}{2}V$  ad  $I$ , id est, ut se-  
missis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi  
inæ-

(c) \* Porro cum tempus. Tempus enim  
est ut spatium uniformiter percursum di-  
rectè & velocitas inversè (5), quare si  
spatium constans fuerit, tempus est ut ve-  
locitas inversè.

(d) \* Siue  $DL$ . Est enim  $DL$ ,  
ut  $DL$  in constantem  $DE$  ducta, hoc est,  
ut area nascens  $DLME$ , sed  $DL$  est ut la-  
tus quadratum areæ  $ABFD$  inversè (per  
constr.) ergo area nascens  $DLME$ , est  
ut idem latus quadratum inversè, hoc est,  
ut velocitas inversè, sive, ut tempus per

$DE$ . Quare summa omnium temporum est  
ut summa omnium arearum nascentium. Hoc  
est, &c.

(e) \* Cum (coeuntibus punctis  $D, E$ )  
sit area  $ABFD$  ad aream  $DFGE$ , ut  $VV$ ,  
ad  $2V \times I$ ; Si enim  $A$  sit locus ex quo cor-  
pus cadere debet vi quâcunque ut eam-  
dem in  $D$  velocitatem  $V$  acquisiverit ac si  
ex  $P$  vi gravitatis decidisset, erit area  $ABFD$ ,  
ut  $VV$ , & area  $DFGE$ , ut  $2VI + II$ ,  
hoc est, (406) ut  $2VI$ . Quare  $ABFD$ :  
 $DFGE = VV : 2VI = \frac{1}{2}V : I$ .

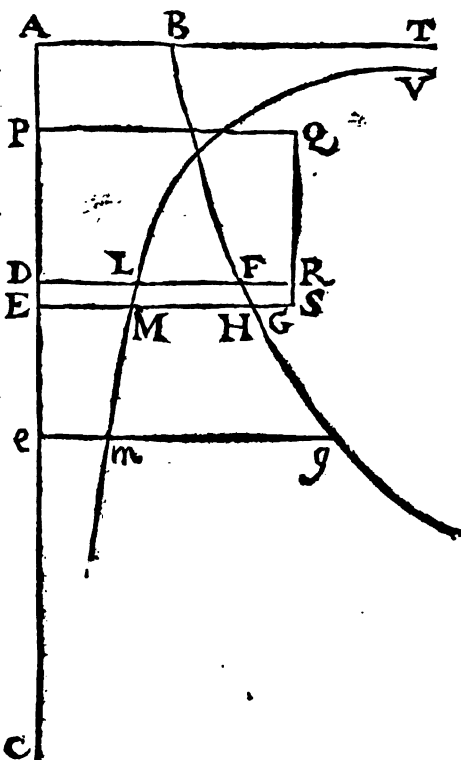


DE Mo-inæquabili cadentis ; (f) & simi-  
TU COR-liter area  $PQRD$  ad aream  
FORUM.  $DRSE$  ut semissis velocitatis  
LIBER totius ad incrementum velocita-  
PRIMUS. tis corporis uniformi vi caden-  
PROP. tis ; sintque incrementa illa ( ob

æqualitatem temporum nascentium ) ut vires generatrices, id est, ut ordinatim applicatæ  $DF$ ,  $DR$ , ideoque ut areæ nascentes  $DFGE$ ,  $DRSE$  ; erunt ex æquo areæ totæ  $ABFD$ ,  $PQRD$  ad invicem ut semisses totarum velocitatum , & propterea , ob æqualitatem velocitatum , æquantur.

Corol. (g) 2. Unde si corpus quodlibet de loco quocunque  $D$  datâ cum velocitate vel sursum vel deorsum projiciatur, &  $C$

detur lex vis centripetæ , invenietur velocitas ejus in alio quovis loco



(f) \* Et similiter area  $PQRD$  ad aream  $DRSE$ , hoc est, linea  $PD$  ad lineam  $DE$  ( propter altitudinem communem  $DR=SE$  ) ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis , scilicet cum velocitas in  $D$  sit  $V$ , ejus incrementum in  $E$  sit  $X$ , ex naturâ gravitatis altitudines ex quibus corpus cadit sunt ut quadrata velocitatum in fine lapsus acquisitarum, ergo erit  $PD$  ad  $PE$  ut  $VV$  ad  $VV + 2 V X + X^2$ , & dividendo  $PD : DE = VV : 2 V X + X^2$  (& omisso  $X^2$  ut pote infinite parvo)  $VV : 2 T X = \frac{1}{2} V : X$  ; unde  $PQRD : DRSE = \frac{1}{2} V : X$ , sive invertendo  $DRSE : PQRD = X : \frac{1}{2} V$  ; sunt verò incrementa illa  $I$  &  $X$  ( 13 ) ut vires generatrices id est ut  $DF$  ad  $DR$ , sive ut  $DFGE$  ad  $DRSE$ . Est ergo per hanc demonstrationem.

$$ABFD : DFGE = \frac{1}{2} V : I$$

$$DFGE : DRSE = DF : DR = I : X$$

$$DRSE : PQRD = X : \frac{1}{2} V$$

Unde ex compositione rationum  $ABFD : PQRD = \frac{1}{2} V \times I \times X : I \times X \times \frac{1}{2} V$  sive in ratione æqualitatis.

(g) \* Coroll. 2. demonstratur. Sit  $A$  punctum ex quo corpus cadere debet ut acquirat in loco  $D$  velocitatem cum quâ sursum vel deorsum projicitur, erit, ( ex Dem. ) area  $ABge$  proportionalis quadrato velocitatis corporis in loco  $e$  : Est autem ( ex Dem. ) area  $ABFD$ , æqualis rectangulo  $PQRD$ , adeoque area  $ABge = PQRD + DFge$  & si locus  $e$  loco  $D$  inferior fuerit, &  $ABge = PQRD = DFge$ , si locus  $e$  loco  $D$  superior, hoc est, si corpus sursum projectum sit; ergo velocitas

cor-

loco  $e$ , erigendo ordinatam  $eg$ , & capiendo velocitatem illam  $De$  Mo-  
ad velocitatem in loco  $D$  ut est recta, quæ potest rectangu-  
lum  $PQRD$  areâ curvilineâ  $DFge$  vel auctum, si locus  $e$   
est loco  $D$  inferior, vel diminutum, si is superior est, ad rec-  
tam quæ potest rectangulum solum  $PQRD$ .

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS:  
PROP.

*Corol. 3.* Tempus quoque innotescet erigendo ordinatam  $e$  *m xxxix.*  
reciproce proportionalem lateri quadrato ex  $PQRD$  vel  $DFge$ ,  
& capiendo tempus quo corpus descripsit lineam  $De$  ad tempus  
quo corpus alterum vi uniformi cecidit à  $P$  & cadendo pervenit  
ad  $D$ , ut area curvilinea  $DLme$  ad rectangulum  $2PD \times DL$ .  
Namque tempus quo corpus vi uniformi descendens de-  
scripsit lineam  $PD$  est ad tempus quo corpus idem descrip-  
sit lineam  $PE$  in  $(h)$  subduplicatâ ratione  $PD$  ad  $PE$ , id est  
(lineola  $DE$  jamjam nascente) in ratione  $PD$  ad  $PD + \frac{1}{2}DE$   
seu  $2PD$  ad  $2PD + DE$ , &  $(i)$  divisim, ad tempus quo  
corpus idem descripsit lineolam  $DE$  ut  $2PD$  ad  $DE$ , ideo-  
que ut rectangulum  $2PD \times DL$  ad aream  $DLME$ ; estque tem-  
pus quo corpus utrumque descripsit lineolam  $DE$  ad tempus  
quo corpus alterum inæquabili motu descripsit lineam  $De$ , ut  
area  $DLME$  ad aream  $DLme$ , & ex æquo tempus primum  
ad tempus ultimum ut rectangulum  $2PD \times DL$  ad aream  
 $DLme$ .

corporis in loco  $e$ , est ut  $\sqrt{PQRD \mp DFge}$ ;  
cumque sit velocitas in  $D$ , ut  $\sqrt{ABFD}$ , siue  
ut huic æqualis  $\sqrt{PQRD}$  (*ex Dem.*) erit  
velocitas in  $e$ , ad velocitatem in  $D$ , ut  
 $\sqrt{PQRD \mp DFge}$ , ad  $\sqrt{PQRD}$ .

$(h)$  \* In subduplicatâ ratione  $PD$ , ad  
 $PE$  (27), id est, lineola  $DE$ , jamjam nas-  
cente in ratione  $PD$ , ad  $PD + \frac{1}{2}DE$ ;  
quadratis enim his ultimis terminis fiet  
 $PD^2 : PD^2 + PD \times DE + \frac{1}{4}DE^2$ ; &  
cum sit  $PD$  quantitas finita; &  $DE$  nas-  
cens, evanescit (107)  $\frac{1}{4}DE^2$  res-  
pectu  $PD \times DE$ ; adeoque  $PD \times DE \mp$   
 $\frac{1}{4}DE^2 = PD \times DE$ . Unde est  $PD^2 :$   
 $PD^2 + PD \times DE + \frac{1}{4}DE^2 = PD^2 : PD^2$

$+ PD \times DE = PD : PD + DE$ , seu  $PE$ ;  
est igitur  $PD : PE$  in ratione duplicatâ  $PD$   
ad  $PD + \frac{1}{2}DE$ , atque adeò  $PD$  ad  $PD$   
 $+ \frac{1}{2}ED$ , in ratione subduplicatâ  $PD$ , ad  
 $PE$ .

$(i)$  \* Et divisim. Tempus per  $PD$ ,  
vi uniformi descriptum est ad tempus per  
 $DE$ , ut  $2PD$ , ad  $DE$ , adeoque ut rec-  
tangulum  $2PD \times DL$ , ad rectangulum  
 $DE \times DL$ , seu ad aream  $DLME$ ; tem-  
pus per rectam  $PD$ , vi uniformi descriptam  
sit  $T$ , tempus per  $DE$ , sit  $\theta$ , & tempus per  
 $De$ , sit  $t$ , erit (*ex Dem.*)  $T : \theta = 2PD \times$   
 $DL : DL \times ME$ , estque idem tempus  $\theta$ , quo  
utrumque corpus describit lineam  $DE$ , si-  
quidem utriusque eadem est velocitas in  $D$ ;  
sed (*ex constructione*) tempus quo corpus

# 310 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

**DE MOTU CORP. FORUM. LIBER PRIMUS. PROPOSITION. XXXIX.** inæquabili motu describit lineam DE est ad tempus quo describit lineam DE, ut area DLM E, ad aream D L m e, ergo  $t : D L M E :: D L m e$ ; undè ex æquo  $T : t = 2 P D \times D L : D L m e$ .

407. Sit spatium à corpore cadente descriptum  $A E = x$ , velocitas in E acquisita  $= v$ , tempus quo A E, percurritur  $= t$ , vis centripeta in E, hoc est,  $E G = y$ , erunt  $dx, dv, dt$ , quantitates  $x, v, t$ , fluxiones seu incrementa nascentia vel evanescencia (146. 158), cumque velocitas per spatium nascent DE, sit uniformis (145) erit  $v = \frac{dx}{dt} (5)$ , ac proinde velocitatis

incrementum  $dv = \frac{ddx}{dt}$ , si sumatur  $dt$ , constans (164) sed est (13)  $y = \frac{dv}{dt}$ , adeo-

que si loco  $dv$ , substituatur  $\frac{ddx}{dt}$ , invenietur  $y = \frac{ddx}{dt^2}$ . Hæ sunt formulæ quas tradidit Varignonius in Comm. Paris. an. 1700. Harum formularum ope, datâ inter duas ex variabilibus quatuor  $y, x, v, t$ , æquatione quâvis, obtinebuntur tres æquationes quæ simul quatuor duntaxat variables complectentur, ex quibus proinde æquationibus per calculum fluxionum & solitas reductiones inveniri poterit æquatio inter duas quaslibet ex quatuor variabilibus  $y, x, v, t$ , ut demonstravit Varignonius in Comm. Paris. an. 1700, qui in iisdem Commentariis an. 1707. 1710. præclara de ascensu & descentu corporum perpendiculari theoremata edidit.

408. Coroll. Cum sit juxta superiores formulas  $dt = \frac{dx}{v}$ , &  $dt = \frac{dv}{y}$ , ac proinde  $\frac{dx}{v} = \frac{dv}{y}$ , vel  $y dx = v dv$ , erit  $S. y dx = \frac{1}{2} v^2$ . Sed  $y dx = E G \times DE$ , seu fluxioni areæ ABGE; ergo (147)  $S. y dx =$  areæ ABGL,  $= \frac{1}{2} v^2$ , &  $v = \sqrt{2 ABGE}$ . Est igitur ob constantem 2, velocitas in

loco E, ut recta quæ potest aream curvilineam ABGE. Hinc est ius. cæius Prop.

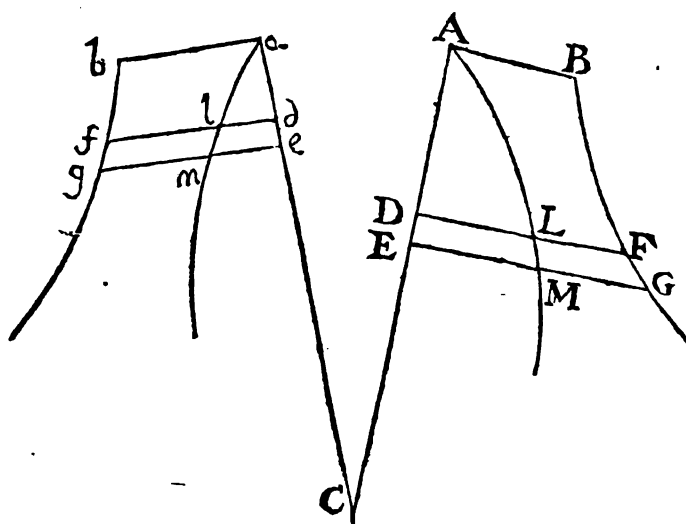
XXXIX. Newt. Quoniam verò  $dt = \frac{dx}{v}$

$$\& v = \sqrt{2 ABGE}, \text{ erit } dt = \frac{dx}{\sqrt{2 ABGE}};$$

Quare si capitur  $EM = \frac{x}{\sqrt{2 ABGE}}$ , erit  $dt = EM \times dx = EM \times DE$ , & sumptis utrinque fluentibus  $t =$  area ALME. Hic est cæius 2us. Prop. XXXIX. Newt.

409. Superior expressio vis centripetæ  $y = \frac{dv}{dt}$  si vis centripeta consideretur ut gravitas in centrum, supponit massam corporum aut eandem esse aut ponderibus proportionalem. Verùm si pondera non sint massis proportionalia, diversæque inter se massæ conferantur, tum habenda est massarum ratio ut determinetur tota corporis gravitas, seu vis tota quæ centrum versus urgetur. Sit vis illa  $= y$ , & massa  $= m$ ,

erit quidem semper  $v = \frac{dx}{dt} (5)$ , at fiet  $y = \frac{mdv}{dt}$ . Etenim vis centripeta considerari potest ut potentia motrix, quæ corpori indefinenter applicata, motum in eo suâ actione producit, quæque tempulculo evanescente eadem constanter permanet, & uniformiter agit (117). Porro factum ex potentia motrice uniformiter agente & tempore actionis æquivalet quantitati actionis; crescit enim actionis quantitas cum potentia motrice & tempore actionis proportionaliter, & factum ex massa corporis & celeritate, seu quantitas motus producti est id quod actione illâ effectum est; seu quantitati actionis æquipollet, cum necessarius sit nexus inter quantitatem actionis & quantitatem effectus & alter alteri æquivalet. Quare  $y dt = m dv$ , &  $y = \frac{mdv}{dt}$ .



410. Si itaque pondera non supponantur massis proportionalia, & corpora duo  $A, a$ , quorum massæ  $M, m$  ad idem vel diversa virium centra  $C$ , perpendiculariter cadant, earumque vires centripetæ in singulis locis  $E, e$ , sint  $Y = EG, y = eg$ , velocitates  $V, v$ , spatia descripta  $X = AE, x = ae$ , tempora quibus descripta sunt  $T, t$ , invenietur (409)  $v = \frac{dx}{dt}, V = \frac{dX}{dT}$ , &  $ydt = m dv, YdT = MdV$ , adeoque (408),  $S. ydx = abge = \frac{1}{2}mvv$ ; & similiter  $S. YdX = ABGE = \frac{1}{2}M\dot{V}V$ , ob constantes  $M, m$ ; unde  $v = \frac{\sqrt{2abge}}{m}, V =$

$\frac{\sqrt{2ABGE}}{M}$ : proindeque  $v:V = \frac{\sqrt{2abge}}{m} : \frac{\sqrt{2ABGE}}{M}$ . Quare  $dt = \frac{dx}{v} = \frac{dx\sqrt{m}}{\sqrt{2abge}}$ , &  $dT = \frac{dX\sqrt{M}}{\sqrt{2ABGE}}$ ; unde si ponatur  $e m = \frac{1}{\sqrt{2abge}}$  &  $EM = \frac{1}{\sqrt{2ABGE}}$ , erit  $dt = de \times em \times \sqrt{m}$ , &  $dT = DE \times EM \times \sqrt{M}$ , ac consequenter  $t = alme \times \sqrt{m}$ : &  $T = ALME \times \sqrt{M}$ . Unde  $t:T = alme \times \sqrt{m} : ALME \times \sqrt{M}$ .

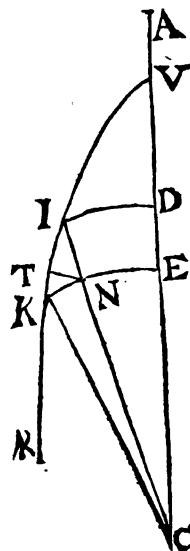
## S E C T I O V I I I .

*De inventione orbium in quibus corpora viribus quibuscunque centripetis agitata revolvuntur.*

## PROPOSITIO XL. THEOREMA XIII.

*Si corpus, cogente vi quâcunque centripetâ, moveatur utcunque, & corpus aliud rectâ ascendat vel descendat, sintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.*

Descendat corpus aliquod ab  $A$  per  $D$ ,  $E$ , ad centrum  $C$ , & moveatur corpus aliud a  $V$  in lineâ curvâ  $VIKk$ . Centro  $C$  intervallis quibuscunque describantur circuli concentrici  $DI$ ,  $EK$  rectâ  $AC$  in  $D$  &  $E$ , curvæque  $VIK$  in  $I$  &  $K$  occurrentes. Jungatur  $IC$  occurrens ipsi  $KE$  in  $N$ ; & in  $IK$  demittatur perpendicularum  $NT$ ; sitque circumferentiarum circulorum intervallum  $DE$  vel  $IN$  quam minimum, & habeant corpora in  $D$  &  $I$  velocitates æquales. Quoniam distantiae  $CD$ ,  $CI$  æquantur, erunt vires centripetæ in  $D$  &  $I$  æquales. Exponentur hæ vires per æquales lineolas  $DE$ ,  $IN$ ; & si vis una  $IN$  (per legum corol. 2.) resolvatur in duas  $NT$  &  $IT$ , vis  $NT$ , agendo secundum lineam  $NT$  corporis cursui  $ITK$  perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in cursu illo, sed retrahet solummodo corpus à cursu rectilineo, facietque ipsum de orbis tangente perpetuo deflectere, inque viâ curvilineâ  $ITKk$  progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota consumetur: vis autem altera  $IT$ , secundum corporis cursum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit



erabit sibi ipsi proportionalem. (\*) Proinde corporum in *DE* & *I* accelerationes æqualibus temporibus factæ (si sumantur linearum nascentium *DE*, *IN*, *IK*, *IT*, *NT* rationes primæ) sunt ut lineæ *DE*, *IT*: temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora autem quibus *DE* & *IK* describuntur, ob æqualitatem velocitatum sunt ut *XL*.

viæ descriptæ *DE* & *IK*, ideoque accelerationes, in cursu corporum per lineas *DE* & *IK*, sunt ut *DE* & *IT*, *DE* & *IK* conjunctim, id est ut *DE quad.* & *IT × IK rectangulum*.

(<sup>1</sup>) Sed *rectangulum IT × IK* æquale est *IN quadrato*, hoc est, æquale *DE quad.* & propterea accelerationes in transitu corporum à *D* & *I* ad *E* & *K* æquales generantur. Æquales igitur sunt corporum velocitates in *E* & *K*: & eodem argumento semper reperientur æquales in subsequentibus æqualibus distantis. *Q. E. D.*

Sed & (<sup>m</sup>) eodem argumento corpora æquivelocia & æqualiter à centro distantia, in ascensu ad æquales distantias æqualiter retardabuntur. *Q. E. D.*

*Corol. 1.* Hinc si corpus vel oscilletur pendens à filo, vel impedimento quovis politissimo & perfecte lubrico cogatur in lineâ curvâ moveri, & corpus aliud rectâ ascendat vel descendat,

(\*) \* Proinde corporum in *D* & *I* accelerationes æqualibus temporibus factæ sunt ut lineæ *DE*, *IT*. Sunt enim vires acceleratrices ut accelerationes nascentes, seu celeritatum incrementa nascentia directè & tempora inversè (13), undè temporibus æqualibus accelerationes nascentes sunt ut vires acceleratrices, temporibus autem inæqualibus ut vires acceleratrices & tempora conjunctim; sed lineæ *DE*, *IT*, sunt ut vires acceleratrices in directionibus *DE*, *IT*; ergò corporum in *D* & *I* accelerationes æqualibus temporibus factæ sunt ut lineæ *DE*, *IT*; temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim.

(1) \* Sed *rectangulum IT × IK* æquale est *IN quadrato*, cum sit *KN* in angulus rectus, & linea *NT* ab basim *IK*

Tom. I.

normalis; adeoque crux *IN* medium proportionale inter hypothenusam *IK* & illius abscissam *IT*.

(m) 411. Et eodem argumento. Vis enim acceleratrix motum corporis ascendentis eodem modo retardat, quo motum descendentis accelerat in iisdem locis (25); undè vera est propositio sive corpus utrumque descendat aut ascendat, sive descendente uno, alterum ascendat.

412. Si centrum *C* in infinitum abeat, rectæ *AC*, *IC* sunt parallelæ & arcus *DI*, *EK* in rectas, lineis *AC*, *IC* perpendiculares, mutantur. Valer igitur propositio etiam ubi vis centripetæ directio *AC*, *IC* sibi perpetuò parallela est, dummodò puncta *D*, *I* æque alta sint, hoc est, in eadem rectâ ad directionem vis centripetæ perpendiculari sumantur.

Rr

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XL.

dat, sintque velocitates eorum in eâdem quâcunque altitudi-  
ne æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuscunque æquali-  
bus altitudinibus æquales. Namque corporis penduli filo vel  
(<sup>n</sup>) impedimento vasis absolute lubrici idem præstatur quod vi  
transversâ *NT*. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, sed  
tantum cogitur de cursu rectilineo discedere.

*Corol. 2.* Hinc etiam si quantitas *P* sit maxima à centro di-  
stantia, ad quam corpus vel oscillans vel in trajectoriâ quâcun-  
que revolvens, deque quovis trajectoriæ puncto, eâ quam ibi  
habet velocitate sursum projectum ascendere possit; sitque quan-  
titas *A* distantia corporis à centro in alio quovis orbitæ puncto;  
& vis centripeta semper sit ut ipsius *A* dignitas quælibet  $A^{n-1}$ ,  
cujus index  $n-1$  est numerus quilibet  $n$  unitate diminutus; ve-  
locitas corporis in omni altitudine *A* erit ut  $\sqrt{P^n - A^n}$ , atque  
ideo datur. (°) Namque velocitas rectâ ascendentis ac descen-  
dentis (*per prop. XXXIX.*) est in hâc ipsâ ratione.

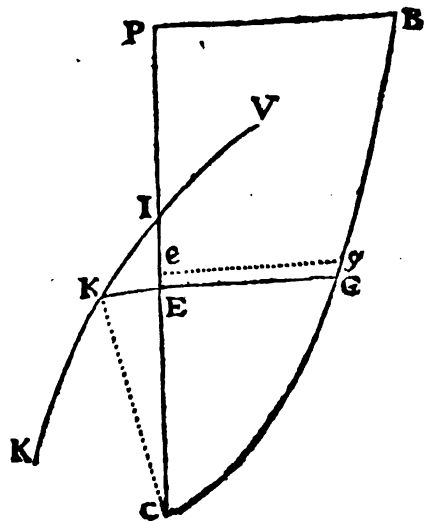
(<sup>n</sup>) \* *Impedimento vasis.* (Vid. not.  
83. 86. 89. 90. 91.)

(°) 413. *Namque velocitas rectâ ascenden-  
tis ac descendens* (*per prop. XXXIX.*)

*est in hâc ipsâ ratione*  $\sqrt{P^n - A^n}$ ; Sit  
enim centrum virium *C*, distantia *CP* ex  
quâ corpus incipit cadere dicatur *P*, vis-  
que centripeta sit semper ut abscissarum  
*CE* (quæ dicuntur *A* in hoc Corollario) di-  
gnitas  $n-1$ , erigantur in omnibus punctis *E*  
perpendiculares *EG* vi centripetæ  $CE^{n-1}$ ,  
proportionales, perpendicularis *PB* in pun-  
cto *P* erecta dicatur *b*, & per omnium perpen-  
dicularium vertices iungatur curva, dicantur  
æ abscissæ *CE*, dicantur *y* ordinatæ *EG*, erit  
 $b : y = P^{n-1} : x^{n-1}$ , ideoque  $y = \frac{b x^{n-1}}{P^{n-1}}$ .

Unde liquet curvam hanc esse generis Pa-  
rabo licæ & ejus quadraturam facile obti-  
neri. sit enim  $Ee = dx$  fluxio abscissæ *CE*,  
erit  $EegG = y dx$  fluxio areæ *CEG*, &  
loco *y* posito ejus valore  $\frac{b x^{n-1}}{P^{n-1}}$  erit  $y dx$

$= \frac{b x^{n-1}}{P^{n-1}} dx$ , cujus fluxus est (165)

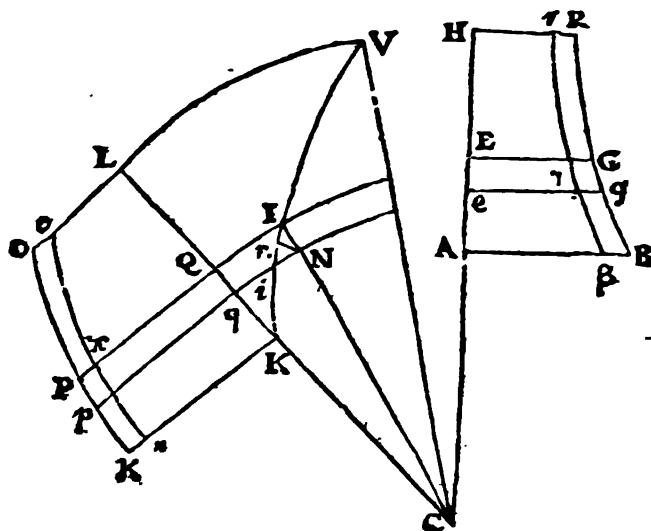


$\frac{b x^n}{n P^{n-1}}$ ; quæ exprimit aream quæ re-  
spondet abscissæ  $x$ , sive *A*, itaque delectis  
con-





DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XL.



Et lapsu corporis  $M$  sit  $dT$ ; Erit (13 & 409) vis centripeta  $F$  five  $EG = \frac{M \times dV}{dT}$ , &

(5)  $ds = V dT$ . Unde erit  $EG \times ds$  five fluxio areæ  $HRGE = MV dV$ , cujus fluens erit  $\frac{1}{2} MVV$  (165) junctâ aut detractâ quâdam constanti quantitate; Coeuntibus enim  $H$  &  $E$  est in  $H$ ,  $V = b$  ideoque sit  $\frac{1}{2} MVV = \frac{1}{2} Mbb$  dum area  $HRGE$  evanescit, itaque (170) ex fluente  $\frac{1}{2} MVV$  detrahenda est quantitas constans  $\frac{1}{2} Mbb$  ut areæ  $HRGE$  sit æqualis: Coeuntibus verò  $E$  &  $A$ , cum in puncto  $A$  sit  $V = a$  erit in eo casu  $HRGE$  five  $HRBA = \frac{1}{2} Maa = \frac{1}{2} Mbb$ , & sumpto quovis puncto  $E$  erit  $HRBA - HREG$  five  $EGBA = \frac{1}{2} Maa - \frac{1}{2} Mbb - \frac{1}{2} MVV + \frac{1}{2} Mbb = \frac{1}{2} Maa - \frac{1}{2} VV$ , Unde sic tandem incidimus in duas æquationes

$$HRGE = \frac{1}{2} MVV - \frac{1}{2} Mbb \quad \&$$

$EGBA = \frac{1}{2} Maa - \frac{1}{2} MVV$  quibus comparatis cum iis quas respectu corporis  $m$  in curvâ  $VIK$  moti simili modo deducemus, velocitates corporum in quibusvis æqualibus vel inæqualibus altitudinibus, in quâvis vizium centripetarum hypothesi & in quali-

bet ponderum & massarum proportionem comparari poterunt.

Secundò itaque, per locum  $K$  datum in curvâ  $VIK$  agatur recta  $CKL$  æqualis  $CV$  & centro  $C$  per punctum quodvis  $I$  lineæ  $VIK$  describatur arcus circularis  $IQ$  rectæ  $CL$  occurrens in  $Q$  per punctum  $Q$  erigatur semper perpendicularum  $PQ$  proportionale vi Centripetæ quâ Corpus in distantia  $CQ$  versus  $C$  urgetur: sitque  $OPK$  curva quam punctum  $P$  perpetuò tangit, & perpendiculares in punctis datis  $L$  &  $K$  sint  $LO$  &  $Kk$ . Dicatur arcus  $VI$ ,  $x$ , & linea  $LQ$ ,  $y$ ; sit linea  $Ii$  fluxio arcus  $VI$ , & radio  $Ci$  describatur arcus lineæ  $CL$  occurrens in  $q$ , & lineæ  $CI$  in  $N$ , erit  $Qq = IN$ , ex  $q$  erigatur perpendicularis  $qp$  usque ad curvam  $OPK$ , & ex  $N$  ducatur  $Nn$  perpendicularis in arcum  $Ii$ .

Velocitates corporis  $m$  in punctis datis  $L$  &  $K$  dicantur  $e$  &  $c$  velocitas in puncto variabili  $Q$  sit  $v$ : Vis totalis centripeta in  $Q$  semper exprimitur per  $QP$ , eadem vis  $QP$  agit in  $I$  (propter æquales  $CQ$ ,  $CI$ ), (secundum directionem  $IN$ , resolvatur ergo illa vis in vires duas quarum una agit in corpus  $m$  secundam directionem  $In$ , alia-

altera secundum directionem N n, erit IN ad I n ut vis tota Q P ad vim quā corpus urgetur secundum curvam, sed ob Triangula IN n, IN i similia est IN ad I n sicut I i ad IN sive Q q, ideoque I i ad Q q ut vis Q P ad vim agentem secundum curvam quæ itaque erit  $\frac{Q P \times Q q}{I i}$ ; sit d t, tempusculum quo describetur I i per eam vim, eritque (13 & 409) ea vis  $\frac{Q P \times Q q}{I i} = \frac{m d u}{d t}$ ;

Unde erit  $Q P \times Q q = \frac{m d u}{d t} \times I i$  sed (5) est I i spatiolum percursum tempore d t velocitate u est ergo æquale u d t ideoque  $Q P \times Q q = \frac{m d u}{d t} \times u d t = m u d u$ , sed  $Q P \times Q q = m u d u$  est fluxio areæ L O Q P, hujus fluens est  $\frac{1}{2} m u u$  (165) additā aut detractā quādam constanti quantitate, coeuntibus enim Q & L, sit in L, u = e ideoque sit  $\frac{1}{2} m u u = \frac{1}{2} m e e$  dum area L O Q P evanescit, itaque (170) ex fluente  $\frac{1}{2} m u u$  detrahenda est quantitas constans  $\frac{1}{2} m e e$ , eritque  $L O Q P = \frac{1}{2} m u u - \frac{1}{2} m e e$ , & coeuntibus Q & K sit u = c & L O K l =  $\frac{1}{2} m c c - \frac{1}{2} m e e$  & L O K k = L O Q P sive Q P K k =  $\frac{1}{2} m c c - \frac{1}{2} m u u$ , sicque tandem incidimus in has duas æquationes:

$L O Q P = \frac{1}{2} m u u - \frac{1}{2} m e e$  &  
 $Q P K k = \frac{1}{2} m c c - \frac{1}{2} m u u$  eadem metho-  
do quā in primo calculo sumus usi.

415. Coroll. 1. Ex primā Æquatione primi calculi est  $V = \frac{\sqrt{2 H R G E + M b b}}{M}$ , ex primā Æquatione secundi calculi est  $u = \frac{\sqrt{2 L O Q P + m e e}}{m}$ , unde invenitur  $V : u = \frac{\sqrt{2 H R G E + M b b}}{M} : \frac{\sqrt{2 L O Q P + m e e}}{m}$ .

Ex secundā verò æquatione primi calculi est DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
X L<sub>9</sub>  
 $V = \frac{\sqrt{M a a - 2 E G B A}}{M}$  & ex secunda Æ-  
quatione 2<sup>a</sup>. calculi  $u = \frac{\sqrt{m c c - 2 Q P K k}}{m}$ , &  
hinc est  $V : u = \frac{\sqrt{M a a - 2 E G B A}}{M} : \frac{\sqrt{m c c - 2 Q P K k}}{m}$ .

416. Coroll. 2. Si in perpendiculari Q P, itā capiatur Q π, ut factum π Q × m, sit ubique gravitati corporis in I proportionale, seu rectæ Q P æquale, erit 2 L O π Q × m

= 2 L O Q P, adeoque  $u = \frac{\sqrt{2 L O Q P + m e e}}{m}$   
 $= \frac{\sqrt{2 L O \pi Q + e e} \& u \sqrt{c c - 2 Q \pi \times K}}{m}$ .  
Et similiter si ponatur E γ × M = E G, erit  $V = \frac{\sqrt{2 H \gamma \gamma E + b b}}{M}$  &  $V = \frac{\sqrt{a a - 2 E \gamma \gamma A}}{M}$ .

417. Coroll. 3. Si puncta H & V, E & I, fuerint æquæ alta, & in illis lineæ E G, Q P vi centripetæ proportionales, sint semper æquales, erit H R G E = L O P Q. Quare si præterea massæ M, m, & velocitates b, e, in punctis H, V, æquantur, erit  $\frac{2 H R G E + M b b}{M} = \frac{2 L O Q P + m e e}{m}$ , adeo-

que  $V = u$ , in omnibus punctis æquæ altis E & I. Si in punctis æquæ altis H & V, E & I, vires centripetæ massarum M & m rationem semper habeant, erit H R G E : L O Q P = M : m, proindeque  $\frac{2 H R G E}{M} = \frac{2 L O Q P}{m}$ .

Unde si præterea ponatur  $b b = e e$ , erit  $V = u$ , quæ est propositio XL. NEWTONI. Patet etiam in 4. superioribus formulis (415), Massas M & m exterminari, si fuerint ponderibus proportionales.

**DE MO-  
TU COR-  
PORUM.**

LIBER

# PRIMUS.

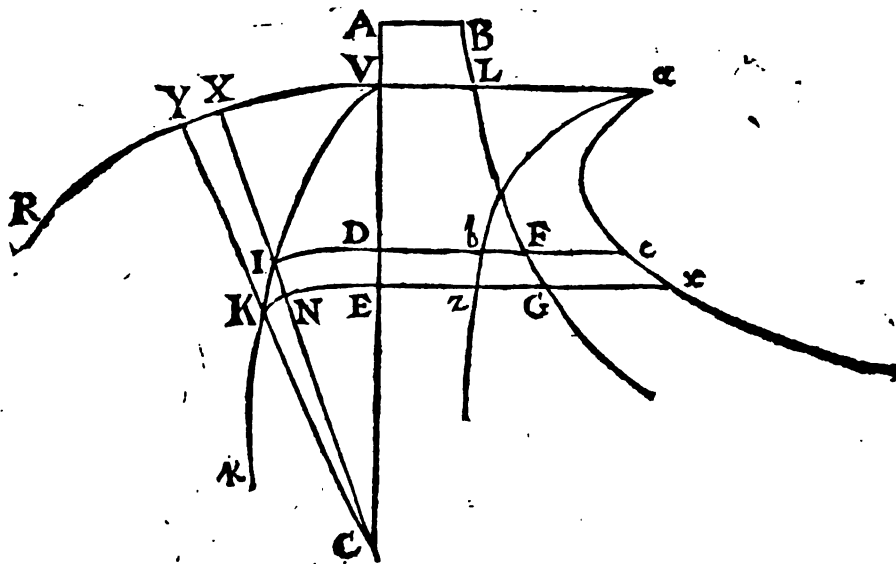
**PROP.**

**XLI.**

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXVIII.

*Positâ cujuscunque generis vi centripetâ & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in trajectoriis inventis.*

Tendat vis quælibet ad centrum  $C$  & invenienda fit trajectory  $V I K k$ . Detur circulus  $V R$  centro  $C$  intervallo quovis  $CV$  descriptus, centroque eodem describantur alii quivis circuli  $ID$ ,  $KE$  trajectoryam secantes in  $I$  &  $K$  rectamque  $CV$



in  $D$  &  $E$ . Age tum rectam  $CNIX$  secantem circulos  $KE$ ;  $VR$  in  $N$  &  $X$ , tum rectam  $CKY$  occurrentem circulo  $VR$  in  $Y$ . Sint autem puncta  $I$  &  $K$  sibi invicem vicinissima, & pergat corpus ab  $V$  per  $I$  &  $K$  ad  $k$ ; sitque punctum  $A$  locus ille de quo corpus aliud cadere debet, ut in loco  $D$  velocitatem acquirat æqualem velocitati corporis prioris in  $I$ . Et stantibus quæ in propositione xxxix, lineola  $IK$ , dato tempore quam

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 319

minimo descripta, erit ut velocitas, atque ideo ut recta quæ De Mo-  
 poteft aream  $ABFD$ , & (p) triangulum  $ICK$  tempore pro-  
 portionale dabitur, ideoque  $KN$  erit reciprocè ut altitudo  $IC$ ,  
 id est, si detur quantitas aliqua  $Q$ , & altitudo  $IC$  nominetur  
 $A$ , ut  $\frac{Q}{A}$ . Hanc quantitatem  $\frac{Q}{A}$  nominemus  $Z$ , & ponamus

eam esse magnitudinem ipsius  $Q$  ut sit in aliquo casu  $\sqrt{ABFD}$   
 ad  $Z$  ut est  $IK$  ad  $KN$ , & (q) erit in omni casu  $\sqrt{ABFD}$   
 ad  $Z$  ut  $IK$  ad  $KN$ , &  $ABFD$  ad  $ZZ$  ut  $IK^2$  ad  $KN^2$   
 & divisim  $ABFD - ZZ$  ad  $ZZ$  ut  $IN$  (r) quad. ad  $KN$  quad.

ideo.

(p) \* Triangulum  $ICK$  tempore quo  
 describitur proportionale (per Prop. 1.)  
 dato tempore dabitur; Est autem triangu-  
 li  $ICK$  area  $= \frac{1}{2} KN \times IC$ . Quare erit  
 rectangulum  $KN \times IC$  quantitati con-  
 stanti æquale, & hinc lineola  $KN$  æqualis  
 quantitati constanti ad  $IC$  applicatæ, hoc  
 est,  $KN$  reciprocè ut  $IC$ .

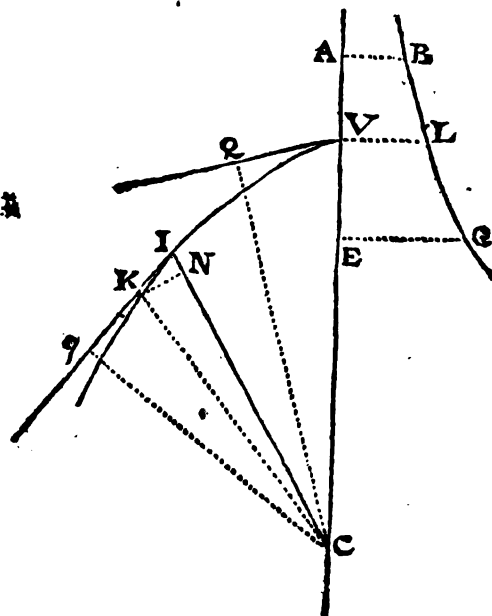
(q) \* Erit in omni casu. Quoniam  
 $IK$  est semper ut  $\sqrt{AEFD}$ , hoc est  
 $IK$  ad  $\sqrt{ABFD}$  in datâ ratione, & si-  
 militer  $Z$  ad  $KN$  in datâ ratione, si in  
 aliquo casu sit  $\sqrt{ABFD}$  ad  $Z$  ut  $IK$  ad  
 $KN$  adeoque  $\sqrt{ABFD}$  ad  $IK$  ut  $Z$  ad  
 $KN$ , erit in omni casu  $\sqrt{ABFD}$  ad  $IK$   
 ut  $Z$  ad  $KN$ , ac proinde  $\sqrt{ABFD}$  ad  
 $Z$  ut  $IK$  ad  $KN$ .

4. 8. Ducatur  $VL$  parallela  $EG$  quæ cur-  
 vâ  $BFG$  occurrat in  $L$ , & ex centro  $C$   
 ad  $QV$  tangentem in  $V$ , ac ad  $qI$ , tangen-  
 tem in  $I$ , demissis perpendicularis  $CQ, Cq$ ,  
 erit  $CQ \times \sqrt{ABLV}$  quantitas constans &  
 æqualis  $Cq \times \sqrt{ABFD}$ . Nam (per co-  
 roll. 1. prop. 1.) velocitas in  $V$  (adeo-  
 que  $\sqrt{ABLV}$ ) est ut  $CQ$  reciprocè, id est,  
 ut  $\frac{1}{CQ}$  directè & proinde  $CQ \times \sqrt{ABLV}$

ut quantitas constans 1, & pariter veloci-  
 tas in  $I$  (adeoque  $\sqrt{ABFD}$ ) est ut  $Cq$  re-  
 ciprocè, id est, ut  $\frac{1}{Cq}$  directè, & proin-

dè  $Cq \times \sqrt{ABFD}$ , ut quantitas constans 1,  
 adeoque  $Cq \times \sqrt{ABFD} = CQ \times \sqrt{ABLV}$ .

Si itaque capiatur  $Q = CQ \times \sqrt{ABLV}$   
 $= Cq \times \sqrt{ABFD}$ , &  $Z = \frac{Q}{IC}$  (unde est



$Q = Z \times IC$ ) erit semper  $\sqrt{ABFD} : Z$   
 $= IC : Cq = IK : KN$ . Nam propter trian-  
 gula  $IKN, ICq$  similia, est  $IK$  ad  $KN$  ut  
 $IC$  ad  $Cq$ , sed quia  $Z \times IC (= Q) = Cq \times$   
 $\sqrt{ABFD}$  est  $IC : Cq = \sqrt{ABFD} : Z$   
 ergo  $IK : KN = IC : Cq = \sqrt{ABFD} : Z$   
 (r)  $\times Ut IN^2$ , ad  $KN^2$ . Est enim  
 ob angulum  $INK$  rectum,  $IK^2 = KN^2$   
 $= IN^2$ .

De Mo.

**TU COR-  
PORUM.**

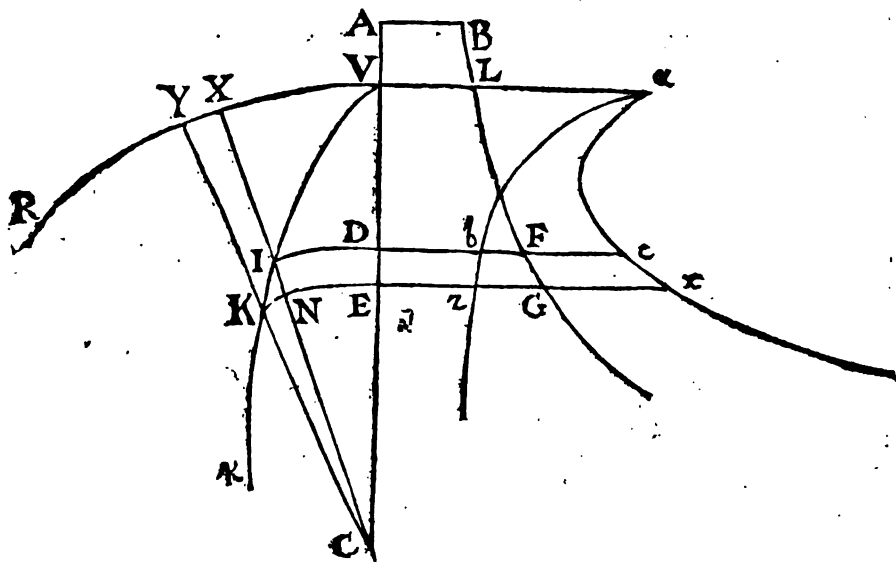
LIBER

PRIMUS.

**PROP.**

**X L I.**

De Mo.  
TU COR- ideoque  $\sqrt{ABFD-ZZ}$  ad  $Z$  feu  $\frac{Q}{A}$  ut  $IN$  ad  $KN$ , &  
FORUM.  
LIBER  
PRIMUS. propterea  $A \times KN$  æquale  $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD-ZZ}}$ . (f) Unde cùm  
PROP.  
XLI.  $YX \times XC$  fit ad  $A \times KN$  ut  $CX$  q ad  $AA$ , erit rectangulum  
 $XY \times XC$  æquale  $\frac{Q \times IN \times CX \text{ quad.}}{AA \sqrt{ABFD-ZZ}}$ . Igitur si in perpendi-



culo  $DF$  capiantur semper  $D b, D c$  ipsis  $\frac{Q}{2 \sqrt{ABFD-ZZ}}$ ;

$\frac{Q \times CX \text{ quad.}}{2AA\sqrt{ABFD}-ZZ}$  æquales respectivè, & describantur cur-

væ lineæ  $ab$ ,  $ac$ , quas puncta  $b$ ,  $c$  perpetuò tangunt; deque puncto  $V$  ad lineam  $AC$  erigatur perpendicularum  $Va$  abscindens areas curvilineas  $VDba$ ,  $VDca$ , & erigantur etiam ordinatæ  $Ez$ ,  $Ex$ : quoniam rectangulum  $Db \times IN$  seu  $DbzE$  æquale est dimidio rectanguli  $A \times KN$  seu triangulo  $ICK$ ; & rectangulum

· (f) \* Unde cum  $YX \times XC : A \times KN$  proinde areae duplæ  $YX \times XC, IC \times KN$   
 $= CX^2 : AA$ . Sunt enim triangula nati- seu  $A \times KN$ , in ratione duplicatâ homo-  
 cutia  $CKN$ ,  $CYX$  familia & eorum logorum laterum  $CX, CI$ , sive  $A$ .

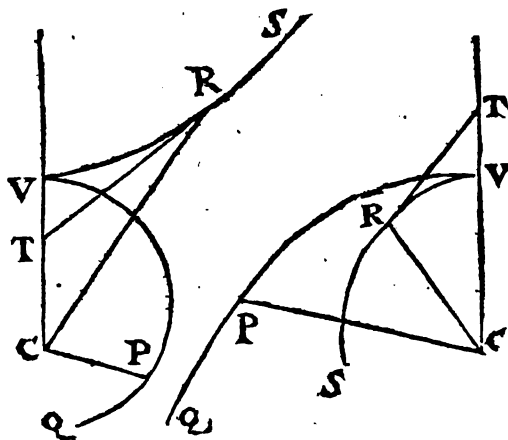




bi secat lineam illam  $IC$ , ex datâ corporis altitudine  $IC$  expectatè invenitur; nimirum capiendò sinum ejus ad radium ut  $K N$  ad  $IK$ , id est, ut  $Z$  ad latus quadratum areæ  $ABFD$ .

(\*) *Corol. 3.* Si centro  $C$  & vertice principali  $V$  describatur sectio quælibet conica  $VRS$ , & à quovis ejus puncto  $R$  agatur tangens  $RT$  occurrens axi infinite producto  $CV$  in puncto  $T$ ; dein junctâ  $CR$  ducatur recta  $CP$ , quæ æqualis sit abscissæ  $CT$ , angulumque  $VCP$  sectori  $VCR$  proportionalem constituat; tendat autem ad centrum  $C$  vis centripeta cubo distantiae locorum à centro reciproce proportionalis, & exeat corpus de loco  $V$  justâ cum velocitate secundum lineam rectæ  $CV$  perpendicularem: progreditur

DE MOTU CORPORUM.  
LIBER PRIMUS.  
PROP. XLII.



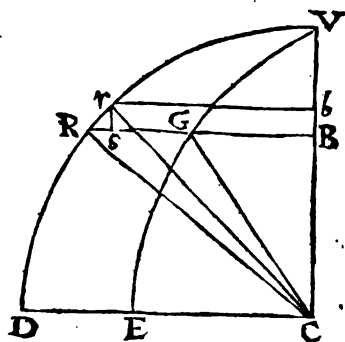
$\frac{Q}{IC}$  ad  $\sqrt{ABFD}$ , hoc est, ratio finis anguli  $KIN$ , ad radium. Invenietur ergò sinus anguli  $KIN$ , & hinc angulus ipse cognoscetur.

(\*) 413. *Lemma.* Si fuerit  $DVC$ , circuli quadrans cujus radius  $CV = r$  abscissa  $CB = z$ , ordinatæ infinite propinquæ  $BR$ ,  $br$ , fluxio arcus  $DR$  erit  $\frac{r dz}{\sqrt{rr-zz}}$ , & fluxio sectoris  $CDR = \frac{\frac{1}{2} r r dz}{\sqrt{rr-zz}}$ .

Est enim  $BR = \sqrt{rr-zz}$ , & demissa ex puncto  $r$  in  $RB$ , perpendiculari  $rs$ , triangula similia  $RCB$ ,  $rRs$ , dant  $RB (\sqrt{rr-zz}) : RC(r) = rs(dz : Rr = \frac{r dz}{\sqrt{rr-zz}})$ . Q. e. 1. Porro sector nascens

$CRr = \frac{1}{2} CR \times Rr = \frac{\frac{1}{2} r r dz}{\sqrt{rr-zz}}$ . Q. e. 2.

414. *Coroll.* Si fuerit  $EGVC$ , qua-



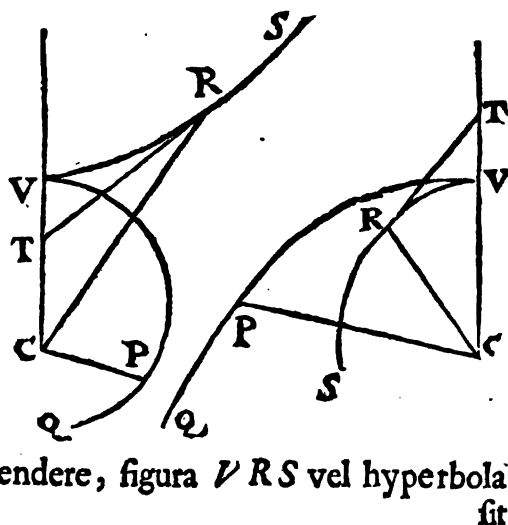
drans ellipseos cujus centrum  $C$ , semiaxis unus  $CV = r$ , alter semiaxis  $CE = c$ , abscissa  $CB = z$ , &  $BG$  ordinatim applicata ad axem  $CV$ , sectoris  $CEG$  fluxio erit  $\frac{\frac{1}{2} r c dz}{\sqrt{rr-zz}}$ . Sunt enim sectores  $CDR$ ,  $CEG$ ; adeoque & eorum fluxiones in datâ ratione  $r$  ad  $c$ , ( 251 ).



# 324 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MOTU CORP. FORUM. LIBER PRIMUS. PROP. XL.

dietur corpus illud in traje-  
ctoriâ  $\angle PQ$  quam punctum  
 $P$  perpetuò tangit; ideoque  
si conica sectio  $\angle RS$  hyper-  
bola sit, descendet idem ad  
centrum: Sin ea ellipsis sit,  
ascendet illud perpetuò &  
abibit in infinitum. Et con-  
tra, si corpus quâcunque cum  
velocitate exeat de loco  $V$ ,  
& perinde ut incoeperit vel  
obliquè descendere ad cen-  
trum, vel ab eo obliquè ascendere, figura  $\angle RS$  vel hyperbola



425. Lemma. Si fuerit  $\angle VRr$ , hyper-  
bola æquilatèra cujus centrum  $c$ , semia-  
xis transverſus  $CV=r$ , abſciſſa  $CB=z$ ,  
 $RB$  ad axem ordinatim applicata, ſecto-  
ris hyperbolici  $CRV$  fluxio erit  $\frac{1}{2} r r d z$ .

Agatur enim  $r b$  ordinata, priori  $RB$   
infinîtè propinqua, ſitque  $RB=y$ , erit  
(ex naturâ hyperbolæ æquilatèræ)  $yy =$   
 $zz-rr$ , &  $y=\sqrt{zz-rr}$ . Undè  $z y d y$   
 $= z z d z$ , &  $d y = \frac{z d z}{\sqrt{zz-rr}}$ . Porro trian-

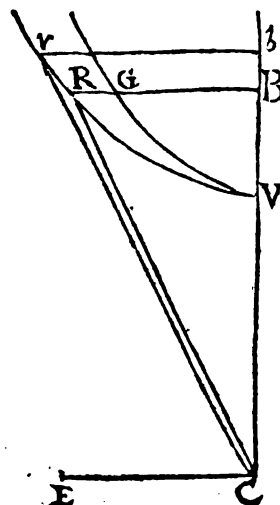
gulum  $CRB = \frac{1}{2} z y$ , & illius fluxio  $=$   
 $\frac{1}{2} z d y + \frac{1}{2} y d z =$  trapeſio  $BbrR +$  triang.  
 $CrR$ ; ſed trapeſium naſcens  $BbrR = y d z$ ,  
ergò ſector naſcens  $CrR = \frac{1}{2} z d y - \frac{1}{2} y d z$

$$= \frac{\frac{1}{2} z z d z}{\sqrt{zz-rr}} - \frac{1}{2} d z \times \sqrt{zz-rr}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} z z d z - \frac{1}{2} z z d z + \frac{1}{2} r r d z}{\sqrt{zz-rr}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} r r d z}{\sqrt{zz-rr}} \quad Q. e. D.$$

426. Coroll. 1. Quoniam (ex demonſ-  
tratis)  $d y = \frac{z d z}{\sqrt{zz-rr}}$ , &  $yy = zz-rr$ ,  
erit  $\frac{d z}{\sqrt{zz-rr}} = \frac{d y}{z}$ , &  $z = \sqrt{yy+rr}$ .

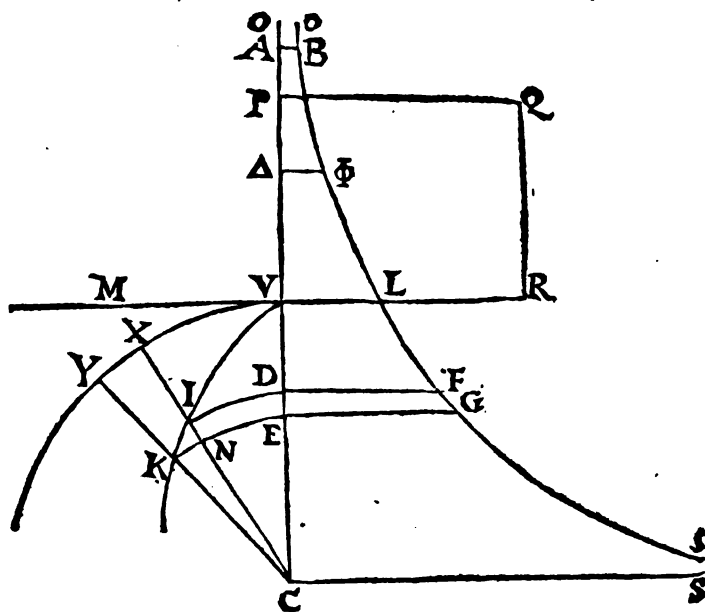


$$\text{adeoque } CrR = \frac{\frac{1}{2} r r d z}{\sqrt{zz-rr}} = \frac{\frac{1}{2} r r d y}{\sqrt{yy+rr}}.$$

427. Coroll. 2. Si deſcripſa fuerit ali-  
tera hyperbola  $\angle GV$ , cujus idem centrum  
 $C$ , idem ſemiaxis transverſus  $CV=r$ ,  
ſemiaxis conjugatus  $CE=c$ ; ſectoris  
 $CGV$  fluxio erit  $= \frac{\frac{1}{2} r c d z}{\sqrt{zz-rr}} - \frac{1}{2} r c d y$ .  
Eſt enim ſector  $CRV$  ad ſectorem  $CGV$ ,  
adeoque  $r r r$  fluxio ad fluxionem  $r c c$   
ſicut  $z$  ad  $c$  (ex naturâ hyperbolæ æquilatèræ).

## PRINCIPIA MATHEMATICĀ. 325

fit vel ellipsis, inveniri potest trajectoria augendo vel minuendo DE MO-  
 angulum  $\angle VCP$  in datâ aliquâ ratione. Sed &, vi centripetâ TU COR-  
 in centrifugam versâ, ascendet corpus obliquè in trajectoriâ PORUM.  
 $\angle VPQ$ , quæ invenitur capiendò angulum  $\angle VCP$  sectori elliptico LIBER  
 $\angle VRC$  proportionalem, & longitudinem  $CP$  longitudini  $CT$  æ- PRIMUM.  
PROP.  
qua-XLI.



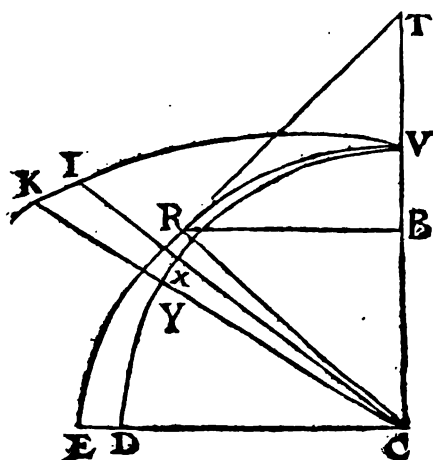
428 *Lemma.* Iisdem positis quæ in superioribus NEWTONI propositionibus, sit  $CV = r$ ,  $CA = a$ ,  $CD$  vel  $C \Delta = x$ ,  $DF$  vel  $\Delta \Phi = y$ ; & si fuerit vis centripeta in loco quovis  $D$  ut  $\frac{1}{CD^2}$ , sitque  $2f$  quantitas data, erit  $y = \frac{2f^4}{x^3}$ , æquatio ad curvam  $BFG$ , & quam in æquatione  $y$  infinitè evadit  $x$  conatur  $= 0$ , & similiter  $x$  infinitè si  $y = 0$ , liquet rectæ sibi mutè perpendicularis  $CO$  esse curvæ  $BFG$  asymptotam. Area  $DFGFE = \frac{2f^4 dx}{x^3}$ , unde sempris

in infinitum versus S protensa CDFsSC  
 $= Q - \frac{f^4}{xx}$ ; Ponatur  $x$  infinita, & erit  
 $\frac{f^4}{xx} = 0$ , & area CDFsS, mutabitur in  
 aream utrinque infinite protensam COosSC;  
 quare COosSC = Q, & hinc COosSC  
 $- CDFsSC = ODFo = Q - Q + \frac{f^4}{xx}$   
 $= \frac{f^4}{xx}$ , id est, area ODFo, vel  $O \Delta \Phi o$   
 versus O in infinitum extenta, æqualis est  
 quantitati finitæ  $\frac{f^4}{xx}$ .







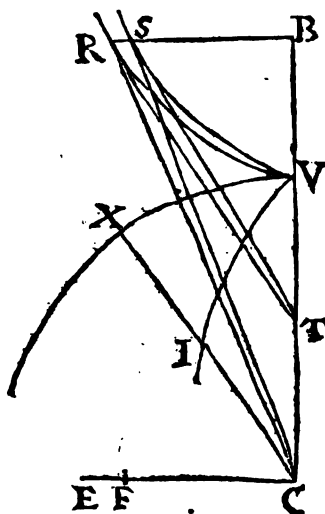


$\text{CI} = \text{CV}$ , adeoque punctum R coincidit etiam cum puncto V, & sector CER, æqualis sit quadranti CEV; ergo  $\text{Q} = \text{CEV}$ . Est igitur semper  $\text{CXV} = \text{CEV} - \text{CRE} = \text{CKV}$ . Itaque ut inveniantur trajectorye VIK punctum I, capiatur sector circuli CXV, æqualis sectori elliptico CRV, & in lineâ CX, productâ capiatur CI = CT, erit I punctum in trajectoryâ quæsita.

438. Datâ velocitate projectionis & magnitudine vis centripetæ variabilis, hoc est, ipsius ratione ad aliquam vim centripetam uniformem notam in loco dato V, (fig. not. 430.) describi potest trajectorya VIK. His enim datis, dabitur locus P ex quo corpus urgente vi centripetâ constante cadere debet ut in loco V datam projectionis velocitatem habeat; & sumptâ VR ad VL in datâ ratione vis centripetæ constantis ad vim centripetam variabilem in loco V, dabitur rectangulum PQRV. Porro si rectangulum illud æquale fuerit areæ infinitè potentæ OVLo, corpus circumculum describet (per cas. 1. not. 433.); si rectangulum minus est areâ OVLo, invenietur poterit punctum A, ex quo ducta perpendicularis AB, abscindat aream ABLV æqualem rectangulo PQRV; & trajectorya VIK, describetur (per constr. cas. 21.) (436). Si rectangulum PQRV areâ OVLo majus est, adhibenda erit constructio casus 3. (439). Observandum autem est sectores circulares esse angulis suis ad cen-

Tom. I.

trum proportionales; unde in superioribus constructionibus loco sectorum circuli, uti possumus angulis qui ad sectores hyperbolicos vel ellipticos datam habeant, rationem.

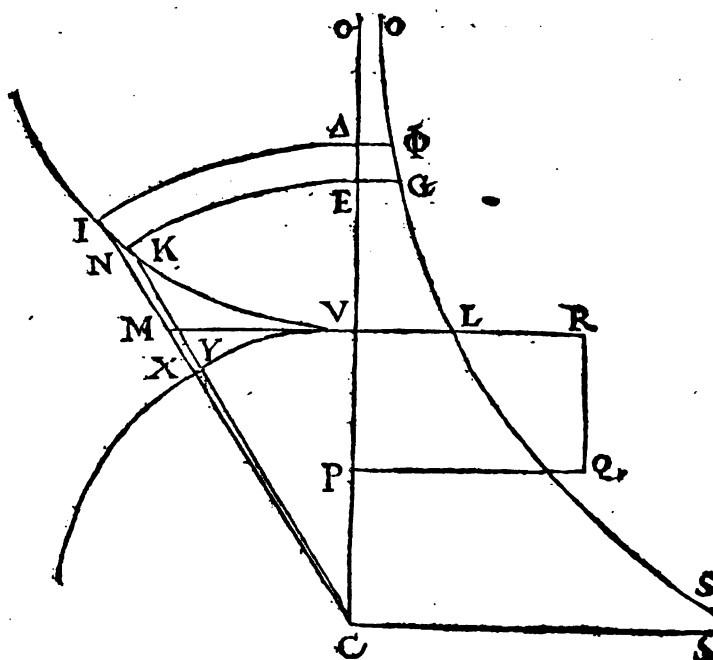


439. Casus 2us. & 3us. construi possunt per hyperbolam vel ellipsum, cujus sit semiaxis  $\text{CV} = r$ , & alter semiaxis quilibet. Nam iisdem positis quæ in constructione casus 21., semiaxe transverso  $\text{CV} = r$ , & semiaxe quovis conjugato CF, describitur hyperbola altera SV, quam in S fecit perpendicularum RB; tangentes RT, ST per puncta R, S ductæ axi occurrunt in eodem puncto T, (257) & sector CRV est ad sectorem CSV in datâ ratione CE ad CF (374). Quare cum (per constr. cas. 21.) sector circuli CXV æqualis sit sectori CRV, erit etiam ad sectorem CSV in datâ ratione CE ad CF, atque ita punctum trajectorye I invenietur capiendò sectorem CXV ad sectorem CSV, in datâ ratione CE ad CF, & in radio CX, capiendò CI = CT. Idem eodem modo demonstratur in casu 3o.

440. Hinc si (juxta constructionem Coroll. 3. prop. 41.) describatur curva VI capiendò angulum VCI sectori conico VCR proportionalem, vel quod in idem recidit, capiendò sectorem circuli CXV ad sectorem conicum VCR in

DE MOTU CORPORUM.  
LIBER PRIMUS.  
PROP. XLII.  
PROBL. XXVIII.





441. Schol. Keillius ad calcem Intro-  
ductionis ad. veram. Astronomiam, in verum  
problema virium centripetarum in ratione  
triplicatâ distantiae à centro decrescen-  
tium generatim ac perspicue solvit, & tra-  
jectoriarum quæ in hac hypothefi descri-  
buntur plures proprietates demonstravit,  
inter alias istam, earum omnium, si  
circulum exceperis, areas esse perfec-  
tè quadrabiles, quæ quidem de omni-  
bus trajectoriis per constr. coroll. 3. prop.  
41. descriptis facile demonstratur. Nam  
(per prop. 41.) arearum illarum fluxio

$$CIK = \frac{Q \times IN}{2\sqrt{ABFD-ZZ}} = \frac{-\frac{1}{2}cx dx}{\sqrt{rr-xx}}$$

in cas. 2°. &  $CIK = \frac{Q \times IN}{2\sqrt{ABFD-ZZ}}$

$$= \frac{\frac{1}{2}cx dx}{\sqrt{xx-rr}} \text{ in casu 3°. (437. 441.). Po}$$

natur 1°.  $\sqrt{rr-xx}=z$ , & erit  $rr=xx$   
 $=zx, -x dx = z dz$ , &  $-\frac{\frac{1}{2}cx dx}{\sqrt{rr-xx}} =$   
 $CIK = \frac{1}{2}c dz$ , & sumptis fluentibus, sec-  
tor  $CIV = \frac{1}{2}cz = \frac{1}{2}c\sqrt{rr-xx}$ , nulla  
enim est addenda quantitas constans. Po-  
natur 2°.  $\sqrt{xx-rr}=y$ , & proinde  $xx=$   
 $yy, x dx = y dy$ , erit  $CIK = \frac{\frac{1}{2}cx dx}{\sqrt{xx-rr}}$   
 $= \frac{1}{2}c dy$ , & sector fluens  $CIV = \frac{1}{2}cy =$   
 $\frac{1}{2}c\sqrt{xx-rr}$





# PRINCIPIA MATHEMATICA. 333

dato rectangulo  $PDRQ$ , datâque lege vis centripetæ quâ corpus primum agitur, datur curva linea  $Bfg$ ; per constructionem problematis  $xxvii$ , & ejus corol. 1. (2). Deinde ex dato angulo  $CIK$  datur proportio nascentium  $IK, KN$ , & inde, per constructionem prob.  $xxviii$ . datur quantitas  $Q$ , unâ cum curvis lineis  $abv, acw$ : ideoque, completo tempore quovis  $Dbve$ , datur tum corporis altitudo  $Ce$  vel  $Ck$ , tum area  $Dcwe$ , eique æqualis sector  $XCy$ , angulusque  $ICk$ , & locus  $k$  in quo corpus tunc versabitur. *Q. E. I.*

Supponimus autem in his propositionibus vim centripetam in recessu quidem à centro variari secundum legem quamcunque, quam quis imaginari potest, in æqualibus autem à centro distantis esse undique eandem. Atque hætenus motum corporum in orbibus immobilibus consideravimus. Superest ut de motu eorum in orbibus, qui circa centrum virium revolvuntur, adiciamus pauca.

(2) \* Deinde. Cùm sit  $FK$  ad  $KN$ , ut sinus totus ad sinum anguli dati  $NIK$ , (per corol. 2. prop. 41.) dabitur quantitas constans  $Q$ , unâ cum curvis lineis  $abu, acw$ , est enim  $IK:KN = \sqrt{ABFD}$  (five  $\sqrt{PDRQ}$ ): $Z$ ; est ergo data  $Z$  (per constr. probl. 28. & not. 418.), &

$$Z = \frac{Q}{A} \text{ five } A \times Z = Q \text{ unde habetur, } Q, \text{ ex}$$

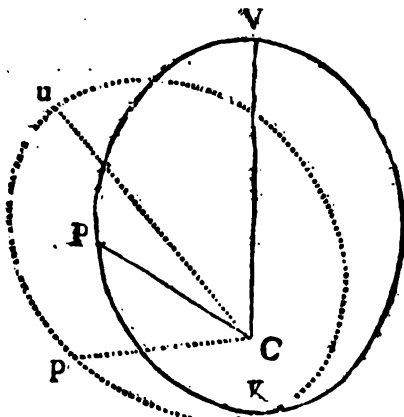
quibus habentur quantitates  $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD}-ZZ}$

$$\& \frac{Q \times CX^2}{2A \times \sqrt{ABFD}-ZZ} \text{ quæ sunt ordi-}$$

nate curvarum  $abv, acw$ .



propterea temporis proportionalis. Cum area temporis proportionalis sit quam linea  $Cp$  in plano immobili describit, manifestum est quod corpus, cogente justæ quantitatis vi centripetâ revolvi possit unâ cum puncto  $p$  in curvâ illâ lineâ quam punctum idem  $p$  ratione jam exposita describit in plano immobili. Fiat angulus  $V C u$  angulo  $P C p$ , & linea  $C u$  lineæ  $CV$ , atque figura  $u C p$  figuræ  $V C P$  æqualis, & corpus in  $p$  semper existens movebitur in perimetro figuræ revolvantis  $u C p$ , eodemque tempore describet arcum ejus  $u p$  quo corpus aliud  $P$  arcum ipsi similem & æqualem  $V P$  in figurâ quiescente  $V P K$  describere potest. Quærat igitur, per corollarium quintum propositionis vi., vis centripeta quâ corpus revolvi possit in curvâ illâ lineâ quam punctum  $p$  describit in plano immobili, & solvetur problema. *Q. E. F.*



DE MOTU CORPORUM.  
LIBER PRIMUS.  
PROP. XLIII.  
PROBL. XXX.

PRO.

$\frac{1}{2} PC \times PR$ ,  $\frac{1}{2} p C \times p q$ ; adeoque ob  $p C = P C$  sectores illi sunt inter se ut arcus  $PR$ ,  $p q$ , seu ut anguli  $P C K$ ,  $p C n$ ; sed quoniam angulus  $V C K$ , est ad angulum  $V C n$ , in datâ ratione anguli  $V C P$ , ad angulum  $V C p$  (*per hyp.*) erit dividendo angulus  $V C K = V C P$ , ad angulum  $V C n = V C p$ , hoc est, angulus  $P C K$ , ad angulum  $p C n$ , in datâ ratione anguli  $V C P$ , ad  $V C p$ , atque adeo sector  $P C K$ , ad sectorem  $p C n$ , in eadem ratione datâ. Unde (*per cor. Lem. 4.*) totus sector  $V p C$ , est ad totum sectorem  $V P C$ , eodem tempore descriptum in datâ ratione, sive sector  $V p C$ , est ut sector  $V P C$ , proindeque (*per prop. 1.*) ut tempus quo sector uterque describitur. Quare manifestum est (*per prop. 2.*) quod corpus  $p$ , cogente justæ quantitatis vi centripetâ revolvi possit in curvâ lineâ  $V p n$ , quam punctum  $p$  perpetuo tangit. Porro dato orbe  $V P K$ , & virium centro  $C$ , datur longitudo & positio lineæ  $CP$ , (*per superiorem Newton. constr.*) adeoque & lineæ  $C p$ , &

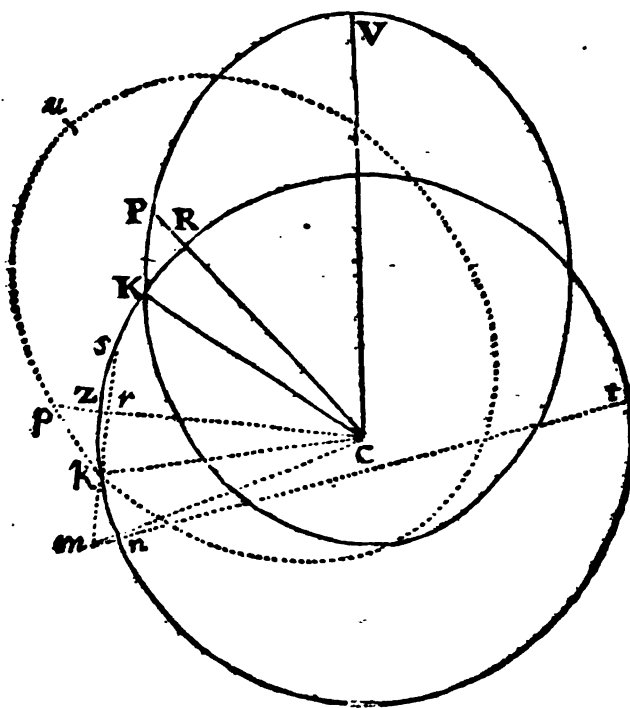
hinc datur punctum quodlibet  $p$ , in trajectoriâ  $V p n$ , adeoque & ipsa trajectoria datur. Inveniri igitur potest (*per cor. 5. prop. 6.*) Lex vis centripetæ quâ corpus  $p$ , in trajectoriâ illâ  $V p n$  revolvi potest.

Quoniam autem angulus  $V C P$  æqualis est angulo  $v C p$  (*per constr.*) erit quoque angulus  $V C v$  æqualis angulo  $P C p$ , adeoque datâ  $C p$ , magnitudine & positione, facile invenitur positio lineæ apsidum  $C v$  in orbe mobili  $V p$ : Fiat enim angulus  $V C v$  angulo  $P C p$ , & linea  $C v$  lineæ  $CV$ , atque figura  $u C p$ , figuræ  $V C P$  similis & æqualis, & corpus unâ cum puncto  $p$ , semper latum & figuram immotam  $V p n$  describens, describit etiam perimetrum  $u p$ , figuræ revolvantis  $u C p$ , eodemque tempore describit arcum ejus  $v p$ , quo corpus aliud  $P$  arcum ipsi similem & æqualem  $V P$ , in figurâ quiescente  $V P K$ , describere potest. Vide *Varignonium*. Legem vis centripetæ in trajectoria  $V p n$  determinantem, in *Comm. Paris. 1705.*

## PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XIV.

*Differentia virium, quibus corpus in orbe quiescente, & corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri possunt, est in triplicata ratione communis altitudinis inversè.*

Partibus orbis quiescentis  $V P$ ,  $P K$  sunt similes & æquales orbis revolventis partes  $u p$ ,  $p k$ ; & punctorum  $P$ ,  $K$  distantia intelligatur esse quam minima. A puncto  $k$  in rectam  $p C$  demitte perpendicularum  $k r$ , idemque produc ad  $m$ , ut sit  $m r$  ad



$k r$  ut angulus  $V C p$  ad angulum  $V C P$ . Quoniam corporum altitudines  $P C$  &  $p C$ ,  $K C$  &  $k C$ , semper æquantur, manifestum est quod linearum  $P C$  &  $p C$  incrementa vel decrementa semper sint æqualia, ideoque si corporum in locis  $P$  &  $p$  existentium distinguantur motus singuli (*per legum corol. 2.*) in binos,

nos, quorum hi versus centrum, sive secundum lineas  $PC$ ,  $pC$  determinentur, & alteri prioribus transversi sint, & secundum lineas ipsis  $PC$ ,  $pC$  perpendiculares directionem habeant; motus versus centrum erunt æquales, & motus transversus corporis  $p$  erit ad motum transversum corporis  $P$ , ut motus angularis lineæ  $pC$  ad motum angularem lineæ  $PC$ , id est, ut angulus  $VCP$  ad angulum  $VCP$ . Igitur eodem tempore quo corpus  $P$  motu suo utroque pervenit ad punctum  $K$ , corpus  $p$  æquali in centrum motu æqualiter movebitur à  $p$  versus  $C$ , ideoque completo illo tempore reperietur alicubi in lineâ  $mkr$ , quæ per punctum  $k$  in lineam  $pC$  perpendicularis est; & motu transverso acquireret distantiam à lineâ  $pC$ , quæ sit ad distantiam quam corpus alterum  $P$  acquirit à lineâ  $PC$ , ut est motus transversus corporis  $p$  ad motum transversum corporis alterius  $P$ . Quare cum  $kr$  æqualis sit distantie quam corpus  $P$  acquirit à lineâ  $PC$ , sitque  $mr$  ad  $kr$  ut angulus  $VCP$  ad angulum  $VCP$ , hoc est, ut motus transversus corporis  $p$  ad motum transversum corporis  $P$ , (c) manifestum est quod corpus  $p$  completo illo tempore reperietur in loco  $m$ . Hæc ita se habebunt ubi corpora  $p$  &  $P$  æqualiter secundum lineas  $pC$  &  $PC$  moventur, ideoque æqualibus viribus secundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulus  $pCn$  ad angulum  $pCk$  ut est angulus  $VCP$  ad angulum  $VCP$ , sitque  $nC$  æqualis  $kC$ , & corpus  $p$  completo

DE MOTU CORP-  
 PORUM.  
 LIBER  
 PRIMUS.  
 PROP.  
 XLIV.  
 THEOR.  
 XIV.

(c) \* Manifestum est quod corpus  $p$  & c. Ex puncto  $K$  in rectam  $PC$ , demissum intelligatur perpendiculum  $KR$ , & erit  $PR = p r$ . Fingamus corpus  $P$  de loco  $P$  ita projici ut vi secundum directionem  $PC$ , urgente percurrat spatium  $PR$ , eodem tempore quo vi alterâ secundum rectam ipsi  $RR$ , parallelam impellente, percurrat spatium æquale rectæ  $RR$ , adeo ut eo tempore viribus conjunctis describat diagonalem  $PK$ . Fingamus similiter corpus  $p$ , de loco  $p$  ita projici, ut vi se-

Tom. I.

cundum directionem  $pC$  urgente percurrat  $p r = PR$ , eodem tempore quo corpus  $P$  percurrat  $PR$  aut  $RR$  vel  $PK$ , & vi alterâ secundum directionem rectæ  $rm$ , parallelam impellente, corpus  $p$ , eodem tempore describat spatium æquale rectæ  $rm$ , quæ est ad  $RR$ , in ratione velocitatis transversæ corporis  $p$ , ad velocitatem transversam corporis alterius  $P$ . His positis manifestum est corpora  $P$  &  $p$ , de locis  $P$ , &  $p$ , simul egressa, eodem temporis puncto reperiri in locis  $K$ , &  $m$ .

V v







DE MO- dentur magnitudine, sunt  $kr$  &  $mr$ , earumque differentia  $mk$   
 TU COR- & summa  $ms$  reciproce ut altitudo  $pC$ , ideoque rectangulum  
 FORUM.  $mk \times ms$  est reciproce ut quadratum altitudinis  $pC$ . Est &  $mt$   
 LIBER directe ut  $\frac{1}{2}mt$ , id est, ut altitudo  $pC$ . Hæ sunt primæ ra-  
 PRIMUS.

PROP. tiones linearum nascentium; & hinc fit  $\frac{mk \times ms}{mt}$ , id est lineola  
 XLIV. nascens  $mn$ , eique proportionalis virium differentia reciproce  
 THEOR. ut cubus altitudinis  $pC$ . Q. E. D.  
 XIV.

Corol. 1. Hinc differentia virium in locis  $P$  &  $p$ , vel  $K$  &  $k$ , est ad vim quâ corpus motu circulari revolvi possit ab  $R$  ad  $K$  eodem tempore quo corpus  $P$  in orbe immobili describit arcum  $PK$ , ut lineola nascens  $mn$  ad  $(h)$  sinum versum arcus nascentis  $RK$ , id est ut  $\frac{mk \times ms}{mt}$  ad  $\frac{rkq}{2kC}$ , vel ut  $mk \times ms$  ad  $rk$  quadratum; hoc est, si capiantur datæ quantitates  $F$ ,  $G$  in

triangulum  $pCn = \frac{1}{2} pC \times mr$ . Junctis enim  $pn$ ,  $pm$ , erit triangulum nascens  $pnc$  æquale nascenti  $pmaC$ , ob  $mn$  evanescentem respectu lineæ finitæ  $Cn$ , & triangulum  $pmaC = \frac{1}{2} pC \times mr$ . Sunt ergo facta  $pC \times kr$ , &  $pC \times mr$ , constantia seu data & hinc  $kr$ , &  $mr$ , sunt reciproce ut altitudo  $pC$ , & propterea dividendo & componendo, earum differentia;  $mk$ , & summa  $ms$ , sunt reciproce ut eadem altitudo  $pC$ . Quod ut clarius intelligatur, supponamus esse  $kr = \frac{F}{pC}$ ,  $mr = \frac{G}{pC}$ , &  $F$  &  $G$  esse quantitates datas, erit  $mr - kr = mk = \frac{G - F}{pC}$ ,  $mr + kr = ms = \frac{G + F}{pC}$ , hoc est, ob quantitates  $F$ ,  $G$ ,  $G - F$ ,  $G + F$ , datas, erunt  $kr$ ,  $mr$ ,  $mk$ ,  $ms$ , ut  $\frac{1}{pC}$ . Hinc rectangulum  $mk \times ms = \frac{GG - FF}{pC^2}$ , est reciproce ut quadratum altitudinis  $pC$ ; Est &  $mt$ , directe ut

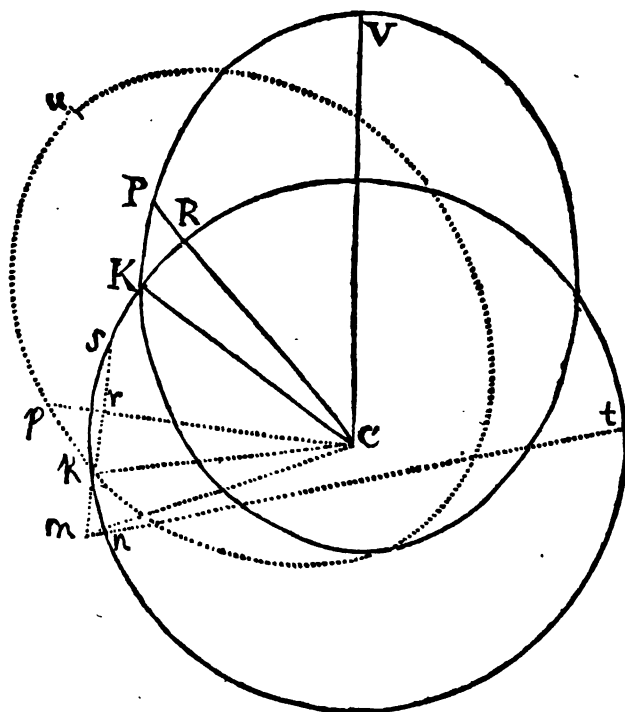
$\frac{1}{2}mt = Cn = Ck = pC$ , quare  $mn = \frac{mk \times ms}{mt} = \frac{GG - FF}{2pC^2}$ , & ideo  $mn$  est reciproce ut cubus altitudinis  $pC$  ob datam quantitatem  $\frac{GG - FF}{2}$ .

(h) \* Ad sinum versum arcus nascentis  $Rk$ , seu  $Zk$ , hoc est, ad  $Zr$ , nam  $Zr$  &  $mn$ , sunt spatia nascentia eodem tempusculo viribus illis descripta, & iidem proinde viribus proportionalia. Est autem  $mn = \frac{mk \times ms}{mt}$  (ex Dem.) &  $Zr = \frac{kr^2}{2kC}$ ; Nam, ex naturâ circuli  $Zr : kr = kr : KC + rC$ , hoc est, quia  $rC$  usurpari potest pro  $ZC$ , & quia  $ZC = kC$ ,  $Zr : kr = kr : 2kC$ , &  $Zr = \frac{kr^2}{2kC}$ ; undè  $mn : Zr = mk \times ms : kr^2$ , ob  $mt = 2kC$ . Si vero capiantur duæ quantitates  $G$ ,  $F$ , in eâ ratione ad invicem quam habet angulus  $VCp$ , ad angulum  $VCP$ , seu quam habet  $mr$ , ad  $kr$ , erit  $mk \times ms : kr^2 = GG - FF : FF$ ; ut ex suprâ demonstratis liquet, ergò  $mn : Zr = GG - FF : FF$ .

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 341

in eâ ratione ad invicem quam habet angulus  $VCP$  ad angulum  $VCP$ , ut  $GG - FF$  ad  $FF$ . Et (i) propterea, si centro  $C$  intervallo quovis  $CP$  vel  $Cp$  describatur sector circularis æqualis areae toti  $VPC$ , quam corpus  $P$  tempore quovis in

DE MOTU CORP. PORUM. LIBER PRIMUS. PROP. XLIV. THEOR. XIV.



orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto descripsit: differentia virium, quibus corpus  $P$  in orbe immobili & corpus  $p$  in orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam, quâ corpus aliquod, radio ad centrum ducto, sectorem illum eodem tempore, quo descripta sit area  $VPC$  uniformiter describere po-

(i) \* *Es propterea si centro C. Corpus P, in orbitâ  $VPK$  revolvens dato tempore datum sectorem  $PCK$ , radio ad centrum C ducto describit (per prop. 1.) & corpus in circulo radio  $CK$  descripto uniformiter revolvens, & arcum  $RK$ , seu sectorem  $CRK = CPK$ , describens eodem tempore quo corpus  $P$  describit arcum*

*$PK$ , seu sectorem  $CPK$ , dato tempore datum quoque sectorem describit. Quare corpus  $P$ , in orbitâ  $VPK$ , & corpus in circulo prædicto revolvens, radiis ad centrum C ductis, sectores æquales temporibus æqualibus describunt. Es propterea si centro C, intervallo  $CP$ , vel  $Cp$ , describamur &c.*

# 342 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP. XLIV.  
THEOR. XIV.

potuisset, ut  $GG - FF$  ad  $FF$ . Namque sector ille & area  $p C k$  sunt ad invicem ut tempora quibus describuntur.

Corol. 2. Si orbis  $V P K$  ellipsis sit umbilicum habens  $C$  & apsidem summam  $V$ ; eique similis & æqualis ponatur ellipsis

$p k$ , ita ut sit semper  $p C$  æqualis  $P C$  & angulus  $V C p$  sit ad angulum  $V C P$  in datâ ratione  $G$  ad  $F$ ; pro altitudine au-

tem  $P C$  vel  $p C$  scribatur  $A$ , & pro ellipseos latere recto ponatur  $2 R$ : erit vis, quâ corpus in ellipsi mobili revolvi po-

test, ut  $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A \text{ cub.}}$  & contra. Exponatur enim vis

quâ corpus revolvatur in immotâ ellipsi per quantitatem  $\frac{FF}{AA}$ , &

vis in  $V$  erit  $\frac{FF}{CV \text{ quad.}}$ . (k) Vis autem quâ corpus in circulo

ad distantiam  $CV$  eâ cum velocitate revolvi posset quam corpus in ellipsi revolvens habet in  $V$ , est ad vim quâ corpus in ellipsi revolvens urgetur in apside  $V$ , ut dimidium lateris recti ellipseos ad circuli semidiametrum  $CV$ , ideoque valet

$\frac{RFF}{CV \text{ cub.}}$ : & vis, quæ fit ad hanc ut  $GG - FF$  ad  $FF$ , valet

R G G

(k) \* Vis autem quâ corpus in circulo &c. Demonstratio Newtoniana ita procedit: Vis quâ corpus in Ellipsi circa ejus focum revolvitur, est semper æqualis cuidam quantitati constanti divisæ per quadratum distantie à foco (per prop. XI.) Sumatur ergo pro illâ quantitate constanti, quadratum  $F F$  cujus latus  $F$  est prima ex illis indeterminatis (sed constantibus) quæ exprimunt rationem anguli  $V C P$  ad

angulum  $V C p$ , erit vis in  $V = \frac{FF}{VC^2}$ .

Sit Corpus circa centrum quodvis in circulo revolvens, ad distantiam  $CV$ , eadem velocitate quâ Corpus in ellipsi revolvens urgetur in apside  $V$ , sumantur in Circulo & in Ellipsi arcus quamminimi eodem tempore descripti, illi arcus erunt inter se æquales, ob æquales velocitates (ex Hypoth.) & eorum sagittæ erunt in-

ter se ut vires Centrales (per Corol. 4. Prop. I.): in ellipsis autem omnibus in quibus vis centripeta ad focum tendit (& iis annumeratur Circulus) latera recta sunt inversè ut arcuum quamminimo tempore descriptorum sagittæ & directè ut quadrata perpendiculi ducti ab extremitate eorum arcuum in lineam ad Centrum virium tendentem (per Corol. 2. Prop. XIII.) sed in apside Ellipseos & Circulo, illa perpendiculara sunt ipsi arcis, ideoque sunt æqualia; Ergo latera recta hujus Ellipsis & hujus Circuli erunt inversè ut sagittæ arcuum sive inversè ut vires Centrales; Latus rectum circuli est ipsa diameter, ergo sumendo dimidium utriusque Lateris recti est vis quâ Corpus in Ellipsi revolvens urgetur &c. Reliqua demonstratio est plana.

RGG—RFF

$CV \text{ cub.}$  : estque hæc vis (per hujus corol. 1.) differen-  
tia virium in  $V$  quibus corpus  $P$  in ellipfi immotâ  $VPK$ , &  
corpus  $p$  in ellipfi mobili  $upk$  revolvuntur. Unde cum (per  
hanc prop.) differentia illa in aliâ quâvis altitudine  $A$  sit ad  
seipsam in altitudine  $CV$  ut  $\frac{1}{A \text{ cub.}}$  ad  $\frac{1}{CV \text{ cub.}}$ , eadem diffe-

TU COR-

FORUM.

LIBER

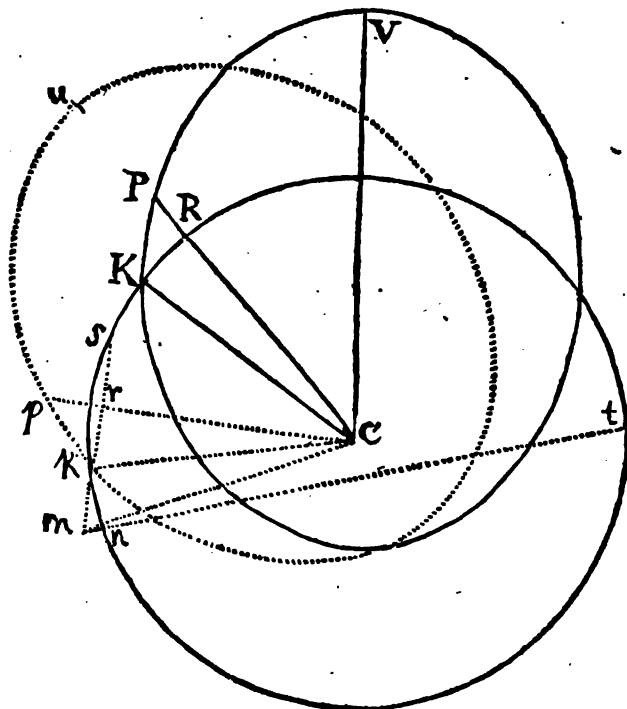
PRIMUS.

PROP.

XLIV.

THEOR.

XIV.



rentia in omni altitudine  $A$  valebit  $\frac{RGG-RFF}{A \text{ cub.}}$ . Igitur ad

vim  $\frac{FF}{AA}$ , quâ corpus revolvi potest in ellipfi immobili  $VPK$ ,

addatur excessus  $\frac{RGG-RFF}{A \text{ cub.}}$ ; & componetur vis tota  $\frac{FF}{AA}$

+  $\frac{RGG-RFF}{A \text{ cub.}}$  quâ corpus ellipfi mobili  $upk$  iisdem tem-  
poribus revolvi possit.

Co-

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XLIV.  
THEOR.  
XIV.

Corol. 3. (1) Ad eundem modum colligetur quòd, si or-  
bis immobilis  $\vee P K$  ellipsis sit centrum habens in virium  
centro  $C$ ; eique similis, æqualis & concentrica ponatur ellipsis  
mobilis  $u p k$ ; sitque 2  $R$  ellipseos hujus latus rectum principa-  
le, & 2  $T$  latus transversum five axis major, atque angulus  
 $\vee C p$  semper sit ad angulum  $\vee C P$  ut  $G$  ad  $F$ ; vires, quibus  
corpora in ellipsi immobili & mobili temporibus æqualibus re-

volvi possunt, erunt ut  $\frac{FFA}{T \text{ cub.}}$  &  $\frac{FFA}{T \text{ cub.}}$  +  $\frac{RGG - RFF}{A \text{ cub.}}$  respec-  
tivè.

Corol. 4. Et universaliter, si corporis altitudo maxima  $CV$   
nominetur  $T$ , & radius curvaturæ quam orbis  $\vee P K$  habet  
in

(1) *Ad eundem modum &c.* Si Cor-  
pus revolvatur in Ellipsi vi centripetâ ten-  
dente ad centrum Ellipseos, vis centralis est  
directè ut distantia à Centro, ideoque  
erit æqualis quantitati constanti multipli-  
catæ per distantiam (per prop. X.), po-  
sito 2  $T$  pro axe transverso & 2  $R$  pro la-  
tere recto, sit ea quantitas constans  $\frac{FF}{T}$ ,

vis in  $V$  erit  $\frac{FF \times CV}{T}$  vel quoniam  $CV$

=  $T$ , erit  $\frac{FF}{T}$  in aliis verò omnibus punctis

erit  $\frac{FF \times A}{T}$ .

Sit Corpus in circulo revolvens circa  
centrum  $C$  ad distantiam  $CV$ , quâlibet  
vi centripetâ, sed tali ut eadem velocita-  
te feratur quâ corpus in Ellipsi latum  
urgetur in extremitate axis transversi, su-  
mantur in eo Circulo & in extremitate  
axis transversi Ellipseos arcus quammini-  
mi eodem tempore descripti illi arcus erunt  
æquales, ob æquales velocitates, & eo-  
rum sagittæ erunt ut vires Centrales qui-  
bus corpora in circulo & Ellipsi retinen-  
tur (per Cor. 4. Prop. 1.); in Ellipsi-  
bus autem diversis (& iis annumeratur  
Circulus) in quibus vis centripeta ad cen-  
trum tendit, in distantis æqualibus à  
Centro, dupla quadrata facti axium sunt  
inversè ut sagittæ quàm minimo tempore

descriptæ, & directè ut quadrata arearum  
dato tempore descriptarum (per const.  
Prop. X.), cum ergo hic sumantur arcus  
æquales & perpendiculares in lineam ad  
centrum ductam, & distantia à centro sint  
æquales, illæ areæ utrinque sunt æ-  
quales, ergo sagittæ arcuum in Ellipsi  
& in circulo sunt inversè ut ipsa quadrata  
facti axium, seu quia axis transversus Ellip-  
seos & circuli diameter idem sunt, sagittæ  
arcuum in Ellipsi & circulo sunt inversè ut  
quadratum axis conjugati ad quadratum  
transversi, si vè inversè ut Latus rectum ad  
Axem transversum ergo 2  $T$  : 2  $R$  (sive  
 $T : R$ ) =  $\frac{FF}{TT}$  ad vim in Circulo quæ itaque

erit  $\frac{R \times FF}{T}$ , sed hæc vis est ad differentiam

virium in orbe mobili & immobili, ut  
 $FF$  ad  $GG - FF$ , ergo illa differentia est  
 $\frac{RGG - RFF}{T}$ , hæc autem differentia in  $V$ ,

est ad differentiam in alio quovis loco in-  
versè ut cubi altitudinum ergo  $A$  : :  $CV$   
(sive  $T$ ) =  $\frac{RGG - RFF}{T}$  :  $\frac{RGG - RFF}{A}$ ,

cum ergo Vis in Orbe immobili sit ut  
 $\frac{FFA}{T}$  in orbe mobili erit  $\frac{FFA}{T}$  +  
 $\frac{RGG - RFF}{A}$ . Q. E. D.

# PRINCIPIA MATHEMATICA.

345

in  $V$ , id est radius circuli æqualiter-curvi, nominetur  $R$ , & vis De Mo-  
centripeta, quâ corpus in trajectoriâ quâcunque immobili  $VPK$  TU COR-  
revolvi potest in loco  $V$  dicatur  $\frac{VFF}{TT}$ , atque aliis in locis  $P$  LIBER  
PRIMUS.

## FORUM.

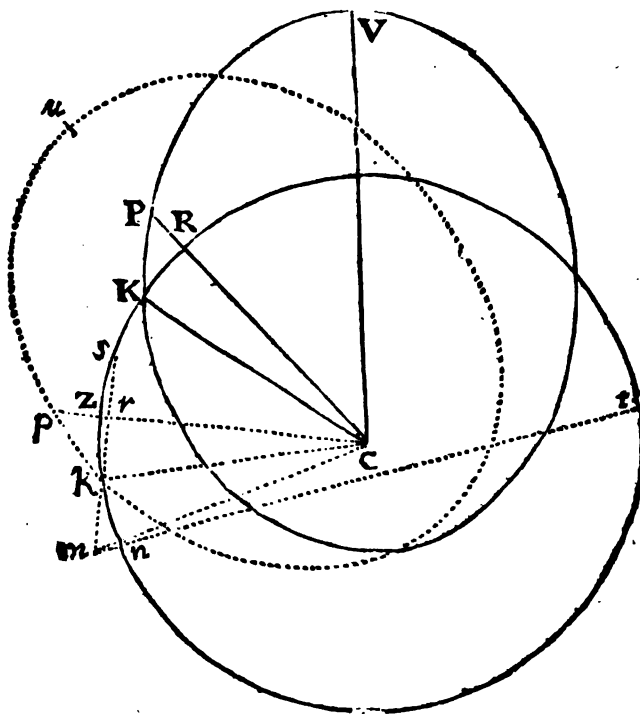
LIBER  
PRIMUS.

Prof.

**XLIV.**

## THEOR.

**XIV.**



indefinitè dicatur  $X$ , altitudine  $CP$  nominatà  $A$ , & capiatur  $G$  ad  $F$  in datà ratione anguli  $\angle C_p$  ad angulum  $\angle CP$ : erit ( $^m$ ) vis centripeta, quâ corpus idem eisdem motus in eâdem trajectoriâ  $upk$  circulariter motâ temporibus iisdem peragere potest, ut sum-

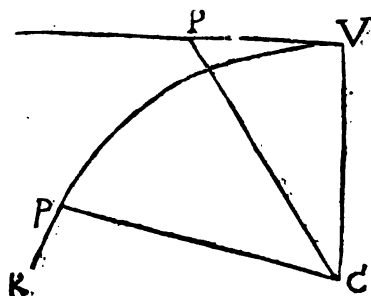
$$\text{ma virium } X + \frac{\text{VRGG} - \text{VRFF}}{A_{\text{cub}}}.$$

*Cerol. 5.* Dato igitur motu corporis in orbe quocunque immobili, augeri vel minui potest ejus motus angularis circa centrum virium in ratione datâ, & inde inveniri novi orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

(m) \* *Eris vis centripeta*, ut hæc commodè demonstrentur adhibendum Lemma, sequens.

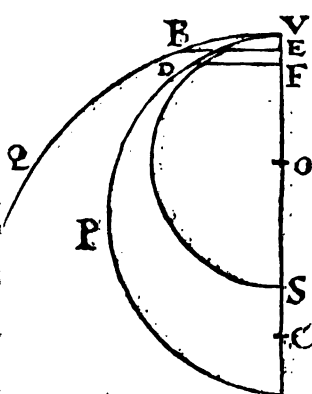
# 346 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo. Corol. 6. Igitur si ad rectam  $CV$  positione datam erigatur perpendiculum  $VP$  longitudinis indeterminatæ, jungaturque  $CP$ , & ipsi æqualis agatur  $Cp$ , constituens angulum  $VCp$ , qui fit ad angulum  $VCp$  in datâ ratione; vis quâ corpus gyrari potest in curva illa  $Vpk$  quam punctum  $p$  perpetuò tangit, erit reciprocè ut cu-



448. Lem.

ma. Si corpus ad centrum virium C tendens describat trajectorym immotam  $VP$ , vis centripeta quâ in apside  $V$  urgetur est ad vim centripetam corporis alterius in circulo  $VBQ$ , ad eandem distantiam  $CV$ , eadem cum velocitate revolvantis, ut distantia  $CV$  ad  $VO$  radium circuli  $VDS$ , trajectorym  $VP$  osculantis in  $V$ . Capiantur in circulo  $VBQ$  & in trajectory  $VP$  arcus quam minimi & æquales  $VB$ ,  $VD$ , & ex punctis  $B$  &  $D$  ad rectam  $CV$  demissa intelligantur perpendicula  $BE$ ,  $DF$ ; arcus evanescentes  $VB$ ,  $VD$  eodem tempore à corporibus duobus percurrentur, ob utriusque corporis velocitatem æqualem, eruntque perpendicula  $BE$ ,  $DF$  æqualia (per Lem. V. II). Quoniam autem arcus evanescentes  $VD$  usurpari potest pro arcu circuli curvam  $VP$  osculantis in  $V$ , erit ex natura circuli  $VF:DF=DF:VO+FO$ , seu  $2VO$ , adeoque  $DF^2=2VO \times VF$ , & similiter  $BE^2=2VC \times VE=2VO \times VF$ ; unde  $VF:VE=VC:VO$ ; sed vis centripeta corporis arcum  $VD$  describentis, est ad vim centripetam alterius corporis arcum  $VB$  describentis ut  $VF$  ad  $VE$ , quæ sunt spatia viribus illis urgentibus eodem tempusculo descripta, quare vis



centripeta quâ corpus in apside  $V$  urgetur, est ad vim centripetam alterius corporis in circulo ad eandem distantiam eadem cum velocitate revolvantis, ut distantia illa  $CV$  ad radium  $VO$  circuli osculatoris in  $V$ . Q. E. D.

449. Cor. 1. Si radius  $VO$  circuli trajectorym  $VP$  osculantis in apside  $V$  dicatur  $R$ , distantia  $CV$ ,  $T$ , distantia

$CP$ ,  $A$ , vis centripeta in  $V$ ,  $\frac{VFF}{TT}$ , hæc

erit ad vim centripetam in circulo  $VQ$ , ad eandem distantiam  $CV$  eadem cum velocitate descripto ut  $T$  ad  $R$ , (448).

hæc ergo erit  $\frac{KRFF}{T}$ , quæ erit ad differ-

rentiam virium centripetarum in apsidibus  $V$  &  $u$ , orbis immobilis  $VP$ , & orbis mobilis  $up$ , ut  $FF$  ad  $GG - FF$  (per Cor. I. Newt.) ideoque differentia illa erit  $VRGG - VRFF$

quæ erit ad differentiam in aliis locis  $P$  ut  $A$  ad  $T$ , ideoque in quibusvis locis erit differentia virium in orbe mobili & immobili  $\frac{VRGG - VRFF}{A}$ .

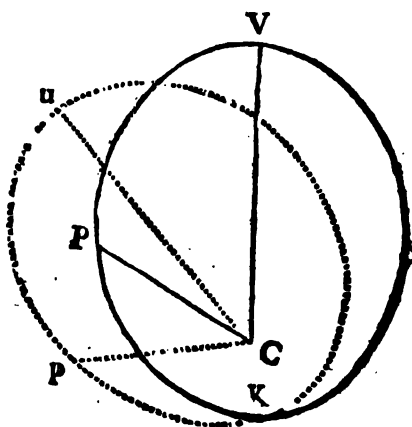
Quod aliâ ratione demonstravit Hermannus prop. 25. Lib. I. Phoronomia.

450. Coroll. 2. Hinc si vis centripeta in quovis puncto  $P$ , orbitæ immobilis  $VP$ , dicatur  $X$ , vis in puncto æque alto  $p$ , orbitæ mobilis  $up$  erit  $X + \frac{VRGG - VRFF}{A}$ .

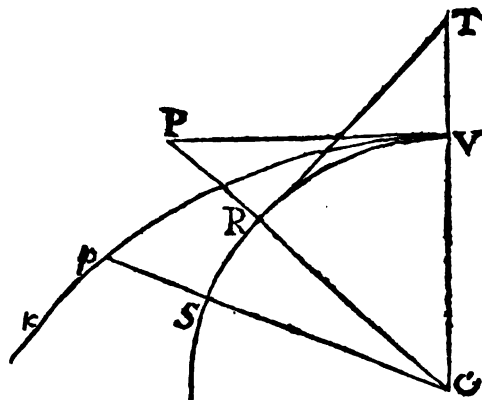
Q. E. D.

451. Corol. 3. Si orbitæ  $VP$  &  $up$  sint ellipses quarum umbilicus communis  $C$ , erit (240.) radius osculi  $R$  æqualis dimidio lateri recto ellipsos  $VP$ , vel  $up$ : & (per Prop.

bus altitudinis  $Cp$ . Nam  $(n)$  corpus  $P$  per vim inertiae, nul- DE Mo-  
lâ aliâ vi urgente, uniformiter progredi potest in rectâ  $VP$ . Ad- TU COR-  
datur vis in centrum  $C$ , cubo altitudinis  $CP$  vel  $Cp$ , reciproce LIBER  
prôportionalis, & ( per jam demonstrata ) detorquebitur motus ille PRIMUS.  
rectilineus in lineam curvam  $Vpk$ . Est  $(o)$  autem hæc curva  $Vpk$  PROP.  
eadem cum curvâ illâ  $VPQ$  in coroll. 3. prop. XLI. inventâ, in quâ XLIV.  
ibi diximus corpora hujusmodi viribus attracta obliquè ascendere. THEOR.  
XIV.



$(n)$  \* Nam corpus  $P$ . Linea  $VP$  con-  
siderari potest tanquam trajectoria immo-  
ta, in quâ vis centripeta  $X$  in loco quo-  
vis  $P$  nulla est, & radius osculi  $R$  in-  
finitus; erit igitur in hoc casu ( per cor.  
4. ) vis centripeta in loco  $p$ , trajectoriae  
mobilis, æqualis  $\frac{VRGG - VRFF}{A}$ , adeo-  
que ob datam quantitatem  $VRGG - VRFF$ ,  
erit  $X$ , seu vis in  $p$ , ut  $\frac{1}{A}$ .



Prop. XI.)  $X \frac{VFF}{TT} = T : AA$ , adeoque

$X = \frac{VFF}{AA}$ , Ergo (450) vis in Orbitâ mobili

erit  $\frac{VFF}{AA} + \frac{VRGG - VRFF}{A}$ , & divisâ om-

nibus terminis per  $V$  ut  $\frac{FF}{AA} +$

$\frac{RGG - RFF}{A}$ ; & si vis centralis ad cen-

tram Ellipseos dirigatur erit  $X : \frac{VFF}{TT} =$

$A : T$  &  $X = \frac{VFF \times A}{T}$ , & vis in Orbita

mobili erit  $\frac{VFF \times A}{A} + \frac{VRGG - VRFF}{A}$

& divisâ terminis per  $V$  erit  $\frac{FF \times A}{T} +$

$\frac{RGG - RFF}{A}$ ; sicut in Cor. 3. & 4. New-

ingtonum fuerat.

$(o)$  \* Est autem hæc curva  $Vpk$  eadem & c.  
Nam si centro  $C$  intervallo  $CV$  describatur  
circulus  $VRS$  quem recta  $CP$  secat in  $R$ ,  
recta  $Cp$ , in  $S$ , sitque angulus  $SCV$  ad  
angulum  $RCV$  in datâ ratione, erit quo-  
que sector  $SV C$  ad sectorem  $RV C$  in  
datâ illâ ratione, & ductâ per punctum  $R$   
tangente  $RT$ , quæ radio  $CV$  producto  
occurrat in  $T$ , ejusdem anguli  $RCV$  se-  
cantes  $CP$ ,  $CT$  erunt æquales, atque  
addeò curva  $Vpk$ , eadem cum curvâ  $VPQ$ ;  
in coroll. 3. prop. 41. inventâ, in quâ recta  
 $Cp$  est semper æqualis abscissa  $CT$ , & an-  
gulus  $V C p$  est semper sectori  $V C R$  pro-  
portionalis.  $XX$



DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.

## PROPOSITIO XLV. PROBLEMA XXXI.

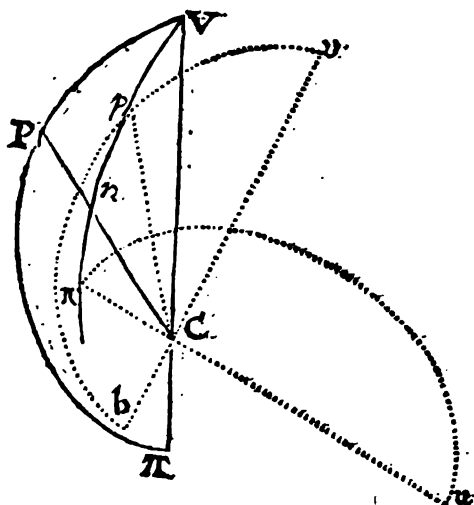
(P) *Orbium qui sunt circulis maxime finitimi requiruntur motus apsidum.*

XLV.

PROBL.

XXXI.

(P) Problema solvitur arithmetice faciendo ut orbis, quem corpus in ellipsi mobili (ut in propositionis superioris corol. 2. vel 3.) revolvens describit in plano immobili, accedat ad formam orbis cujus apsidæ requiruntur, & quærendo apsidæ orbis.



(P) \* *Orbium qui sunt &c.* Iisdem positis quæ in propositione 44 & ejus corollariis 1. & 2. sit  $V.p.n.\pi$  orbis quem corpus  $p$  in ellipsi mobili  $u.p.b$  revolvens describit in plano immobili, &  $V.\pi$  ( $v.b$ , ellipseon immobili & mobilis axes transversæ, manifestum est, punctum  $V$  esse apsidem summam tam in ellipsi immota  $V.P.\pi$ , quam in orbe  $V.p.n.\pi$ , & esse  $\pi$  apsidem imam in orbe  $V.p.n.\pi$  si fuerit  $G.\pi = C.b = C.\pi$ , in quâ hypothesi corpus  $p$  pervenit ad locum  $\pi$ , ubi corpus  $P$  in ellipsi immota pervenit ad apsidem imam.  $\pi$  & in ellipsi revolvente corpus  $p$  pervenit ad  $b$ , ac in orbe  $V.p.n.\pi$ , puncta  $p, b, \pi$ , coincidunt. Jam verò

datâ vi centripetâ in orbe  $V.p.n.\pi$ , quæritur motus apsidum, hoc est, motus axis  $n.c.b$ , seu quod idem est, quæritur ratio  $F$ , ad  $G$ , vel anguli  $V.C.P$  ad angulum  $V.C.p$ , aut anguli  $V.C.\pi$ , 180°. ad angulum  $V.C.\pi$ ; quod si ellipsis  $V.P.\pi$ , sit circulo maxime finitima, orbis  $V.p.n.\pi$  ad circuli formam quam proximè accedet, nam si ellipsis  $V.P.\pi$ , in circulum perfectum mutetur, orbis  $V.p.n.\pi$  fit quoque circulus.

(q) \* *Problema solvitur arithmetice.* Revolvatur corpus  $Y$  in orbe immoto  $Y.Z.f$  vi centripetâ datâ tendente ad centrum  $S$ , sitque punctum  $Y$  apsis summa,  $f$  apsis ima in illo orbe. Umbilico  $S$ , & axe transverso  $Y.S.f = Y.S + S.f$ , descriptæ intelligantur ellipses immobilis & mobilis, efficiendum est ut corpus  $Y$  orbem  $Y.Z.f$  describens, simul revolvatur in hac ellipsi mobili, dum corpus aliud ellipsim immotam describit eâ ratione quam exposuimus. prop. 43. & inveniendus est apsidum motus. Id autem absolvitur faciendo ut orbis  $V.p.n.\pi$  (fig. superiori) qui omnes orbes ut  $Y.Z.f$  quæcumque sit in illis vis centripetæ lex generaliter exhibet accedat ad formam orbis  $Y.Z.f$ , si ve ei similis & æqualis fiat, ac quærendo apsidæ  $V.\pi$ , vel rationem angulorum  $V.C.P$ ,  $V.C.p$ , in orbe illo  $V.p.n.\pi$ . Porro si supponamus orbem  $V.p.n.\pi$ , similem & æqualem factum esse orbi  $Y.Z.f$ , erit vis centripetâ in ellipsi immota cujus um-

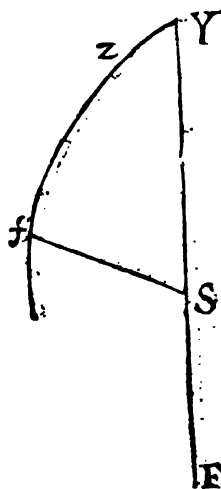
bilicus  $S$  vel  $C$  ut  $\frac{F.F}{A.A}$ , & vis centripetâ in loco quovis  $Z$  orbis  $Y.Z.f$ , vel

bis quem corpus illud in plano immobili describit. Orbes DE MO-  
autem eandem acquirant formam, si vires centripetæ quibus TU COR-  
describuntur, inter se collatæ, in æqualibus altitudinibus red-  
dantur proportionales. Sit punctum  $V$  apsis summa, & scri-  
bantur  $T$  pro altitudine maximâ  $CV$ ,  $A$  pro altitudine quavis  
aliâ  $CP$  vel  $Cp$ , &  $X$  pro altitudinum differentiâ  $CV-CP$ ; &  $X L V$ .  
vis, quâ corpus in ellipsi circa umbilicum suum  $C$  (ut in co-  
rol. 2.) revolvendo movetur, quæque in corol. 2. erat ut  $\frac{FF}{A A}$

+  $\frac{RGG-RFF}{A \text{ cub.}}$ , id est ut  $\frac{FFA+RGG-RFF}{A \text{ cub.}}$ , substi-  
tuendo  $T-X$  pro  $A$ , erit ut  $\frac{RGG-RFF+TFF-FFX}{A \text{ cub.}}$ . Re-

ducenda similiter est vis alia quævis centripeta ad fractionem  
cujus denominator sit  $A \text{ cub.}$  & numeratores, factâ homologo-  
rum terminorum collatione, statuendi sunt analogi. Res exem-  
plis patebit.

Exem-



substituendo  $T-X$  pro  $A$  in numeratore;  
&  $P$  pro numeratore toto. Unde si quan-  
titas  $\frac{Q}{A^3}$  vim centripetam in loco quo-  
vis  $Z$  orbis  $YZ$  exponat, eaque sit data;  
erit  $\frac{P}{A^3}$  ad  $\frac{Q}{A^3}$  in datâ ratione. Sit il-

la ratio 1 ad  $B$ , & erit  $\frac{PB}{A^3} = \frac{Q}{A^3}$ , &

$PB-Q=0$ . Loco  $A$ , in quantitate  $Q$ ,  
substituatur  $T-X$ , & æqualitatis  $PB-Q$   
 $=0$ , termini omnes analogi se mutuo de-  
struere debent, hoc est; termini omnes  
dati seu in quibus non reperitur quanti-  
tas variabilis  $X$  erunt simul nihilo æquales,  
& termini non dati, seu in quibus variabilis  
 $X$  invenitur, erunt etiam simul nihilo æqua-  
les, atque inde determinabitur ratio  $G$  ad  
 $F$  seu anguli  $VCP$  ad angulum  $VCp$ , fa-  
ciendo ut sint termini dati in quantitate  
 $P$  ad terminos non datos ejusdem quanti-  
tatis, ita termini dati in quantitate  $Q$ , ad  
terminos non datos ejusdem quantitas.  
Quod exemplis patebit.

$$\begin{aligned} \text{vel in loco } P, \text{ orbis } Vp \text{ n. ut } \frac{FF}{AA} + \\ \frac{RGG-RFF}{A^3} = \frac{FFA+RGG-RFF}{A^3} \\ = \frac{RGG-RFF+TFF-FFX}{A^3} = \frac{P}{A^3} \end{aligned}$$

DE MO- (1) *Exempl. 1.* Ponamus vim centripetam uniformem esse;  
TU COR-  
PORUM. ideoque ut  $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ cub.}}$ , sive (scribendo T — X pro A in numerato-

LIBER  
PRIMUS.  
PROP. re ) ut  $\frac{T \text{ cub.} - 3 TTX + 3 TXX - X \text{ cub.}}{A \text{ cub.}}$ ; & collatis nume-

XLV.  
PROBL.  
XXXI. ratorum terminis correspondentibus; nimirum datis cum datis, & non datis cum non datis, fiet RGG — RFF + TFF ad T cub. ut — FFX ad — 3 TTX + 3 TXX — X cub. sive ut — FF ad — 3 TT + 3 TX — XX. Jam cum orbis ponatur circulo quam maximè finitimus, coeat orbis cum circulo; & ob factas R, T æquales, atque X in infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt RGG ad T cub. ut — FF ad 3 TT, seu GG ad TT ut FF ad 3 TT, & vicissim GG ad FF ut TT ad 3 TT, id est, ut 1 ad 3; ideoque G ad F, hoc est angulus VCP ad angulum VCP, ut 1 ad  $\sqrt{3}$ . Ergo cum corpus in ellipsi immobili, ab apside summâ ad apsidem imam nesciendo conficiat angulum VCP (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in ellipsi mobili, atque ideo in orbe immobili de quo agimus, ab apside summâ ad apsidem imam descendendo conficiet angulum VCP graduum  $\frac{180}{\sqrt{3}}$ : id ideo ob similitudinem orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripetâ describit, & orbis illius quem corpus in

(1) \* *Exemplum 1<sup>um</sup>.* Ponamus vim centripetam in orbe YZf uniformem seu constantem esse, ideoque ut 1, seu ut  $\frac{A_1}{A_1}$ , erit  $Q = A_1 = T_1 - 3 TTX + 3 TXX - X_1$ , &  $PB = BRGG - BRFF + BTFF - BFFX$  atque adeò  $BRGG - BRFF + BTFF - BFFX - T_1 + 3 TTX - 3 TXX + A_1 = 0$ , & termini dati  $BRGG - BRFF + BTFF - T_1 = 0$ , seu  $BRGG - BRFF + BTFF = T_1$ , & termini non dati  $-BFFX + 3 TTX - 3 TXX + X_1 = 0$ , seu  $BFF = 3 TT - 3 TX + X^2$ , unde hæc proportio deducitur  $BRGG - BRFF + BTFF : BFF = T_1 : 3 TT - 3 TX + X^2 = RGG - RFF + TFF : FF$ . Jam cum orbis YZf, ponatur circulo quam maximè finitimus,

coeat orbis cum circulo & ob factas R & T æquales, atque  $X = 0$ , erit  $X^2 = 0$ ,  $3 TX = 0$ ,  $FF = TFF$ , & hinc  $T_1 : 3 TT = RGG : FF = TGG : FF$ , &  $T^2 : 3 T^2 = 1 : 3 = GG : FF$ , adeoque  $G : F = 1 : \sqrt{3}$ , hoc est, angulus VCP, est ad angulum VCP, ut 1, ad  $\sqrt{3}$ . Ergo cum corpus in ellipsi immobili VPn, ab apside summâ V ad apsidem imam n descendendo, conficiat angulum VCP grad. 180. corpus aliud in ellipsi mobili upb, atque adeò in orbe immobili VPn, seu YZf, ab apside summâ V vel Y, ad apsidem imam n vel f, descendendo conficiet angulum VCP, vel  $Ysf \text{ grad. } \frac{180}{\sqrt{3}}$ .

in ellipsi revolvente gyros peragens describit in plano quiescen-  
te. Per superiorem terminorum collationem similes redduntur  
hi orbes, non universaliter sed tunc cum ad formam circularem  
quam maximè appropinquant. Corpus igitur uniformi cum  
vi centripetâ in orbe propemodum circulari revolvens, inter  
apsidem summam & apsidem imam conficiet semper angu-  
lum. DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROB-  
L. V.

180  
lum.  $\frac{\sqrt{3}}$  graduum, seu 103. gr. 55. m. 23. sec. ad centrum; PROBL.  
XXXI.

perveniens ab apside summâ ad apsidem imam ubi semel con-  
fecit hunc angulum, & inde ad apsidem summam rediens  
ubi iterum confecit eundem angulum; & sic deinceps in in-  
finitum.

*Exempl. 2.* Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis A dig-  
nitas quælibet  $A^n - 3$  seu  $\frac{A^n}{A^3}$ : ubi  $n - 3$  &  $n$  significant dignita-

tum indices quoscunque integros vel fractos, rationales vel ir-  
rationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille  $A^n$  seu  
 $T - X$  in seriem indeterminatam per (f) methodum nostram

serierum convergentium reducta, evadit  $T^{n-n} X T^{n-1} + \frac{n n - n}{2}$

$XX T^{n-x}$  &c. Et collatis hujus terminis cum terminis nume-  
ratoris alterius  $RGG - RFF + TFF - FFX$ , fit  $RGG - RFF$

$+ TFF$  ad  $T^n$  ut  $- FF$  ad  $- n. T^{n-1} + \frac{n n - n}{2} X T^{n-2}$  &c.

Et

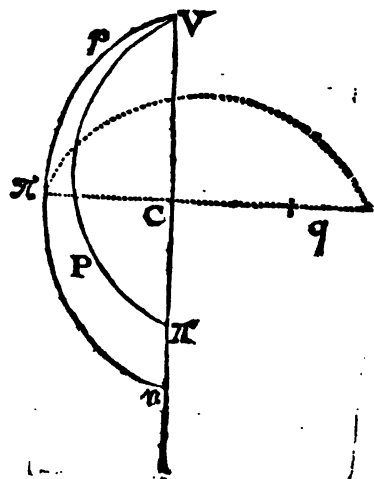
(f) \* Per methodum nostram. Vide  
fragmentum Epistolæ NEWTONI ad Olden-  
burgium, & theorematis ibi propositi de-  
monstrationem requiras ex Elementis Alge-  
bræ clarissimorum Virorum WOLFFI, Abba-  
tis de Molieres, vel ex Analyâ demonstra-  
tâ Patris REYNEAU, aut ex aliis passim au-  
thoribus. Interim cum hic satis sit duos  
priors terminos dignitatis  $T - X^n$  reperi-  
re ob evanescentes terminos in quibus re-  
peritur ipse  $X$  dignitas primâ altior,  
facile demonstratur ex dignitatum per con-  
tinuam radicis multiplicationem forma-  
tione duos illos priores terminos esse

$T^n \times X T^{n-1}$ . Ut si fuerit  $n = 2$ , duo prio-  
res termini dignitatis  $T - X^2$ , erunt  $T^2 - 2 X$   
 $TX$ ; si  $n = 3$ , erunt  $T^3 - 3 X T^2$ , &  
itâ porrè; atque hinc patet quàm com-  
pendiosa sit NEWTONIANA methodus mo-  
tum apsidum determinandi, nam præter-  
quam quod sufficit duos dignitatum ter-  
minos invenire, possunt quoque termini  
æquales  $RFF, TFF$ , in formulâ  $RGG -$   
 $RFF + TFF - FFX$ , deleri; undè tan-  
tummodò conferendus terminus datus  $RGG$   
cum aliis terminis datis, & terminus non  
datus  $- FFX$  cum aliis non datis.

## 352 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

**DE MO** Et sumendo rationes ultimas ubi orbes ad formam circulem  
**TU COR-** accedunt, fit  $RGG$  ad  $T^n$  ut  $FF$  ad  $n T^{n-1}$ , seu  $GG$   
**PORUM.** ad  $T^n$  ut  $FF$  ad  $n T^{n-1}$ , & vicissim  $GG$  ad  $FF$  ut  $T^{n-1}$   
**LIBER** ad  $n T^{n-1}$  id est ut  $1$  ad  $n$ ; ideoque  $G$  ad  $F$ , id est angu-  
**PRIMUS.** lus  $VCP$  ad angulum  $VCP$ , ut  $1$  ad  $\sqrt{n}$ . Quare cum angu-  
**PROP.** lus  $VCP$ , in descensu corporis ab apside summâ ad apsidem  
**XLV.** imam in ellipsi confectus, fit graduum  $180$ ; conficietur angulus  
**PROBL.**  $VCP$ , in descensu corporis ab apside summâ ad apsidem imam,  
**XXXI.** in orbe propemodum circulari quem corpus quodvis vi centri-  
 petâ dignitati  $A^n$  proportionali describit, æqualis angulo gra-  
 duum  $\frac{180}{\sqrt{n}}$ ; & hoc angulo repetito angulus redibit ab apside  
 imâ ad apsidem summam, & sic deinceps in infinitum. Ut si  
 vis centripeta sit ut distantia corporis à centro, id est, ut  $A$   
 seu  $\frac{A^4}{A^3}$ , erit  $n$  æqualis  $4$  &  $\sqrt{n}$  æqualis  $2$ ; ideoque angulus in-  
 ter apsidem summam & apsidem imam æqualis  $\frac{180}{2}$  gr. seu  $90$   
 gr. Completâ igitur quartâ parte revolutionis unius corpus per-  
 veniet ad apsidem imam, & completâ aliâ quartâ parte ad ap-  
 sidem summam, & sic deinceps per vices in infinitum. Id (1)

(1) \* Id quod etiam ex prop. 10. &c.  
 Nam corpus urgente hac vi centripetâ re-  
 volvetur in ellipsi immobili  $Vp \propto n$ , cujus  
 centrum est in centro virium  $C$ , axis trans-  
 versus  $Vn$ , axis conjugatus  $\pi q$ , apsidem  
 summâ duæ  $V, n$ , imæ  $\pi, q$ ; ellipseos  
 autem mobilis  $VP \pi$ , umbilicus erit  $C$ ,  
 axis transversus  $V \pi = VC + C \pi$ .



# PRINCIPIA MATHEMATICA. 353

quod etiam ex propositione x. manifestum est. Nam corpus urgente hac vi centripetâ revolvetur in ellipsi immobili, cujus centrum est in centro virium. Quod si vis centripeta sit reciproce

DE MOTU CORPORUM.  
LIBER

ut distantia, id est directe ut  $\frac{1}{A}$  seu  $\frac{A^2}{A^3}$ ; erit  $n$  æqualis 2,

PRIMUS.  
PROP.

ideoque inter apsidem summam & imam angulus erit graduum

XLV.  
PROBL.

$\frac{180}{\sqrt{2}}$  seu 127 gr. 16. m. 45. sec. & propterea corpus tali vi re-

XXXI.

volvens, perpetuâ anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab apside summâ ad imam & ab imâ ad summam perveniet in æternum. Porro si vis centripeta sit reciproce ut latus quadrato-

quadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id est reciproce ut  $A^{\frac{11}{4}}$ , (u) ideoque directe ut  $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$  seu ut  $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$  erit æqualis  $\frac{1}{4}$ ;

&  $\frac{180}{\sqrt{n}}$  gr. æqualis 360 gr. & propterea corpus de apside sum-

mâ discedens & subinde perpetuò descendens, perveniet ad apsidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo ascensu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad apsidem summam: & sic per vices in æternum.

Exempl. 3. Assumentes  $m$  &  $n$  pro quibusvis indicibus dignitatum altitudinis, &  $b, c$  pro numeris quibusvis datis, ponamus vim centri-

petam esse ut  $\frac{b A^m + c A^n}{A^{cub.}}$ , id est, ut  $\frac{b \ln T - X |^m + c \ln T - X |^n}{A^{cub.}}$

seu (x) (per eandem methodum nostram serierum convergentium) ut

(u) \* Ideoque directe ut  $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ , seu ut

$\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ , cum sit  $A^{\frac{1}{4}} = A^{\frac{11}{4}}$ , & proinde est  $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^{\frac{11}{4}}} = A^{-1}$ , atque ita  $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}} = \frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^5}$ .

(x) \* Seu per eandem methodum. Et enim dignitas  $T - X$ , evoluta, est  $T^m - mXT^{m-1} + c.c.$  adeoque  $bXT^{m-1} = bT^m - mXT^{m-1} + c.c.$  & similiter  $cXT^{n-1} = cT^n - n cXT^{n-1} + c.c.$  unde  $bXT^{m-1} + cXT^{n-1} = bT^m + cT^n - mXT^{m-1} - n cXT^{n-1} + c.c.$

DE MO-

TU COR- ut  $bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXXT^{m-2}$ 

PORUM.

LIBER

A cub.

PRIMUS.

PROP.  $+ \frac{nn-n}{2}cXXT^{n-2} \&c.$  & collatis numeratorum terminis;

XLV.

PROBL.

A cub.

XXXI. fiet RGG—RFF+TFF ad  $bT^m + cT^n$ , ut—FF ad— $mbT^{m-1}$ — $ncT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXT^{n-2} \&c.$  Et su-

mendo rationes ultimas quæ prodeunnt ubi orbes ad formam circulare accedunt, fit GG ad  $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ , ut FF ad  $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$ , & vicissim GG ad FF ut  $bT^{m-1} + cT^{n-1}$  ad  $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$ . Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam CV seu T arithmetice per unitatem, fit GG ad FF ut  $b+c$  ad  $mb+nc$ , ideoque ut 1 ad  $\frac{mb+nc}{b+c}$ . Unde est G ad F, id est angulus VCP ad angu-

lum VCP, ut 1 ad  $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$ . Et propterea cum angulus

VCP inter apsidem summam & apsidem imam in ellipsi immo-

bili sit 180 gr. erit angulus VCP inter easdem apsidem, in or-

be quem corpus vi centripetâ quantitati  $\frac{bA^m + cA^n}{A \text{ cub.}}$  proportio-

nali describit, æqualis angulo graduum 180  $\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$ . Et

(7) eodem argumento si vis centripeta sit ut  $\frac{bA^m - cA^n}{A \text{ cub.}}$ , an-

gulus

(7) \* Es eodem argumento. Si vis centripeta sit ut  $\frac{bA^m - cA^n}{A}$ , id est ut

$b \times T - X = -c \times T - X$ , seu ut  $\frac{bT - cT - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1}}{A}$  &c.

collatis terminis fiet RGG, hoc est TGG

ad  $bT = -cT$ , ut—FF ad— $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$ , adeoque GG ad  $bT^{m-1} - cT^{n-1}$ , ut FF ad  $mbT^{m-1} - ncT^{n-1}$ , & ponendo  $T=1$ , erit GG:FF =  $b-c$ :  
 $mb-nc=1$ :  $\frac{mb-nc}{b-c}$ , & G:F = 1:

$\sqrt{\frac{mb-nc}{b-c}}$

gulus inter apfides invenietur graduum  $180 \sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$ . Nec DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.

secus resolvetur problema in casibus difficilioribus. Quantitas, cui vis centripeta proportionalis est, resolvi semper debet in series LIBER  
PRIMUS. convergentes denominatorem habentes A cub. Dein pars PROP. data numeratoris qui ex illâ operatione provenit ad ipsius par- XLV. tem alteram non datam, & pars data numeratoris hujus R G G PROBL. — R F F + T F F — F F X ad ipsius partem alteram non datam X X X L in eâdem ratione ponendæ sunt: Et quantitates superfluas delendo, scribendoque unitatem pro T, obtinebitur proportio G ad F.

*Corol. 1.* Hinc si vis centripeta sit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri potest dignitas illa ex motu apsidum; & contra. Nimirum si motus totus angularis, quo corpus redit ad apsidem eandem, sit ad motum angularem revolutionis unius, seu graduum 360, ut numerus aliquis  $m$  ad numerum alium  $n$ , & altitudo nominetur A: erit vis ut altitudinis dignitas illa

$A^{\frac{nn}{mm}} - 3$ , cujus index est  $\frac{nn}{mm} - 3$ . Id (2) quod per exempla

secunda manifestum est. (a) Unde liquet vim illam in majore quàm triplicatâ altitudinis ratione, in recessu à centro, decrescere

(2) 452. \* Id quod per exempla secunda manifestum est. Si in exemplo secundo loco indicis  $n$ , ad confusionem tollendam scribatur  $p$ , erit vis centripeta, ut  $A^p - 1$ , & angulus confectus in descensu ab apside summâ ad apsidem imam æqualis angulo  $\frac{180^\circ}{\sqrt{p}}$ , adeoque duplus ille angulus seu motus totus angularis quo corpus ab apside summâ redit ad eandem erit  $\frac{360}{\sqrt{p}}$  in exemplo secundo. Est autem in casu corollarii hujus, motus totus angularis quo corpus redit ad apsidem eandem æqualis angulo  $\frac{360m}{n}$ , ergo  $\frac{360}{\sqrt{p}} = \frac{360m}{n}$ , &  $\frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{m}{n}$ , &  $\frac{1}{p} = \frac{mm}{nn}$ , &  $\frac{nn}{mm} = p$ ; quare  $A^p - 1$ ,

$$= A^{\frac{nn}{mm}} - 1,$$

(a) 453. Unde liquet vim illam. Nam si vis esset ut  $\frac{1}{A+1}$ , seu ut  $A - 1 - 1$ ,

siveque  $+q$  quantitas positiva, esset  $\frac{nn}{mm} - 3$

$= -3 - q$ , &  $\frac{nn}{mm} = -q$ , hoc est,

quadratum quantitatis  $\frac{n}{m}$  negativum, quod absurdum est: non potest igitur vis in majore quàm in triplicatâ altitudinis ratione seu in ratione  $\frac{1}{A+1}$ , in recessu à centro decrescere.

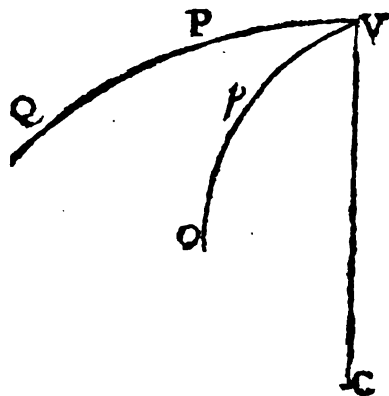


DE Mo- cere non posse : (b) Corpus tali vi revolvens deque apside dis-  
 TU COR- cedens , si cœperit descendere , nunquam perveniet ad apsidem  
 FORUM. imam seu altitudinem minimam , sed descendet usque ad cen-  
 LIBER. trum , describens curvam illam lineam de quâ egimus in *corol.*  
 PRIMUS. *PROP.* 3. *prop.* xli. Sin cœperit illud , de apside discedens , vel mi-  
 XLV. nimum ascendere ; ascendet in infinitum , neque unquam perve-  
 PROBL. niet ad apsidem summam. Describet enim curvam illam lineam  
 XXXI. de quâ actum est in eodem *corol.* & in *corol.* vi. *prop.* xlii. Sic (c) & ubi vis , in recessu à centro , decrescit in maiore quam triplicatâ ratione altitudinis , corpus de apside discedens , perinde ut cœperit descendere vel ascendere , uel descendet ad centrum

(b) \* *Corpus tali vi revolvens* , hoc est , vi quæ in recessu à centro decrescat in ratione altitudinis triplicatâ deque apside discedens &c. Sint enim ut in *coroll.* 3<sup>o</sup>. *prop.* 4<sup>i</sup>. duæ curvæ V p O , V P Q , quas corpora duo de loco V , secundum directionem ad C V perpendicularem egres- sa , vi centripetâ ad C tendente , & in triplicatâ altitudinis ratione decrescente in recessu à centro describunt , & corpus in curvâ V p O , latum ad centrum semper accedat , corpus verò in curvâ V P Q , motum à centro semper recedat ut in eodem *cor.* 3<sup>o</sup>. *prop.* 4<sup>i</sup>. manifestum est punctum V esse apsidem summam in curvâ V p O , & esse apsidem imam in curvâ V P Q ; Quare cum in curvâ V p O , corpus ad centrum semper accedat , nunquam pervenire potest ad apsidem imam , seu altitudinem minimam quæ nulla est , sed gyris infinitis descendit usque ad centrum ; in curvâ verò V P Q de apside imâ discedens corpus ascendit in infinitum , neque unquam pervenit ad apsidem summam quæ nulla est. Hæc demonstrari etiam possunt

hâc ratione ; Si fuerit vis ut  $\frac{1}{A}$  , seu ut

$A - 1$  ; erit  $\frac{n n}{m m} - 3 = - 3$  , &  $\frac{n n}{m m} = 0$   
 $= p$  ( 452 ) & motus totus angularis ab apside ad eandem apsidem erit  $\frac{360^\circ}{\sqrt{p}} =$   
 $\frac{360}{0}$  ; motus verò angularis ab apside sum-



mâ ad imam , vel ab imâ ad summam erit  $\frac{180^\circ}{0}$  quæ est quantitas infinita , unde li-  
 quet in nostrâ Hypothesi corpus ab apside imâ ad summam aut à summâ ad imam nunquam pervenire posse.

(c) \* *Sic & ubi vis in recessu à centro.*

Si vis fuerit ut  $\frac{1}{A + \frac{1}{q}}$  , & q , quantitas

positiva , erit ( 453 )  $\frac{n n}{m m} = - q = p$  , &  
 ( 452 ) motus totus angularis ab apside ad apsidem eandem erit  $\frac{360^\circ}{\sqrt{-q}}$  , & ab apside  
 unâ ad alteram erit  $\frac{180^\circ}{\sqrt{-q}}$  : quare ob ima-

trum usque vel ascendet in infinitum. At (d) si vis, in recessu à centro, vel decrescat in minore quam triplicatâ ratione altitudinis, vel crescat in altitudinis ratione quâcunque; corpus nunquam descendet ad centrum usque, sed ad apsidem imam aliquando perveniet: & (e) contra, si corpus de apside ad apsidem alternis vicibus descendens & ascendens nunquam appellat ad centrum; vis in recessu à centro aut augebitur, aut in minore quam triplicatâ altitudinis ratione decrescet: & quo citius corpus de apside ad apsidem redierit, eo longius ratio virium recedet à ratione illâ triplicatâ. Ut si corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel  $1\frac{1}{2}$  de apside summâ ad apsidem summam alterno descensu & ascensu redierit; hoc est, si fuerit  $m$  ad  $n$  ut 8 vel 4 vel

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROPOSITION. LV. PROBL. XXXI.

ginariam quantitatem  $\sqrt{-q}$ , impossibile est ut corpus de apside summâ discedens, adeoque ad centrum accedens, ad apsidem imam unquam perveniat, & ut de apside imâ discedens ac proinde à centro recedens unquam perveniat ad apsidem summam.

(d) \* At si vis in recessu à centro. Sit vis ut  $\frac{1}{A, - q}$ , &  $q$ , quantitas positiva

$$\text{erit } \frac{nn}{mm} - 3 = -3 + q, \text{ \& } \frac{nn}{mm} = q = p$$

(452.) Unde motus totus angularis ab apside ad eandem erit  $\frac{360^\circ}{\sqrt{p}} = \frac{360^\circ m}{n}$ , motus angularis ab apside unâ ad alteram

$$= \frac{180}{\sqrt{p}} = \frac{180m}{n}, \text{ quæ sunt quantitates reales \& positivæ, quare in hac Hypothesi corpus ab apside ad apsidem eandem redire \& ab apside summâ ad imam atque ab imâ ad summam pervenire poterit. Est autem}$$

$\frac{1}{A, - q}$ , altitudinis  $A$  dignitas, si fuerit  $q$  major quam 3, è contrâ  $\frac{1}{A, - q}$  est dignitas quantitatis  $\frac{1}{A}$ , si fuerit  $q$  minor quam 3. Liqueat igitur, si vis in recessu à centro vel decrescat in minore quam triplicatâ ratione altitudinis, (quod fit ubi  $q$  minor quam 3) vel crescat in altitudinis

ratione quâcunque (quod fit ubi  $q$ ; major quam 3) corpus nunquam descendere ad centrum usque, sed ad apsidem imam aliquando pervenire.

(e) \* Et contra si corpus de apside ad apsidem &c. Nam si vis in recessu à centro non augeatur, nec etiam minuat in minore quàm triplicatâ altitudinis ratione, necessariò decrescet vel in triplicatâ vel in majore quàm triplicatâ altitudinis ratione, sed supra demonstratum est in his duobus casibus corpus non posse ab apside ad apsidem alternis vicibus descendere & ascendere, ergò si corpus de apside ad apsidem alternis vicibus descendens & ascendens nunquam appellat ad centrum, vis in recessu à centro augebitur, aut in minore quam triplicatâ altitudinis ratione decrescet, & quo citius corpus de apside ad apsidem redierit, eò longius ratio virium recedet à ratione illâ triplicatâ. Quo enim citius corpus de apside ad apsidem redierit, eò minor erit quantitas  $\frac{360m}{n}$ , aut quantitas  $\frac{m}{n}$ , adeoque eò ma-

jor erit quantitas  $\frac{n}{m}$ , ejusque quadra-

$$\text{tum } \frac{nn}{mm} = p = q, \text{ \& hinc eò longius}$$

quantitas  $\frac{1}{A, - q}$  à quantitate  $\frac{1}{A}$  recedet.

# 358 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

LIBER  
PRIMUS.

PROP.

XLV.

PROBL.

XXXI.

4 vel 2. vel 1  $\frac{1}{2}$  ad 1, ideoque  $\frac{n n}{m m} - 3$  valeat  $\frac{1}{4} - 3$  vel  $\frac{1}{12}$   
— 3 vel  $\frac{1}{4} - 3$  vel  $\frac{1}{12} - 3$ : erit vis ut  $A^{\frac{1}{4}-3}$  vel  $A^{\frac{1}{12}-3}$  vel  $A^{\frac{1}{4}-3}$   
vel  $A^{\frac{1}{12}-3}$ , id est, reciproce ut  $A^{3-\frac{1}{4}}$  vel  $A^{3-\frac{1}{12}}$  vel  $A^{3-\frac{1}{4}}$   
vel  $A^{3-\frac{1}{12}}$ . Si corpus singulis revolutionibus redierit ad apsidem  
eandem immotam; erit  $m$  ad  $n$  ut 1 ad 1, ideoque  $A^{\frac{n n}{m m} - 3}$

æqualis  $A^{-2}$  seu  $\frac{1}{A A}$ ; & propterea decrementum virium in ra-  
tione duplicatâ altitudinis, ut (f) in præcedentibus demon-  
stratum est. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quar-  
tis, vel duabus tertiis, vel unâ tertiâ, vel unâ quartâ, ad ap-  
sidem eandem redierit; erit  $m$  ad  $n$  ut  $\frac{1}{4}$  vel  $\frac{1}{3}$  vel  $\frac{1}{3}$  vel  $\frac{1}{4}$  ad 1,  
ideoque  $A^{\frac{n n}{m m} - 3}$  æqualis  $A^{\frac{16}{9} - 3}$  vel  $A^{\frac{25}{9} - 3}$  vel  $A^{3 - 3}$  vel  $A^{16 - 3}$ ;

& (g) propterea vis aut reciproce ut  $A^{\frac{11}{9}}$  vel  $A^{\frac{3}{4}}$  aut direc-  
tè ut  $A^6$  vel  $A^{13}$ . Denique si corpus pergendo ab apside sum-  
mâ ad apsidem summam confecerit revolutionem integram, &  
præterea gradus tres, ideoque apsis illa singulis corporis revo-  
lutionibus confecerit in consequentia gradus tres; erit  $m$  ad  $n$

ut 363 gr. ad 360. gr. five ut 121 ad 120, (h) ideoque  $A^{\frac{n n}{m m} - 3}$   
erit

(f) \* *Us in præcedentibus demonstra-  
tum est. In hoc enim casu corpus de-  
scribit ellipsem immotam circulo finitimam  
(per cor. 1. prop. XIII) intereadam æqua-  
liter movetur in ellipsi simili & æquali  
circa umbilicum revolvente eum celeritate  
duplâ ejus quâ corpus idem in eadem el-  
lipsi mobili fertur (446).*

(g) \* *Ex propterea vis aut reciproce.  
Us  $A^{\frac{11}{9}}$ , vel  $A^{\frac{3}{4}}$ , vel directè aut  $A^6$ ,  
vel  $A^{13}$ . Est enim  $A^{\frac{16}{9} - 3} = A^{-\frac{11}{9}} =$   
 $\frac{1}{A^{\frac{11}{9}}}$ , &  $A^{\frac{25}{9} - 3} = \frac{1}{A^{\frac{11}{9}}}$  &  $A^{3 - 3} = A^0$   
&  $A^{16 - 3} = A^{13}$ .*

(h) \* *Ideoquæ  $A^{\frac{n n}{m m} - 3}$  erit æqualis  
 $A^{\frac{29523}{14641}}$ . Erit enim in hac hypothesi  
 $\frac{n n}{m m} = \frac{14400}{14641}$ , &  $\frac{n n}{m m} - 3 = \frac{14400}{14641} - 3 = \frac{29523}{14641}$ .  
Est autem  $\frac{29523}{14641} = 2 + \frac{241}{14641} = 2 + \frac{4}{243}$ ,  
proximè; nam  $241 \times 243 = 58563$ , &  $4 \times$   
 $14641 = 58564$ ; decrescit igitur vis cen-  
tripeta in ratione paulò majore quam du-  
plicatâ, sed quæ vicibus 59  $\frac{1}{4}$ , propius  
ad duplicatam quam ad triplicatam acce-  
dit.*

erit æquale  $A^{-\frac{29523}{14643}}$ ; & propterea vis centripeta reciprocè ut  $A^{\frac{29523}{14643}}$  seu reciprocè ut  $A^{\frac{4}{243}}$  proximè. Decrescit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicatâ, sed quæ vicibus 59½ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

*Corol. 2.* Hinc etiam si corpus, vi centripetâ quæ sit reciprocè ut quadratum altitudinis, revolvatur in ellipsi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognosci potest (per exempla tertia) motus apsidum qui ex vi illâ extraneâ oriatur: &

contra. Ut si vis quâ corpus revolvitur in ellipsi sit ut  $\frac{1}{AA}$ , &

vis extranea ablata ut  $cA$ , ideoque vis reliqua ut  $\frac{A - cA^4}{A^{\text{cub.}}}$ ; erit

(in exemplis tertiis)  $b$  æqualis 1,  $m$  æqualis 1, &  $n$  æqualis 4, ideoque angulus revolutionis inter apsidæ æqualis angulo gra-

duum  $180 \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ . (i) Ponamus vim illam extraneam esse

357. 45 partibus minorem quam vis altera quâ corpus revolvitur

est, differentia enim inter 2, &  $2 + \frac{4}{243}$ , est  $\frac{4}{243}$ ; differentia verò inter 3 &  $2 + \frac{4}{243}$  est  $1 - \frac{4}{243} = \frac{239}{243}$ . Porro  $\frac{239}{243}$  est ad  $\frac{4}{243}$  seu 239 ad 4 ut 59½ ad 1.

(i) \* Ponamus esse  $c \propto A$  ad  $\frac{1}{AA}$ ; hoc est, ponendo  $A$  vel  $T = 1$ ,  $c$  ad 1, ut 100 ad 35745, id est, ut 1 ad 357, 45, & erit  $c = \frac{100}{35745}$ ,  $1 - c = \frac{35645}{35745}$ ,  $1 - 4c = \frac{35345}{35745}$ ; unde  $\frac{1-c}{1-4c} = \frac{35645}{35345}$ , & hinc  $180 \times \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}} = 180 \times \sqrt{\frac{35645}{35345}}$  &c.

454. Scholium. *Hermannus* in scholio ad prop. 25. lib. 1. *Phoronomiæ* formulam invenit quâ ex datâ vi centripetâ motus apsidum determinatur, & contrâ; hanc ipsam ex prius ostensis hic demonstrabimus. Iisdem igitur positis quæ in not. 449, sit vis centripeta in ellipseos mobilis loco quo vis  $p$ , seu (451) vis  $\frac{VFFA + VRGG - VRFF}{A}$ ,

$= \frac{y}{A} = \frac{y}{z}$ , ponendo altitudinem  $A = z$ , & erit (450)  $= VFFz + VRGG - VRFF$ ; capiantur utrinque fluxiones & invenietur  $dy = VFFdz$ , & faciendo  $Qdz = dy$ , erit  $Q = VFF$ . Loco  $VFF$ , ipsius valor  $Q$  substituatur in superiori æquatione, & erit  $y = Qz + \frac{QRGG - QRFF}{FF} = Qz - QR + \frac{QRGG}{FF}$ .

Jam

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XIV.  
PROBL.  
XXXI.

# 360 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MOTU CORP. LIBER  
vitur in ellipsi, id est  $c$  esse  $\frac{100}{33745}$ , existente  $A$  vel  $T$  æquali 1;  
&  $180 \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$  evadet  $180 \sqrt{\frac{1.645}{33345}}$ , seu  $180.7623$ , id est;

PRIMUS.  $180 \text{ gr. } 45 \text{ m. } 44 \text{ s.}$  Igitur corpus de apside summâ disce-  
dens, motu angulari  $180 \text{ gr. } 45 \text{ m. } 44 \text{ s.}$  perveniet ad  
apsidem imam, & hoc motu duplicato ad apsidem summam  
redibit: ideoque apsis summa singulis revolutionibus progredien-  
do conficiet  $1 \text{ gr. } 31 \text{ m. } 28 \text{ sec.}$  Apsis lunæ est duplo velo-  
cior circiter.

Haftenus de motu corporum in orbibus quorum plana per cen-  
trum virium transeunt. Superest ut motus etiam determinemus  
in planis excentricis. Nam scriptores qui motum gravium trac-  
tant, considerare solent ascensus & descensus ponderum, tam  
obliquos in planis quibuscunque datis, quam perpendiculares:  
& pari jure motus corporum viribus quibuscunque centra pe-  
tentium, & planis excentricis innitentium hic considerandus  
venit. Plana autem supponimus esse politissima & absolutè lu-  
brica ne corpora retardent. Quinimo, in his demonstrationi-  
bus, vice planorum quibus corpora incumbunt quæque tangunt  
incumbendo, usurpamus plana his parallela, in quibus centra cor-  
porum moventur & orbitas movendo describunt. Et eâdem le-  
ge motus corporum in superficiebus curvis peractos subinde de-  
terminamus.

SEC.

Jam cum orbis ponatur circulo quam  
maximè finitimus, erit  $z = R = T$ ,

& proinde  $y = \frac{QTGG}{FF}$  & hinc  $G G$ :

$FF = y : QT$ , ac  $G : F = \sqrt{y} : \sqrt{QT}$  quæ  
est formula generalis quæsitâ. Nam sit,

exempli causâ, vis centripeta  $\frac{bz^m + cz^n}{z^3}$

hoc est  $y = \frac{bz^m + cz^n}{z^3}$ , erit  $dy = Q dz$   
 $= mbz^{m-1} dz + ncz^{n-1} dz$ ; unde  $Q$   
 $= mbz^{m-1} + ncz^{n-1}$ , atque ità per  
formulam inventam  $GG : FF = bz^m + cz^n :$   
 $Tmbz^{m-1} + Tncz^{n-1}$ , & ponendo  
 $z = T = 1$ ,  $GG : FF = b + c : mb + nc$ ,  
ut in exemplis tertijs NEWTONUS invenit.

Sit nunc data ratio  $G$  ad  $F$ , nempe  $m$  ad  
 $n$ , & vis centripeta sit ut dignitas aliqua  
non data altitudinis  $z$ , illius dignitatis in-  
dex dicatur  $p$ , sitque adeò vis centripeta

ut  $z^p$ , & erit  $\frac{y}{z^3} = z^p$ , ac  $y = z^{p+3}$ ,  $dy =$

$Q dz = p + 3 \times z^{p+2} dz$ ,  $Q = p + 3 \times$   
 $z^{p+2}$ . Hinc  $G^2 : F^2 = m^2 : n^2 = z^{p+3} : p + 3$   
 $\times Tz^{p+2}$ , hoc est, ponendo  $z = T = 1$ ,

$mm : nn = 1 : p + 3$ , atque ità  $\frac{nn}{mm} = p + 3$

&  $\frac{nn}{mm} - 3 = p$ , ut in cor. 1. repertum est.

SECTIO X.

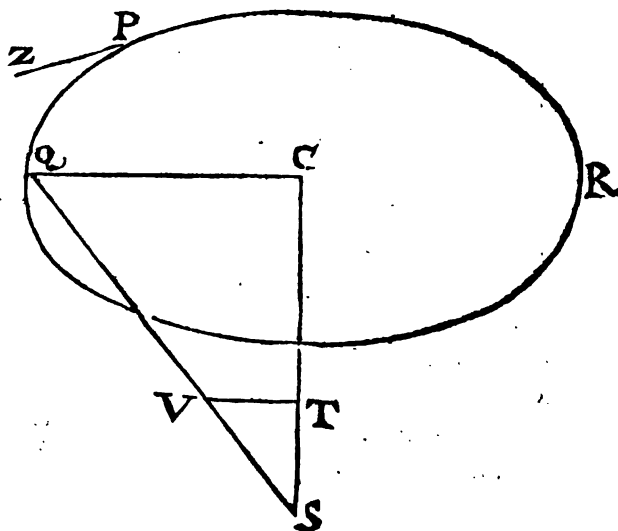
*De motu corporum in superficiebus datis, deque  
funipendulorum motu reciproco.*

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA XXXII.

*Positâ cujuscunque generis vi centripetâ, datoque tum virium centro tum  
plano quocunque in quo corpus revolvitur, & concessis figurarum cur-  
vilinearum quadraturis: requiritur motus corporis de loco dato, da-  
tâ cum velocitate, secundum rectam in plano illo datam egressi.*

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XLVI.  
PROBL.  
XXXII.

Sit  $S$  centrum viri-  
um,  $SC$  distantia mini-  
ma centri hujus à pla-  
no dato,  $P$  corpus de  
loco  $P$  secundum re-  
ctam  $PZ$  egrediens,  $Q$   
corpus idem in traje-  
ctoriâ suâ revolvens, &  
 $PQR$  trajectory illa,  
in plano dato descrip-  
ta, quam invenire oportet.  
Jungantur  $CQ$ ,  
 $QS$ , & si in  $QS$  ca-  
piatur  $SV$  propor-



tionalis vi centripetæ quâ corpus trahitur versus centrum  $S$ ;  
& agatur  $VT$  quæ sit parallela  $CQ$ , & occurrat  $SC$  in  $T$ : Vis  
 $SV$  resolvetur (per legem corol. 2.) in vires  $ST$ ,  $TV$ ; quarum  
 $ST$  trahendo corpus secundum lineam plano perpendicularem,  
nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera  $TV$ ,  
agendo secundum positionem plani, trahit corpus directè ver-  
sus punctum  $C$  in plano datum, ideoque efficit, ut corpus illud  
in hoc plano perinde moveatur, ac si vis  $ST$  tolleretur, & cor-  
pus vi solâ  $TV$  revolveretur circa (<sup>k</sup>) centrum  $C$  in spatio li-  
bero. Datâ autem vi centripetâ  $TV$  quâ corpus  $Q$  in spatio

(k) \* 455. Circâ centrum  $C$  in spa-  
tio libero. Vis centripeta  $SV$ , ad  $S$  ten-  
Tom. I.

dens in loco quovis  $Q$ , dicatur  $Q$ , & erit  
ob triangula  $SVT$ ,  $SQC$  similia.  $SQ$ :  
Z z Q C

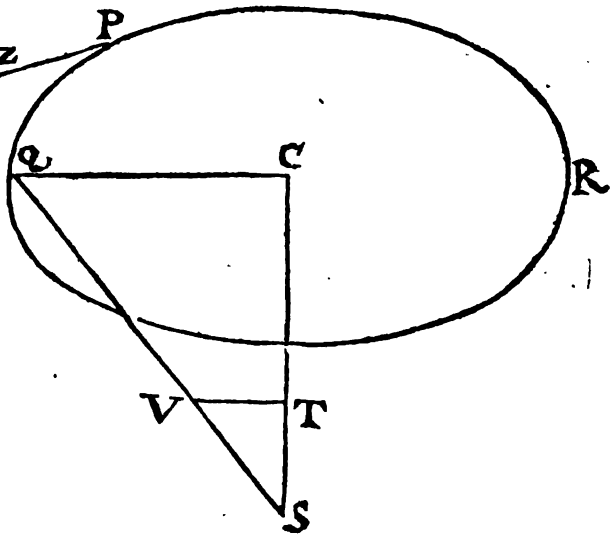
DE MO-  
TU COR-  
PORUM  
LIBER  
PRIMUS.

PROP.  
XLVII.

**PROPOSITIO XLVII. THEOREMA XV:**

THEOR  
XV.

Nam, stantibus quæ in superiore propositione, vis  $SV$ , quâ corpus  $Q$  in plano quovis  $PQR$  revolvens trahitur versus centrum  $S$ , est ut distantia  $SQ$ ; atque ideo ob proportionales  $SV$  &  $SQ$ ,  $TV$  &  $CQ$ , vis  $TV$ , quâ corpus trahitur versus punctum  $C$  in orbis plano datum, est ut distantia  $CQ$ . Vires



igitur, quibus corpora in plano  $PQR$  versantia trahuntur ver-

$QC = SV$  seu  $Q : VT = \frac{Q \times QC}{SQ}$ . Sed  
 ob angulum  $QCS$  rectum  $SQ^2 = QC^2 + SC^2$ , ergo  $VT$ , seu vis ad  $C$  ten-  
 dens in loco  $Q$ , five  $\frac{Q \times Q \times C}{SQ}$  erit

æqualis  $\frac{Q \times Q C}{\sqrt{Q C^2 + S C^2}}$ . Cum igitur data sit S C distantia minima centri S à plano Q P C positione dato, si loco S Q in quantitate Q, scribatur  $\sqrt{Q C^2 + S C^2}$ , obtinebitur valor vis ad C tendentis in lo-

co Q ex solâ distantia Q C & quantitatibus datis compositus. Exempli causâ, si vis S V, ad S tendens in loco Q fit ut distantia S Q, erit V T, seu vis ad C tendens in eodem loco Q, ut  $\frac{S Q \times Q C}{S Q}$

hoc est, ut Q C. Si vis S V fuerit ut  $\frac{1}{S Q^2}$ , erit V T, ut  $\frac{Q C}{S Q}$ , hoc est, ut Q C

$QC^2 + SC^2 \times \sqrt{QC^2 + SC^2}$ , & ita  
de cæteris suppositionibus.

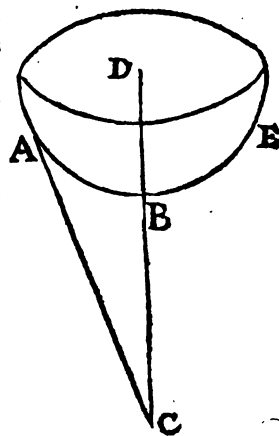
sus punctum  $C$ , sunt <sup>(1)</sup> pro ratione distantiarum æquales viribus DE Mo-  
 quibus corpora undiquaque trahuntur versus centrum  $S$ ; & prop- TU COR-  
 terea corpora movebuntur iisdem temporibus, in iisdem figu- PORUM.  
 ris; in plano quovis  $PQR$  circa punctum  $C$ , atque in spatiis LIBER  
 liberis circa centrum  $S$ ; ideoque ( *per corol. 2. prop. x. & corol. PRIMUS.* P R O P.  
 2. prop. xxxviii ) temporibus semper æqualibus, vel describent XLVII.  
 ellipses in plano illo circa centrum  $C$ , vel periodos movendi ul- THEOR.  
 trò citròque in lineis rectis per centrum  $C$  in plano illo ductis, x v.  
 complebunt. Q. E. D.

*Scholium.*

His affines sunt ascensus ac descensus corporum in superficie-  
 bus curvis. (m) Concipe lineas curvas in plano describi, dein  
 circum axes quosvis datos per centrum virium transeuntes revol-  
 vi, & eâ revolutione superficies curvas describere; tum corpo-  
 ra ita moveri ut eorum centra in his superficiibus perpetuo re-  
 periantur. Si corpora illa obliquè ascendendo & descendendo  
 currant ultrò citròque; peragentur eorum motus in planis per  
 axem transeuntibus, atque ideo in lineis curvis, quarum revo-  
 lu-

(d) \* *Sunt pro ratione distantiarum &c.*  
 Hoc est vires absolute ad  $S$  &  $C$  tendentes  
 sunt æquales, ita ut si alicubi fuerit  $PC = QS$ ,  
 vis in loco  $P$  ad  $C$  tendens æqualis erit  
 vi in loco  $Q$  ad  $S$  tendenti. Nam vis  
 quâ corpus in loco  $Q$  ad  $C$  trahitur,  
 est ad vim quâ versus  $S$  urgetur, ut  $QC$   
 ad  $QS$ , & vis in loco  $Q$  ad  $C$  tendens est  
 etiam ad vim in loco  $P$  ad idem centrum  
 $C$  urgentem ut  $QC$  ac  $PC$  seu  $QS$ ;  
 quare vis in loco  $Q$  ad  $S$  tendens æqua-  
 lis est vi ad  $C$  tendenti in loco  $P$ ; Cor-  
 pora verò quæ moventur viribus centripe-  
 tis quæ sunt ut distantie, temporibus sem-  
 per æqualibus ellipses quasvis, utut inæ-  
 quales, describent circa sua centra ( *per*  
*Prop. X* ). Si autem ellipseos  $PQR$  quam  
 corpus in plano describit, latitudo in in-  
 finitum minuat, describet corpus rectam  
 aliquam  $QCR$ , motu accelerato ad cen-  
 trum  $C$  accedens, & motu retardato ab  
 ipso recedens usque ad  $R$ , deindè rursus  
 ex loco  $R$ , ad centrum  $C$  recidens, &  
 ità circa centrum  $C$ , ultrò citròque oscil-  
 labitur.

(m) \* *Concipe li-*  
*neam curvam AB in*  
*plano ACED de-*  
*scriptam circa axem*  
*datum DBC per*  
*centrum virium C*  
*transeuntem revolvi*  
*& eâ revolutione*  
*superficiem curvam*  
*AEB describi, tum*  
*corpus aliquod A ità*  
*moveri, ut illius*  
*centrum in hac su-*  
*perficie perpetuò re-*  
*periat. Si corpus*  
*illud obliquè def-*  
*cendendo & ascen-*  
*dendo per ABE, EBA*  
*currat ultrò citrò-*  
*que peragetur illius*  
*motus in plano ACED*  
*per axem CD transeunte,*  
*atque aded in*  
*lineâ curvâ ABE, cum*  
*( ex hyp. ) nulla*  
*adfit vis quæ corpus à*  
*plano illo cogat de-*  
*flectere; si perfcies*  
*AEB perfectè terfa*  
*ac polita supponitur.*





DE MOTU CORP. Deolutione curvæ illæ superficies genitæ sunt. Istis igitur in casibus sufficit motum in his lineis curvis considerare.

LIBER

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XVI.

PRIMUS.  
PROP.  
XLVIII.  
THEOR.  
XVI.

*Si rota globo extrinsecus ad angulos <sup>(n)</sup> rectos insistat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, ( quodque cycloidem vel epicycloidem nominare licet ) erit ad duplicatum sinum versus arcus dimidii qui globum ex eo tempore inter eundem tetigit, ut summa diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.*

PROPOSITIO XLIX. THEOREMA XVII.

*Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinsecus insistat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum sinum versus arcus dimidii qui globum toto hoc tempore inter eundem tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.*

Sit  $ABL$  globus,  $C$  centrum ejus,  $BPV$  rota ei insistent,  $E$  centrum rotæ,  $B$  punctum contactus, &  $P$  punctum datum in perimetro rotæ. Concipe hanc rotam pergere in circulo maximo  $ABL$  ab  $A$  per  $B$  versus  $L$ , & inter eundem ita revolvitur ut arcus  $AB$ ,  $PB$  sibi invicem semper æquantur, atque punctum illud  $P$  in perimetro rotæ datum interea describere viam curvilineam  $AP$ . Sit autem  $AP$  via tota curvilinea descripta ex quo rota globum tetigit in  $A$ , & erit viæ hujus longitudo  $AP$  ad duplum sinum versus arcus  $\frac{1}{2}PB$ , ut  $2CE$  (°) ad  $CB$ . Nam recta  $CE$  (si opus est producta) occurrat rotæ in  $V$ , junganturque  $CP$ ,  $BP$ ,  $EP$ ,  $VP$ , & in  $CP$  productam demittatur normalis  $VF$ . Tangant  $PH$ ,  $VH$  circulum in  $P$  &  $V$  concurrentes in  $H$ , secetque  $PH$ , ipsam  $VF$  in  $G$ , & ad  $VP$  demittantur normales  $GI$ ,  $HK$ . Centro item  $C$  & intervallo quovis describatur circulus  $nom$  secans rectam  $CP$  in  $n$ , rotæ peri-

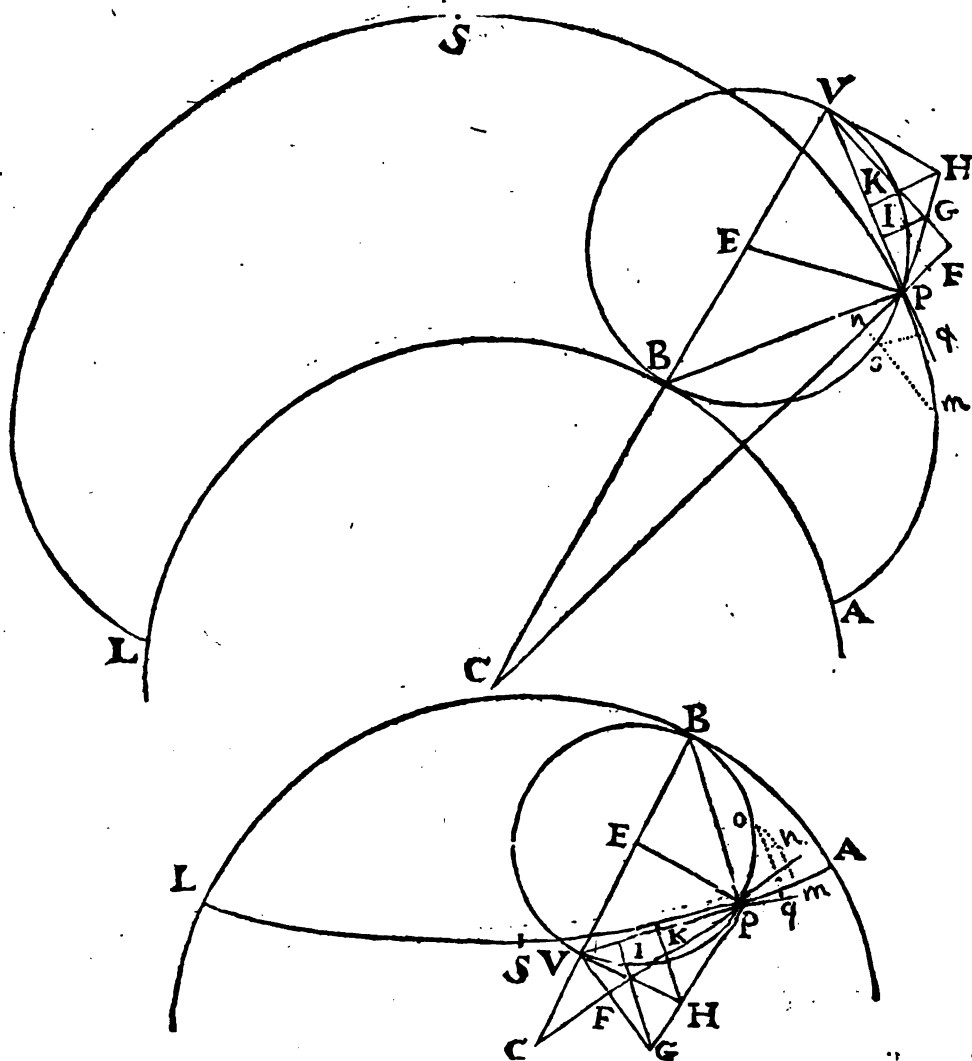
(n) \* Ad angulos rectos, id est, ita ut planum rotæ productum per centrum globi transeat, illudque proinde in duo hæmisphæria dividat ac circulum maximum in ejus superficie signet.

(o) \* Ut  $2CE$  ad  $CB$ . Hoc est, ob  $2CE = 2CB + 2BE$ , vel  $2CE = 2CB - 2BE$ , ut summa vel differentia diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 365

metrum  $BP$  in  $o$ , & viam curvilineam  $AP$  in  $m$ ; centroque  $V$  & De Mo-  
intervallo  $Vo$  describatur circulus secans  $VP$  productam in  $q$ . TU COR-  
PORUM.

LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XLIX.  
THEOR.  
XVII.



Quoniam rota eundo semper revolvitur circa punctum con-  
tactus  $B$ , (p) manifestum est quod recta  $BP$  perpendicularis est ad

(p) \* Manifestum est quod recta  $BP$  &c.  
Nam evidens est in circuli  $BPV$  revolutio-  
ne, centro  $B$  radio  $BP$  singulis tempusculis  
describi arcum circuli seu incrementum nas-  
cens curvæ  $AP$ , ad quod proinde radius  $BP$

perpendicularis est, sed ob angulum  $VPB$   
in semicirculo rectum, linea  $VP$  in eum ra-  
dium  $BP$  est perpendicularis, ergo linea  
 $VP$  est Tangens ejus arcus nascentis seu in-  
crementi curvæ  $AP$ , ideoque ipsius curvæ  
 $AP$ .



tis  $Pnomq$  & figurâ  $PFGVI$ , ratio ultima lineolarum evanescentium  $Pm$ ,  $Pn$ ,  $Po$ ,  $Pq$ , id (r) est, ratio mutationum momentaneorum curvæ  $AP$ , rectæ  $CP$ , arcus circularis  $BP$ , ac rectæ  $VP$ , eadem erit quæ linearum  $PV$ ,  $PF$ ,  $PG$ ,  $PI$  respectivè. Cum autem  $VF$  ad  $CF$  &  $VH$  ad  $CV$  perpendiculares sint, angulique (i)  $HVG$ ,  $VCF$  propterea æquales; & (i) angulus  $VHG$  (ob angulos quadrilateri  $HVEP$  ad  $V$  &  $P$  rectos) angulo  $CEP$  æqualis est, similia erunt triangula  $VHG$ ,  $CEP$ ; & inde fiet ut  $EP$  ad  $CE$  ita  $HG$  ad  $HV$  (u) seu  $HP$  & ita (x)  $KI$  ad  $KP$ , & (y) compositè vel divisim ut  $CB$  ad  $CE$  ita  $PI$  ad  $PK$ , & duplicatis consequentibus ut  $CB$  ad 2  $CE$  ita (z)  $PI$  ad  $PV$ , atque ita  $Pq$  ad  $Pm$ . Est (a) igitur decrementum lineæ  $VP$ , id est, incrementum lineæ  $BV - VP$  ad incrementum lineæ curvæ  $AP$  in datâ ratione  $CB$  ad 2  $CE$ , & propterea (per coroll. lem. 1 v.) longitudines  $BV - VP$  &  $AP$ , incrementis (b) illis

(r) \* Id est ratio mutationum momentaneorum, seu incrementorum vel decrementorum nascentium curvæ  $AP$ , quæ ex  $A$  in fit  $AP$ , rectæ  $CP$ , quæ ex  $C$  in fit  $CP$  arcus circularis  $BP$ , qui ex  $B$  in fit  $BP$ , ac rectæ  $VP$ , quæ ex  $V$  in fit  $VP$ .

(i) \* Angulique  $HVG$ ,  $VCF$ , propterea æquales. Ob angulum  $VFC$  rectum, summa angulorum  $FCV$ ,  $CVF$  æqualis est angulo recto  $CVH$ , quare detracto communi angulo  $CVF$ , fit angulus  $FCV = FVH$  five  $HVG$ .

(t) \* Est angulus  $VHG$  &c. Tangentes  $HV$ ,  $HP$  cum radiis  $EV$ ,  $EP$  angulos rectos constituunt, adeoque quadrilateri  $HVEP$ , anguli duo reliqui  $VHP$  five  $VHG$  &  $VEP$ , sunt simul æquales duobus rectis, quare cum sint quoque anguli  $VEP$ ,  $CEP$  simul duobus rectis æquales, liquet angulum  $CEP$ , æqualem esse angulo  $VHG$ , & in secunda figura cum anguli quadrilateri  $VHPE$  in  $V$  &  $P$  sint recti, reliqui anguli  $VHP$ ,  $VEP$  æquales sunt duobus rectis, sed etiam  $VHP$  &  $VHG$  sunt æquales duobus rectis, ergo detracto communi  $VHP$ ,  $VEP$  five  $CEP$  est æqualis  $VHG$ .

(u) \* Ad  $HV$ , seu  $HP$ . Nam circuli tangentes  $HV$ ,  $HP$  sunt æquales.

(x) \* Est ita  $KI$  ad  $KP$ . Etenim ob

parallelas  $HK$ ,  $GI$ , est  $HG:HP=KI:KP$ .

(y) \* Est compositè vel divisim. Cum sit  $EP$ , seu  $BE:CE=KI:KP$ , si rota globo intrinsecus insistat, erit compositè  $BE+CE$ , seu  $CP:CE=KI+KP$ ; seu  $PI:PK$ . Si verò rota globo extrinsecus insistat, erit divisim  $CE=BE$ , seu  $CB:CE=KP=KI$ , seu  $PI:PK$ .

(z) \* Ita  $PI$  ad  $PV$ . Nam in triangulo  $PHV$  isoscele, est  $PK=KV$ , adeoque 2  $PK=PV$ .

(a) \* Est igitur decrementum lineæ  $VP$  &c. Dum arcus  $A$  in crescit fitque  $AP$ , recta  $Vq$  decrescit & fit  $VP$ ; quare est  $P$  in incrementum curvæ  $A$  in seu  $AP$ . &  $Pq$  decrementum rectæ  $VP$ . Cum autem sit  $BV$  circuli diameter constans, quantum decrescit  $VP$ , tantum crescit differentia  $BV - VP$ , unde decrementum lineæ  $VP$ , æquale est incremento lineæ  $BV - VP$ . Est igitur incrementum lineæ  $BV - VP$ , ad incrementum lineæ curvæ  $AP$  &c.

(b) \* Incrementis illis genitæ &c. Cum punctum  $P$  est in  $A$ , punctum  $B$  est etiam in  $A$ , fitque  $VP=VB$ , adeoque  $BV - VP=0$ . Simul ergo crescere incipiunt lineæ  $BV - VP$  &  $AP$ ; & quoniam in datâ ratione crescunt, erit semper  $BV - VP$  ad  $AP$  in datâ illâ ratione  $CB$  ad  $CE$ .

DE Mo. genitæ, sunt in eâdem ratione. Sed, (c) existente  $BV$  radio, TU COR- est  $VP$  cosinus anguli  $BVP$  seu  $\frac{1}{2} BEP$ , ideoque  $BV - VP$  PORUM. sinus versus est ejusdem anguli; & propterea in hâc rotâ, cujus LIBER radius est  $\frac{1}{2} BV$ , erit  $BV - VP$  duplus sinus versus arcus  $\frac{1}{2} BP$ . PRIMUS. Ergo  $AP$  est ad duplum sinum versus arcus  $\frac{1}{2} BP$  ut  $2 CE$  PROP. ad  $CB$ . Q. E. D.

THEOR. Lineam autem  $AP$  in propositione priorè cycloidem extra X L I X. globum, alteram in posteriore cycloidem intra globum distinctionis gratiâ nominabimus.

Corol. 1. Hinc si (d) describatur cyclois integra  $ASL$  & bifecetur ea in  $S$ , erit longitudo partis  $PS$  ad longitudinem  $VP$  (quæ duplus est sinus anguli  $VBP$ , existente  $EB$  radio) ut  $2 CE$  ad  $CB$ , atque ideo in ratione datâ.

Corol. 2. Et (e) longitudo semiperimetri cycloidis  $AS$  æquabitur lineæ rectæ, quæ est ad rotæ diametrum  $BV$  ut  $2 CE$  ad  $CB$ .

(c) 456. Sed existente  $BV$  radio &c. Ob angulum  $BVP$  rectum, est  $BV$  ad  $VP$  ut sinus totus ad sinum anguli  $VBP$  qui complementum est anguli  $BVP$  ad rectum. Quare existente  $BV$  radio, est  $VP$  cosinus anguli  $BVP$  æqualis dimidio angulo ad centrum  $BEP$ . Est autem cujusvis anguli sinus versus æqualis differentie inter radium & cosinum ejusdem anguli, ergò existente  $BV$  radio, erit  $BV - VP$  sinus versus anguli  $\frac{1}{2} BEP$ ; & quoniam in diversis circulis æqualium angulorum sinus omnes sunt ut circulorum radii, in hâc rotâ cujus radius est  $\frac{1}{2} BV$ , erit  $BV - VP$ , duplus sinus versus arcus  $\frac{1}{2} BP$ .

(d) 457. Hinc si describatur &c. Ubi punctum  $P$  pervenit ad  $S$ , arcus  $BP$  semicirculo, arcus  $\frac{1}{2} BP$  quadranti, & sinus versus arcus  $\frac{1}{2} BP$  radio, æquales sunt. Quare in hoc casu curva  $AS$ , est ad diametrum  $BV$ , ut  $2 CE$ , ad  $CB$ ; cùmque in loco quovis  $P$ , sit etiam curva  $AP$ , ad duplum sinum versus  $\frac{1}{2} BP$ , seu ad  $BV - VP$  (456) ut  $2 CE$  ad  $CB$ , erit  $AS : BV :: AP : BV - VP$ , & hinc  $AS = AP$ , seu  $PS : BV - BV + VP$ , seu  $VP = AS : BV = 2 CE : CB$ .

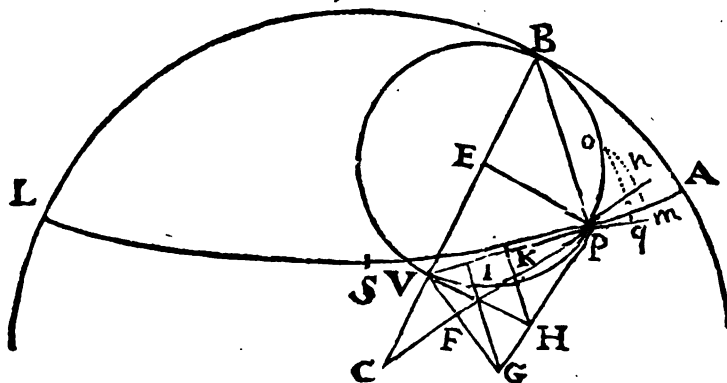
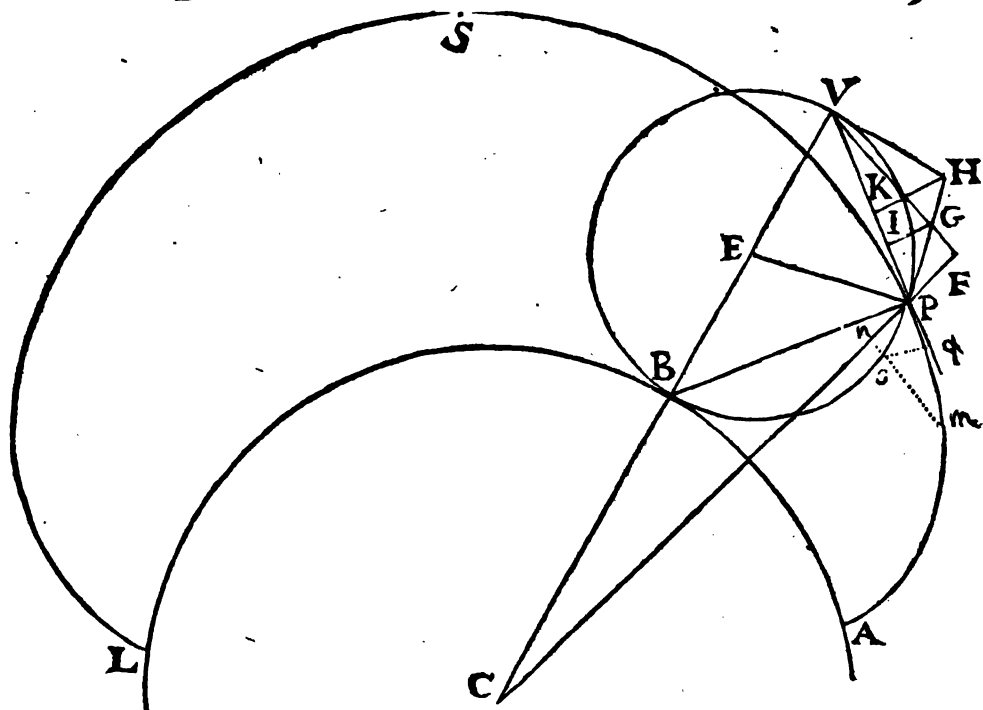
(e) \* Et longitudo semiperimetri. Patet per notam superiorem.

458. Coroll. 3. Recta  $CS$  cycloidi perpendicularis est, & recta  $CA$  eam tangit in  $A$ . Est enim  $BP$  ad cycloidem perpendicularis, &  $VP$  tangens ejus in  $P$ , at ubi punctum  $P$  pervenit in  $S$ ,  $BP$  fit  $BS$ , seu  $BV$ , & ubi punctum  $B$  est in  $A$ ,  $VP$  coincidit cum  $VB$ .

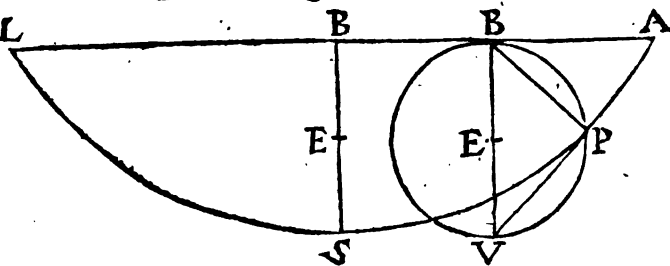
459. Coroll. 4. Si per punctum quodvis  $P$  agatur  $PV$  cycloidem tangens in  $P$ , & ad eam erigatur perpendicularum  $PB$  globo occurrens in  $B$ , jungaturque  $CB$  tangentem secans in  $V$ , erit  $BV$  rotæ diameter.

460. Coroll. 5. Ex genesis cycloidis liquet arcum globi  $AB$ , æqualem esse arcui rotæ  $BP$ .

461. Coroll. 6. Si rotæ diameter  $VB$  æqualis constitatur semidiametro globi  $CB$ , cyclois intrâ globum evadet linea recta per centrum globi  $C$  transiens. Nam in hoc casu  $CS = 0$ , &  $2 CE = CB$ ; unde punctum cycloidis medium  $S$ , cum centro coincidit, & quia (457)  $AS : BV = 2 CE : CB$ , erit  $AS = BV = CB$  atque adeò est  $AS$  linea recta per centrum  $C$  transiens, nam si curva esset, major foret semidiametro  $CB$ .



462. Coroll. 7. Si globi diameter  
augeatur in infinitum, mutabitur  
ejus superficies sphaerica in pla-  
num, fietque  $ABL$  linea recta, &  
 $BE$  finita manente seu nulla res-  
pectu infinitae lineae  $CB$ , erit  $CE$   
 $= CB$ , adeoque cyclois tam intra  
quam extra globum abibit in cy-  
cloidem vulgarem, quae describi-  
tur revolutione rotae in lineam rectam  
progredientis, cumque sit semper  
(457)  $AP:BV-VP=2CE:CB=2:1$ ;  
erit  $AP=2 \times (BV-VP)$ , sed  $BV-VP$ ,  
est duplus sinus versus arcus  $\frac{1}{2} BP$ , exis-  
tente  $BE$  radio (456). Ergo in cycloi-  
de vulgari  $AP$  aequatur quadruplicato fi-  
Tom. I.



nui verso dimidii arcus  $BP$ , inter pla-  
num  $ABL$  & punctum describens  $P$  in-  
tercepti; Hinc etiam erit  $AS=4BE=$   
 $2BS=2BV$ ; Est enim  $BE$  sinus versus  
quadrantis.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

LIBER

PRIMUS.

PROP. L.

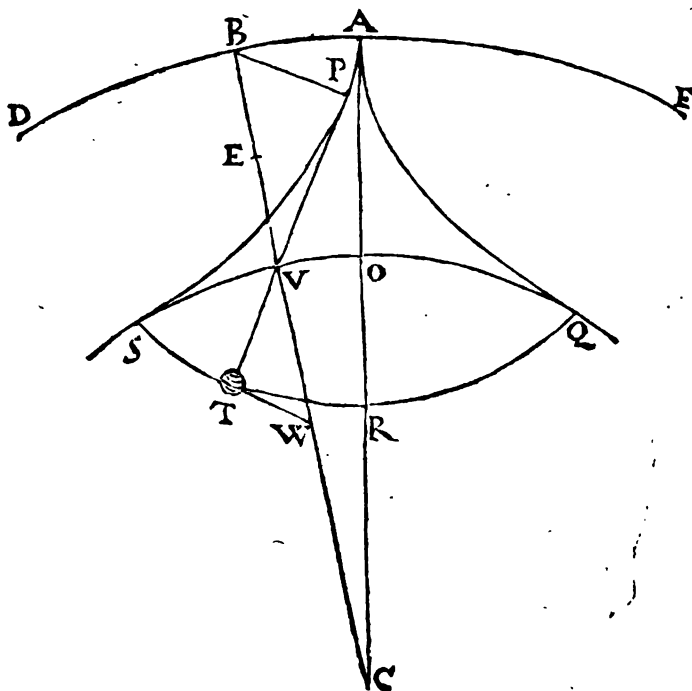
PROBL.

XXXIII.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XXXIII.

*Facere ut corpus pendulum oscilletur in cycloide datâ.*

Intra globum  $QVS$ , centro  $C$  descriptum, detur cyclois  $QRS$  bisecta in  $R$  & punctis suis extremis  $Q$  &  $S$  superficiei globi hinc inde occurrens. Agatur  $CR$  bifecans arcum  $QS$



in  $O$ , & producat eam ad  $A$ , ut sit  $CA$  ad  $CO$  ut  $CO$  ad  $CR$ . Centro  $C$  intervallo  $CA$  describatur globus exterior  $DAF$ , & intra hunc globum à rotâ, cujus diameter sit  $AO$ , describantur duæ semicycloides  $AQ$ ,  $AS$ , quæ <sup>(f)</sup> globum in-

(f) \* *Qua globum interiorem tangant in  $Q$  &  $S$ , & globo exteriori occurrant in  $A$ . Probandum semicycloides descriptas per motum rotæ (cujus diameter est  $AO$ ) ex  $A$  proficiscentis terminari ad superficiem globi interioris in punctis extre-*

*mis  $Q$  &  $S$  cycloidis  $QRS$  datæ. Producantur itaque lineæ  $CQ$ ,  $CS$  ad  $F$  &  $D$ , eritque  $FQ = DS = AO$ , & super Diametros  $FQ$ ,  $DS$  intelligantur descriptæ rotæ quarum motu fiunt semicycloides, dicaturque  $P$  punctum rotæ semicy-*

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 371

teriolem tangant in  $Q$  &  $S$  & globo exteriori occurrant in  $A$ . De Mo-  
 $A$  puncto illo  $A$ , filo  $APT$  longitudinem  $AR$  æquante, pen-  
 deat corpus  $T$ , & ita intra semicycloides  $AQ$ ,  $AS$  oscilletur, ut  
 quoties pendulum digreditur à perpendicularo  $AR$ , filum parte sui  
 superiore  $AP$  applicetur ad semicycloidem illam  $APS$  versus  
 quam peragitur motus, & circum eam ceu obstaculum flectatur,  
 parteque reliquâ  $PT$  cui semicyclois nondum objicitur, proten-  
 datur in lineam rectam; & pondus  $T$  oscillabitur in cycloide da-  
 tâ  $QRS$ . *Q. E. F.*

Occurrat enim filum  $PT$  tum cycloidi  $QRS$  in  $T$ , tum cir-  
 culo  $QOS$  in  $V$ , agaturque  $CV$ ; & ad fili partem rectam  
 $PT$ , è punctis extremis  $P$  ac  $T$ , erigantur perpendiculara  $BP$ ,  
 $TW$ , occurrentia rectæ  $CV$  in  $B$  &  $W$ . Patet, (s) ex con-  
 structione & genesi similium figurarum  $AS$ ,  $SR$ , (h) perpendiculara  
 illa  $PB$ ,  $TW$  abscindere de  $CV$  longitudines  $VB$ ,  $VW$  ro-  
 tarum

cycloides describens; Liqueat arcus  $OQ$   
 &  $AF$ ,  $OS$  &  $AD$  esse proportionales  
 radiis  $CO$ ,  $CA$  live (per const.) radiis  
 $CR$ ,  $CO$  & divisim rotarum Diametris  
 $OR$ ,  $AO$ , ideoque (per nat. circuli) le-  
 micircumferentiis rotarum super has Dia-  
 metros descriptarum; Sed cum  $Q$  &  $S$  sint  
 puncta extrema cycloidis datæ  $QRS$  &  
 $CO$  arcum  $QS$  bisecet, erunt arcus  $OQ$   
 &  $OS$  æquales semicircumferentiæ rotæ  
 super Diametrum  $OR$  descriptæ (460)  
 ergo etiam arcus  $AF$  &  $AD$  æquales  
 erunt semicircumferentiæ rotæ super Dia-  
 metrum  $AO$  descriptæ, sed arcus  $FP$  aut  $DP$   
 est semper æqualis arcui  $AF$  aut  $AD$   
 (460); erunt ergo arcus  $FP$  &  $DP$  se-  
 micirculi, &  $P$  cadet in extremitatibus  
 $Q$  &  $S$ . Diametrorum  $FQ$ ,  $DS$ , sed  
 ubi  $P$  semicircumferentiam rotæ percur-  
 rit semicyclois est descripta, ergo semi-  
 cycloides descriptæ per motum rotæ ex  $A$   
 proficiscentis terminantur in  $Q$  &  $S$ . *Q. E. D.*

(g) 463. Patet ex constructione & ge-  
 nesi similium figurarum  $AS$ ,  $SR$ ; Figu-  
 ræ illæ dicuntur similes quia  $AO$  diameter  
 rotæ quæ describuntur semicycloides  $AS$ ,  
 $AQ$  est ad globi  $DAF$  radium  $AC$   
 ut diameter  $OR$  rotæ quæ describitur cy-

clois  $QRS$  ad globi  $QOS$  radium  $OC$ ,  
 (per const.) unde manifestum quod cy-  
 cloides  $AS$ ,  $AQ$ ,  $QR$ , quæ eodem mo-  
 do describuntur ac determinantur sunt in-  
 ter se similes.

(h) \* Perpendiculara illa &c. 10. Pro-  
 bandum quod perpendicularum  $PB$  abscindat  
 de  $CV$  longitudinem  $VB$  rotæ Diametro  $OA$   
 æqualem. Fingatur rotam ita positam ut  
 ejus punctum Cycloidem describens sit in  
 $P$ , liquet, ex constructione, eam hujus ro-  
 tæ Diametrum quæ in hoc casu globo est  
 perpendicularis, & quæ, si producatur, tran-  
 sire debet per centrum  $C$ , utrinque termi-  
 nari debere in superficie globorum; Jam  
 verò (per Demonstr. Prop. XLVIII. XLIX.)  
 Tangens Cycloidis transit semper per unam  
 extremitatem ejus Diametri rotæ quæ glo-  
 bo est perpendicularis & perpendicularum in  
 Tangentem è puncto contactus erectum  
 transit per alteram ejusdem Diametri ex-  
 tremitatem, ergo, cum sit (ex const.) fi-  
 lum  $PT$  Tangens Cycloidis in puncto  $P$ ,  
 &  $PB$  perpendicularum in illud, intersectio-  
 nes  $V$  &  $B$  linearum  $PT$  &  $PB$  cum glo-  
 bis  $QOS$  &  $DAF$  erunt extremitates  
 ejus Diametri rotæ quæ si producatur  
 transit per centrum  $C$ , ergo ducta  $CV$ ,  
 A a a 2 per-



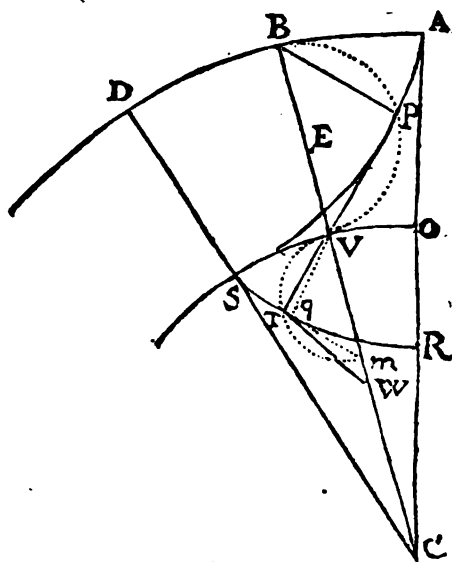
DE MOTU CORP. PORUM. LIBER PRIMUS. PROP. L. PROBL. XXXIII.

tarum diametris  $OA$ ,  $OR$  æquales. Est (i) igitur  $TP$  ad  $VP$  (duplum finum anguli  $VBP$  existente  $\frac{1}{2} B V$  radio) ut

perpendicularum  $PB$  abscindet de  $CV$  longitudinem  $VB$  rotæ Diametro  $OA$  æqualem. Q. E. 1<sup>o</sup>. D.

2<sup>o</sup>. Perpendicularum  $TW$  abscindit de  $CV$  longitudinem  $VW$  rotæ Diametro  $OR$  æqualem. Fingatur rota Cycloidem  $SRQ$  describens ita posita, ut ejus Diameter globo  $SOQ$  insistens sit in lineâ  $CV$  globumque tangat in  $V$ , dicatur in altera extremitas ejus Diametri, & dicatur  $q$  punctum illius rotæ Cycloidem describens: Arcus  $VS$  erit æqualis arcui  $Vq$  (460) utque totus arcus  $SO$  est æqualis arcui  $Vm$ , erit  $VO = qm$ , &  $qm$  est mensura dupli anguli  $CVq$ ; Sit verò rota describens cycloidem  $APS$  posita sicut in priore casu, hoc est, ejus Diameter globo  $DAF$  insistens sit in productione lineæ  $CV$ , erit arcus  $BA$  æqualis arcui  $BP$  (460) & est  $BP$  mensura dupli anguli  $BVP$ ; Est autem arcus  $VO$  five  $qm$  ad  $BA$  five  $BP$ , ut  $CO$  ad  $CA$  ideoque ut Diametri rotarum  $OR$  ad  $AO$  (ex const.), arcus verò diversorum circulorum qui sunt inter se ut suorum circulorum Diametri, sunt similes ideoque ejusdem numeri graduum; ergo angulus  $CVq$  est æqualis angulo  $BVP$ , quoniam arcus qui sunt mensura eorum dupli, sunt ejusdem numeri graduum, ideoque illi anguli  $CVq$ ,  $BVP$  sunt per verticem oppositi &  $PV$  est linea recta; itaque, filum  $PV$  productum ad  $T$  transit tam per extremitatem  $V$  Diametri rotæ globo insistentis quàm per ejus rotæ punctum  $q$  Cycloidem describens; Ergo (per Dem. Prop. XLVIII. XLIX.) filum  $PT$  est perpendiculare in Tangentem Cycloidis in puncto illo  $q$  five  $T$ , ideoque ex constructione linea  $TW$  erit ea ipsa Tangens, & (per Dem. Prop. XLVIII. XLIX.) transibit per extremitatem in Diametri rotæ quæ globo insistit, hoc est Diametri jacentis in lineâ  $CV$ , ergo  $TW$  abscindet de  $CV$  longitudinem rotæ Diametro  $OR$  æqualem. Q. E. 2<sup>o</sup>. D.

\* Idem aliter. Ex puncto  $V$  ducatur ad semicycloidem  $SR$  perpendicularis  $Vq$ , &  $qm$  tangens in  $q$  radio  $CV$  occurrens in  $m$ , erit (459)  $Vm = OR$ . Descriptis rotis  $BPV$ ,  $Vqm$ ,



erit angulus  $BVP$ , æqualis arcui  $BP$ , ad diametrum  $BV$ , applicato seu  $\frac{BP}{BV}$ , hoc

est, ob arcum  $BA = BP$  (460) &  $BV = AO$ , angulus  $BVP = \frac{BA}{AO}$ . Simili ratione,

cum sit arcus  $Vq$  æqualis arcui  $SV$ , & semirota  $Vqm$  æqualis arcui  $SO$ , erit arcus  $qm = VO$ , adeoque angulus  $qVm = \frac{VO}{OR}$ . Quare angulus  $BVP : qVm$

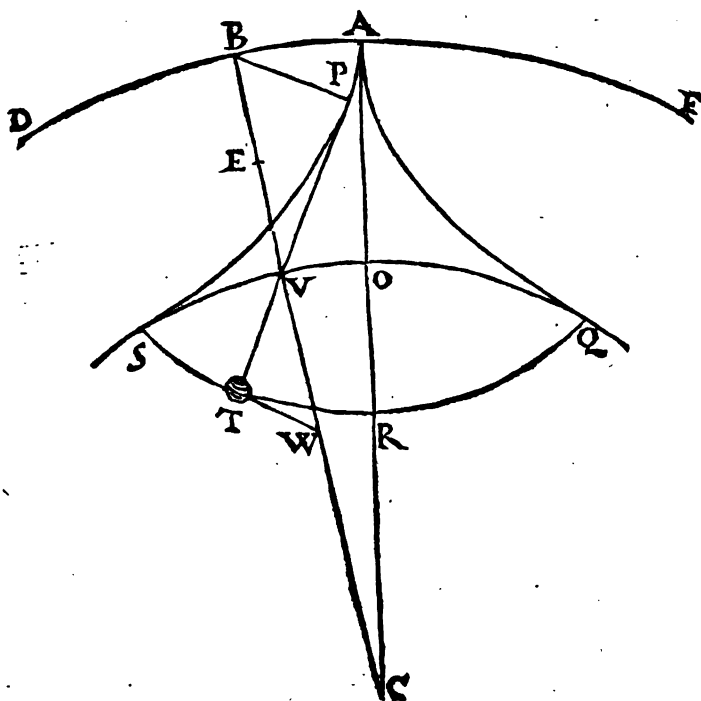
$= \frac{BA}{AO} : \frac{VO}{OR} = OR \times BA : AO \times VO$ ; sed

$BA : VO = CA : CO = AO : OR$  (per const.) adeoque  $OR \times BA = AO \times VO$ , Ergo angulus  $BVP = qVm$ . Cum igitur anguli  $BVP$ ,  $TW$  ad verticem oppositi sint etiam æquales, perpendicularis  $Vq$  coincidit cum  $VT$ , tangens  $qm$  cum  $TW$ , &  $Vm$  cum  $VW$ , undè tantum est  $Vm = OR = VW$ .

(i)\* Est igitur &c. Obtriangula  $VPB$ ,  $VTW$  similia  $TV : VP = VW : VB$ , & componendo  $TP : VP = BW : BV$ .

## 373

LIBER  
PRIMUS.  
PROP. I.  
PROBL.  
XXXII.



*Corol.* Filum  $AR$  æquatur semicycloidi  $AS$ , ideoque ad globi exterioris semidiametrum  $AC$  eandem habet rationem quam similis illi semicyclois  $SR$  habet ad globi interioris semidiametrum  $CO$ .



initio descriptæ ut accelerationes, hoc est, ut totæ sub initio describendæ, & propterea partes quæ manent describendæ & accelerationes subsequentes, his partibus proportionales, sunt etiam ut totæ; & sic deinceps. Sunt igitur accelerationes, atque ideo velocitates genitæ & partes his velocitatibus descriptæ partesque describendæ, semper ut totæ; & propterea partes describendæ datam servantes rationem ad invicem simul evanescent, id est, corpora duo oscillantia simul pervenient ad perpendiculariculum  $AR$ . Cumque vicissim ascensus perpendicularorum de loco infimo  $R$ , per eosdem arcus cycloidales motu retrogrado facti, retardentur in locis singulis à viribus iisdem à quibus descensus accelerabantur, patet velocitates ascensuum ac descensuum per eosdem arcus factorum æquales esse, atque ideo temporibus æqualibus fieri, & propterea, cum cycloidis partes duæ  $RS$  &  $RQ$  ad utrumque perpendiculari latius jacentes sint similes & æquales, pendula duo oscillationes suas tam totas quam dimidias iisdem temporibus semper peragent.

*Q. E. D.*

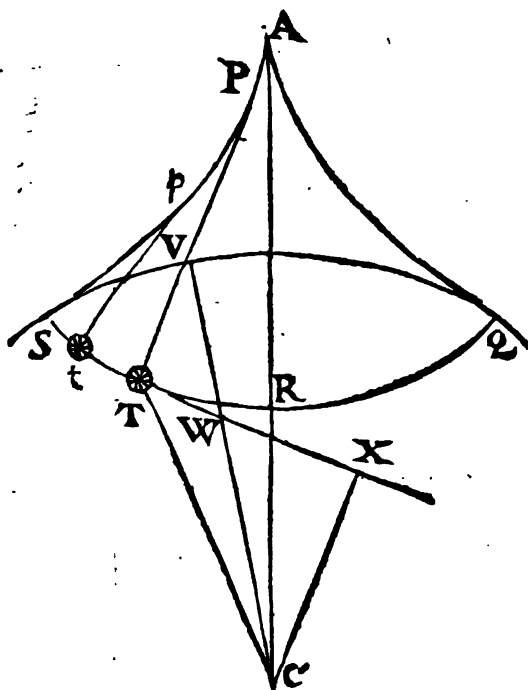
*Corol.* Vis  $(n)$  quæ corpus  $T$  in loco quovis  $T$  acceleratur vel retardatur in cycloide, est ad totum corporis ejusdem pondus in loco

cum  $tR$ ,  $TR$  quæ manent describendæ & accelerationes subsequentes his partibus proportionales sunt etiam ut toti arcus  $tR$ ,  $TR$ , & sic deinceps. Quoniam autem velocitates dato tempore genitæ sunt ut accelerationum summæ, quæ ob datam accelerationum rationem sunt in eadem ratione datæ arcuum  $tR$ ,  $TR$ , liquet accelerationes atque ideo velocitates genitas & partes his velocitatibus descriptas, partesque describendas semper esse ut sunt toti arcus  $tR$ ,  $TR$ , & propterea si pars arcus  $TR$  describenda evanescat, quod fit dum corpus pendulum  $T$  pervenit ad  $R$ , pars arcus  $tR$ , simul evanescet, ob datam harum partium rationem. Unde corpora duo oscillantia  $t$  &  $T$  ex punctis  $t$  &  $T$  simul demissa, simul pervenient in  $R$ .

$(n)$  \* *Vis quæ corpus  $T$  in loco quovis  $T$  acceleratur vel retardatur in cycloide, est ad vim quæ in loco altissimo  $S$ , vel  $Q$  acceleratur vel retardatur in cycloide, ut arcus  $TR$ , ad arcum  $SR$ , (ex demonstr. prop. 51. (sed vis quæ corpus in loco  $S$  vel  $Q$  acceleratur vel retardatur in cycloide, est vis tota quæ ad centrum  $C$ , perpendiculariter urgetur; radius enim  $CS$  cycloidem  $SR$  tangit in  $S$ , (458) adeoque directio vis in loco  $S$  in cycloide coincidit cum directione vis rectæ trahentis ad centrum  $C$ .)*

465. *Coroll. 1.* Si centro  $A$  radio  $AR$  circulus describatur, cycloidis  $SRQ$  arcus nascent in loco infimo  $R$  cum circuli illius arcu nascente coincidit. Quare si longitudo penduli  $AR$  magna sit, eodem prope modo in exiguis circuli arcubus

DE Mo- loco altissimo S vel Q, ut cycloidis arcus TR ad ejusdem arcum  
TU COR- SR vel QR.  
PORUM. P R Q-



cubus oscillabitur corpus quo in cycloide;  
& quod major est longitudo penduli mi-  
norque circuli arcus in quem excurrit, ed  
major erit motuum in circulo & in cycloide  
consonantia, atque hinc, non abludente  
experientia, oscillationes in exiguis circuli  
arcubus sunt ad sensum isochronæ.

466. Coroll. 2. Ex his deducitur quæ-  
nam sit æquatio ad hanc Cycloidem intrâ  
globum descriptam pertinens, sive, inveni-  
etur æquatio exprimens rationem distan-  
tiæ cujusvis puncti T à centro ad perpen-  
diculum in Tangentem ex eo puncto duc-  
tam demissum: Dicatur enim globi radius  
CV,  $a$ , Diameter rotæ VW,  $a-c$ , erit  
distantia CR sive CW,  $c$ ; Ducatur ex  
puncto quovis T linea TC ad centrum  
quæ dicatur  $x$ , ducatur Tangens TX ex  
eo puncto T & ex centro demittatur in  
eam Tangentem perpendiculum CX, fit  
 $TX = z$  &  $CX = p$ . [Erit ubique  $p p$   
 $\frac{a a c c - c c x x}{a a - c c}$ ; Nam ob similia Trian-

gula VTW, WCX est

$$CW(c):VW(a-c)=CX(p):TV$$

$$= \frac{p}{c} \times a - c \text{ \& }$$

$$CV(a):WV(a-c)=TX(z):TW$$

$$= \frac{z}{a} \times a - c; \text{ est itaque } TV^2 + TW^2$$

$$= \frac{p^2}{c^2} \times a - c^2 + \frac{z^2}{a^2} \times a - c^2. \text{ Sed}$$

$$TV^2 + TW^2 = VW^2 = a - c^2, \text{ ergo}$$

$$\frac{p^2}{c^2} \times a - c^2 + \frac{z^2}{a^2} \times a - c^2 = a - c^2$$

& dividendo utrumque membrum æquatio-

$$\text{nis per } a - c^2 \text{ erit } \frac{p^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} \left( \text{sive } \frac{a^2 c^2 + c^2 z^2}{a^2 c^2} \right)$$

$$= 1, \text{ \& multiplicato utroque membro æq.}$$

$$\text{per } a^2 c^2 \text{ est } a^2 p^2 + c^2 z^2 = a^2 c^2, \text{ sed}$$

$$\text{est } z^2 = x^2 - p^2 \text{ (per const.) Ergo}$$

$$a^2 p^2 + c^2 x^2 - c^2 p^2 = a^2 c^2 \text{ \& factâ transposi-}$$

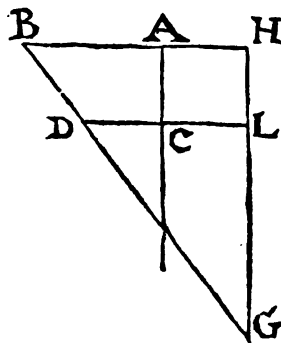
$$\text{tione } a^2 p^2 - c^2 p^2 = a^2 c^2 - c^2 x^2, \text{ ideoque } p^2$$

$$= \frac{a^2 c^2 - c^2 x^2}{a^2 - c^2}. \text{ Q. E. D.}$$

Simili ratiocinio invenietur æquatio ad

epicycloidem sive cycloidem extra glo-  
bum descriptam inversis solummodo termi-

nis & signis ut fit  $p p = \frac{c^2 x^2 - a^2 c^2}{c^2 - a^2}$ .



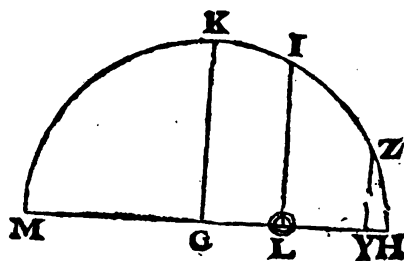
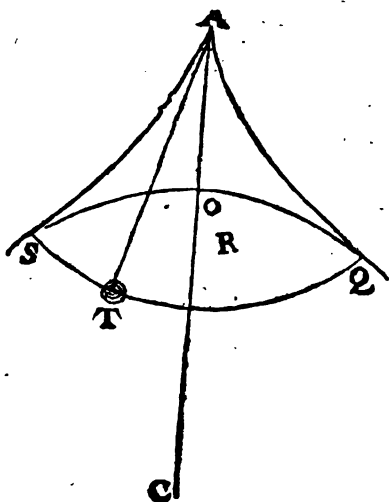
467. Lemma. Ad punctum G tendat  
vis centripeta distantia ab illo puncto pro-  
portionalis quam in locis H, L exhibeant  
lineæ HB, LD rectæ GH perpendicu-  
lares, sitque recta GDB locus punctorum  
B, D, capiatur HA ad HB ut vis cen-  
tripeta constans ad vim variabilem in lo-  
co

PROPOSITIO LII. PROBLEMA XXXIV.

*Definire & velocitates pendulorum in locis singulis, & tempora quibus tum oscillationes totæ, tum singulæ oscillationum partes peraguntur.*

Centro quovis  $G$ , intervallo  $GH$  cycloidis arcum  $RS$  æquan-

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LII.  
PROBL.  
XXXIV.



te, describe semicirculum  $HKM$  semidiametro  $GK$  bisectum: Et si vis centripeta, distantis locorum à centro proportionalis, tendat ad centrum  $G$ , sitque ea in perimetro  $HIK$  æqualis vi centripetæ in perimetro globi  $QOS$  ad ipsius centrum tendenti; & (°) eodem tempore quo pendulum  $T$  dimittitur è loco

dato  $H$ , & agatur  $AC$  rectæ  $HG$  parallela lineam  $LD$  secans in  $C$ , de loco  $H$  cadant corpora duo, quorum alterum vi constante  $HA$ , alterum vi variabili  $HB$  vel  $LD$  urgeatur, sintque illorum velocitates in eodem loco  $L$ ,  $V$ ,  $v$ , & erit  $V^2$  ad  $v^2$ , ut area  $HACL$  ad aream  $HBDL$ , (per prop. 39. & cor. 408.) id est  $V^2 : v^2 = HL \times HA : HL \times BH + DL$

2  
Tom. I.

niam in centro  $G$  evanescit  $DL$  erit in illo centro  $V^2 : v^2 = 2 HA : BH$ , &  $V : v = \sqrt{2 HA} : \sqrt{BH}$ . Quare datis in loco  $H$  viribus  $HA$ ,  $HB$ , & velocitate in loco quovis  $L$  vel  $G$  vi constante acquisita, datur velocitas vi variabili in eodem loco acquisita.

(°) \* Et eodem tempore. Id est, simul demittantur ex locis  $S$  &  $H$  corpora  $T$  &  $L$ .

B b b

Idco-

DE MO- loco supremo  $S$ , cadat corpus aliquod  $L$  ab  $H$  ad  $G$ : quoniam  
 TU COR- vires quibus corpora urgentur sunt æquales sub initio & spatiis  
 PORUM. describendis  $TR$ ,  $LG$  semper proportionales, atque ideo, si  
 LIBER æquantur  $TR$  &  $LG$ , æquales in locis  $T$  &  $L$ ; patet corpora  
 PRIMUS. illa describere spatia  $ST$ ,  $HL$  æqualia sub initio, (<sup>p</sup>) ideoque  
 PROP. subinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia spatia describere.  
 LII. PROBL. Quare (*per prop. xxxviii.*) tempus quo corpus describit arcum  
 XXXIV.  $ST$  est ad tempus oscillationis unius, ut arcus  $HI$ , tempus quo  
 corpus  $H$  perveniet ad  $L$ , ad semiperipheriam  $HKM$ , tem-  
 pus quo corpus  $H$  perveniet ad  $M$ . Et velocitas corporis pen-  
 duli in loco  $T$  est ad velocitatem ipsius in loco infimo  $R$ ,  
 ( hoc est, velocitas corporis  $H$  in loco  $L$  ad velocitatem ejus  
 in loco  $G$ , seu (<sup>q</sup>) incrementum momentaneum lineæ  $HL$  ad  
 incrementum momentaneum lineæ  $HG$ , arcubus  $HI$ ,  $HK$  æqua-  
 bili fluxu crescentibus ) ut ordinatim applicata  $LI$  ad radium  
 $GK$ , sive ut (<sup>r</sup>)  $\sqrt{SR^2 - TR^2}$  ad  $SR$ . Unde (<sup>r</sup>) cum,  
 in oscillationibus inæqualibus, describantur æqualibus temporibus

(p) \* Ideoque subinde pergere æqualiter urgeri & æqualia spatia iisdem nempe temporibus describere.

(q) \* Seu incrementum momentaneum &c. Nam incrementa illa sunt spatia eodem tempusculo uniformiter descripta, quæ proinde sunt ut velocitates in locis  $L$  &  $G$ , quibus describuntur, arcus autem  $HI$ ,  $HK$  quæ tempora exhibent, crescunt ut tempora, hoc est, æquabili fluxu.

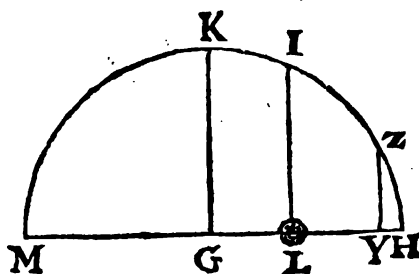
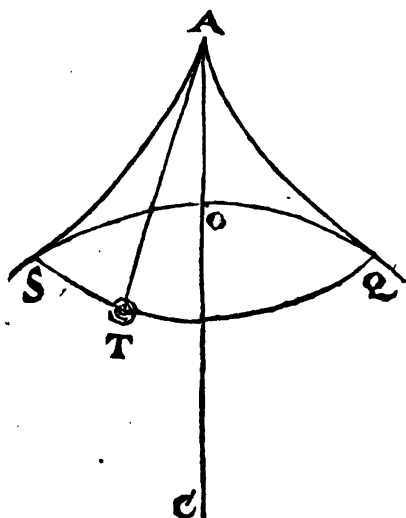
(r) Sive ut  $\sqrt{SR^2 - TR^2}$  ad  $SR$ . Est enim, ex naturâ circuli  $LI^2 = ML \times LH = GH^2 - GL^2 = SR^2 - TR^2$ , adeoque  $LI = \sqrt{SR^2 - TR^2}$ , &  $LI : GK = \sqrt{SR^2 - TR^2} : GK$ , seu  $SR$ .

(r) 468. Unde cum &c. Datâ vi centripetâ in perimetro globi  $QOS$  vel in  $H$  datur tum velocitas quâ corpus hæc vi sollicitatum describit circulum  $HKM$ , tum tempus quo semiperipheriam  $HKM$  percurrit (201) hoc est, tempus unius oscil-

lationis integræ; & contrâ, Dato tempore unius oscillationis integræ, datur vis centripeta in  $H$  vel  $S$  (202). Porro dato arcu  $ST$ , vel rectâ æquali  $HL$ , datur  $LI$  sinus arcus  $HI$ , & hinc datur hic arcus, adeoque & ratio  $HI$ , ad  $HKM$ , id est, ratio temporis quo percurritur  $HL$  vel  $ST$  ad tempus datum oscillationis integræ. Et contrâ dato tempore quo describitur  $HL$  vel  $ST$ , datur arcus  $HI$ , & hinc datur illius sinus rectus  $LI$  sinusque versus  $HL$  vel arcus  $ST$ . Datâ vi centripetâ in  $S$  vel  $H$ , datur velocitas corporis de loco  $S$  vel  $H$  in  $R$  vel  $G$  pervenientis (467); hinc verò datur velocitas corporis in loco quovis dato  $T$  vel  $L$ ; cum (ex demonstr.) velocitas in  $R$  vel  $G$ , sit ad velocitatem in  $T$  vel  $L$ , ut  $GK$  ad  $LI$ , seu ut  $SR$  ad  $\sqrt{SR^2 - TR^2}$ . Dato tempore quo describitur  $ST$  vel  $HL$ , datur arcus  $HI$ , & illius sinus rectus  $LI$ , adeoque & velocitas in  $L$  & contrâ.

Si

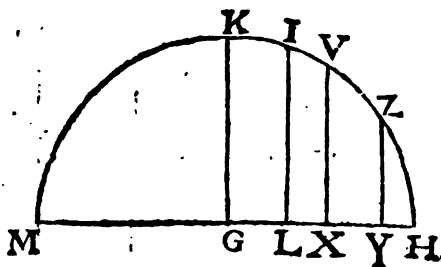
bus arcus totis oscillationum arcubus proportionales; habentur, DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. LII. PROBL. XXXIV.



tionibus universis. Quæ erant primò inveniendæ.

Oscillantur jam funipendula corpora in cycloidibus diversis intra globos diversos, quòrum (†) diversæ sunt etiam vires absolutæ, descriptis: &, si vis absoluta globi cujuscvis  $QOS$  dicatur

Si corpus non ex summo loco  $S$ , vel  $H$ , sed ex alio quovis  $t$ , (vid. fig. prop. 5 r.) vel  $Y$ , demittatur, erit tempus quo ex loco  $t$  pervenit ad  $R$ , vel ex  $Y$  ad  $G$ , æquale tempore dato dimidiæ oscillationis. Hinc dato arcu  $Tt$ , vel rectâ æquali  $YL$ , dabitur & tempus quo describitur & velocitas in  $T$  vel  $L$ , ac contrâ. Nam cum sint arcus (scilicet spatia quævis æqualibus temporibus descripta in oscillationibus inæqualibus, ut arcus vel spatia integris oscillationibus percurra (464), dato arcu  $Tt$ , vel spatio  $YL$ , dabitur spatium  $HX$ , quod corpus de loco  $H$  demissum describit eodem tempore quo aliud corpus percurrit  $Tt$  vel  $YL$ ; dato spatio  $HX$ , datur arcus  $HV$  & illius sinus rectus  $XV$ , & hinc datur tempus quo describitur  $HX$  &  $YL$ , & velocitas in  $X$ ; cuiusque sit velocitas in



$X$ , in corpore de loco  $H$ , cadente ad velocitatem in  $L$ , in corpore de loco  $Y$  cadente ut  $HG$ , ad  $YG$  (464) dabitur velocitas in  $L$ , vel  $T$ ; Et contrâ.

(†) 469. Quorum diversa sunt &c. Ex centris  $C, c$ , per omnes circumquaque spatium



# 380. PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO catur V, vis acceleratrix quâ pendulum urgetur in circumfe-  
TU COR- rentiâ hujus globi, ubi incipit directè versùs centrum ejus mo-  
PORUM. veri, erit ut distantia corporis penduli à centro illo & vis ab-

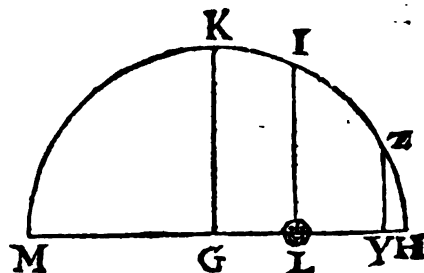
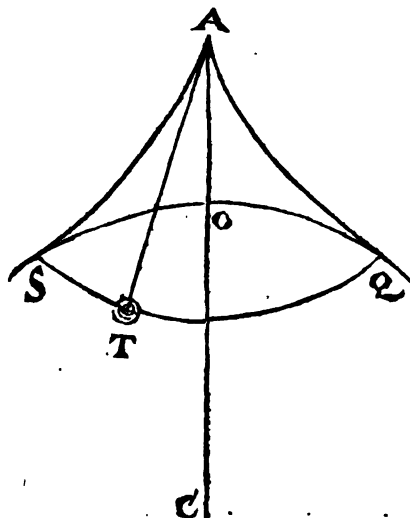
LIBER PRIMUS.

PROB.

LII.

PROBL.

XXXIV.



soluta globi conjunctim, hoc est, ut  $CO \times V$ . Itaque (\*) lineola HY, quæ sit ut hæc vis acceleratrix  $CO \times V$ , describetur dato tempore; & si (x) erigatur normalis YZ circumferen-

diffundi intelligantur vires centripetæ in ratione distantiarum à suis respectivè centrīs crescentes, vires acceleratrices in locis datis æquæ altis A, a, dicantur A, a; in aliis locis æquæ altis D, d, dicantur V, v, & erit (ex hyp.)  $V : A = CD : CA = cd : ca = v : a$ , adeoque  $V : v = A : a$ , sed evanescentibus distantis, CD, cd, sunt V, v, vires absolutæ (per definitionem VI. Newt.) quare vires absolutæ sunt in ratione virium acceleratricium in locis æquæ altis. Jam verò vires acceleratrices in locis quibuscumque O, o, dicantur B, b, erit (ex Dem.)

$$V : v = A : a$$

$$\text{Et per hyp. } CO : CA = B : A$$

$$CA \text{ vel } ca : Co = a : b$$

$$\text{Ergo ex æquo } V \times CO : v \times Co = B : b; \text{ id}$$

est, vis acceleratrix in loco quovis O, est ut distantia à centro & vis absoluta conjunctim.

(u) \* Itaque lineola nascens HY, quæ sit ut hæc vis acceleratrix  $CO \times V$ , describetur dato tempore. Nam quadratum temporis quo describitur nascens HY,

$$\text{est ut } \frac{HY}{CO \times V} \text{ (per cor. V. Lem. X.)}$$

Unde cum data sit ratio HY ad  $CO \times V$  (ex hyp.), quadratum temporis adeoque & tempus ipsum quo describitur HY datum erit.

(x) \* Es si erigatur normalis &c. Arcus HZ erit ad semiperipheriam HKM, ut tempus datum quo describitur HY, ad tempus unius oscillationis (prop. 38.) quod proinde erit ut semiperipheria HKM, seu ut radius GH directè, & arcus HZ inversè. Est autem arcus nascens HZ æqualis chordæ HZ (per Lem. 7.) adeoque (ex naturâ circuli)  $H'Z' = HY \times MH = 2 GH \times HY$ ; Quare cum sit HY ut

tiae occurrens in  $Z$ , arcus nascens  $HZ$  denotabit datum illud tempus. Est autem arcus hic nascens  $HZ$  in subduplicatâ ratione rectanguli  $GHY$ , ideoque  $\sqrt{GH \times CO \times V}$ . Unde tempus oscillationis integræ in cycloide  $QRS$  ( cum sit ut semiperipheria  $HKM$ , quæ oscillationem illam integram denotat, directè; utque arcus  $HZ$ , qui datum tempus similiter denotat, inversè ) fiet ut  $GH$  directè &  $\sqrt{GH \times CO \times V}$  inversè, hoc est, ob æquales  $GH$  &  $SR$ , ut  $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$ , five

( per corol. prop. I. ) ut  $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$ . Itaque oscillationes in globis & cycloidibus omnibus, quibuscunque cum viribus absolutis factæ, sunt in ratione quæ componitur ex subduplicatâ ratione longitudinis fili directè, & subduplicatâ ratione distantiae inter punctum suspensionis & centrum globi inversè, & subduplicatâ ratione vis absolutæ globi etiam inversè. *Q. E. I.*

*Corol. 1.* Hinc etiam oscillantium, cadentium & revolventium corporum tempora possunt inter se conferri. Nam si rotæ, quâ cyclois integra globum describitur, diameter constitutur æqualis semidiametro globi cyclois ( 7 ) evadet linea recta per centrum globi transiens, & oscillatio jam erit descensus & subsequens ascensus in hâc rectâ. Unde datur tum tempus descensus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad distantiam quamvis revolvendo arcum quadrantalem describit. Est ( 2 ) enim hoc tempus ( per casum secundum ) ad tempus semioscillationis in cycloide quâvis  $QRS$  ut 1 ad  $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$ .

Co-

$CO \times V$ , erit  $HZ^2$  ut  $2 GH \times CO \times V$ ; seu, ut  $GH \times CO \times V$ ; & hinc tempus

$$\text{minus oscillationis ut } \frac{GH}{\sqrt{GH \times CO \times V}} = \sqrt{\frac{GH}{CO \times V}} = \sqrt{\frac{SR}{CO \times V}} = \sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$$

ob  $GH = SR$ , &  $\frac{AR}{AC} = \frac{SR}{CO}$ , ( per cor.

prop. 50. )

( 7 ) \* Cyclois evades linea recta ( 461 ).

( 2 ) \* Est enim hoc tempus &c. Quoniam cycloide  $QRS$  in rectam mutatâ fit  $AR = AC$ , erit ( per cas. 2. ) tum tempus descensus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale ( prop. 38. ) per circuli quadrantem ut  $\sqrt{\frac{1}{V}}$ . Unde erit

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

PROP.  
LII.  
PROBL.  
XXXIV.

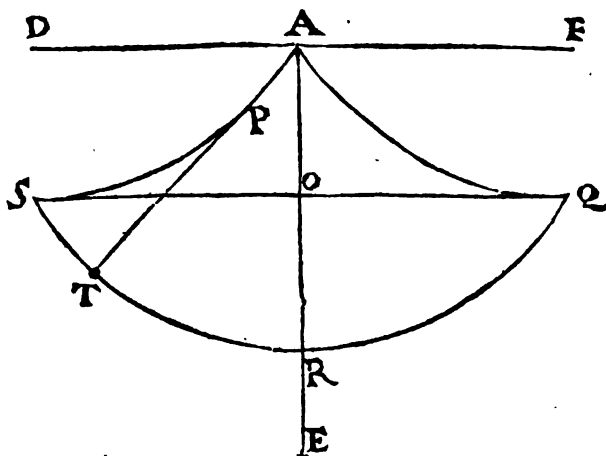
Corol. 2. Hinc etiam confectantur quæ *Wrennus* & *Hugenius* de cycloide vulgari adinvenierunt. Nam (a) si globi diameter augeatur in infinitum: mutabitur ejus superficies sphaerica in planum; visque (b) centripeta aget uniformiter secundum lineas huic plano perpendiculares, & cyclois nostra abibit in cycloidem vulgi. Isto (c) autem in casu longitudo arcus cycloidis, inter planum illud & punctum describens, æqualis evadet quadruplicato finui verso dimidii arcus rotæ inter idem inter planum & punctum describens; ut invenit *Wrennus*; Et (d) pendulum inter duas ejusmodi cycloides in simili & æquali cycloide temporibus

hoc tempus ad tempus semiofcillationis in cycloide quavis Q R S in rectam non mutat ut  $\sqrt{\frac{1}{V}}$  ad  $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$ , hoc est, ob datam V, ut 1 ad  $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$ . Quare dato tempore unius ofcillationis in cycloide quavis Q R S circa centrum C, dabitur tempus descensus de loco quovis ad idem centrum, & tempus huic æquale per quadrantem circuli ad quamvis distantiam descripti.

(a) \* Nam si globi diameter augeatur (462).

(b) \* Visque centripeta distantie infinitæ (quæ proinde non mutatur) proportionalis non mutabitur, & quoniam centro in infinitum abeunte, radii qui antè erant ad superficiem sphaericam perpendiculares fiunt paralleli; vis centripeta aget uniformiter secundum lineas huic superfici ei in planum mutatae perpendiculares.

(c) \* Isto autem in casu (462).



(d) \* Et pendulum inter duas &c. Erit enim in hoc casu diameter rotæ O R quâ describitur cyclois Q R S, æqualis

diametro A O rotæ quâ describitur cyclois A P S (462.), quare semicycloides S R, A S similes erunt & æquales.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 383

ribus æqualibus oscillabitur, ut demonstravit *Hugenius*. Sed (c) DE MOTU CORPORUM. & descensus gravium, tempore oscillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit. LIBER PRIMUS. PROP.

Aptantur autem propositiones à nobis demonstratæ ad veram constitutionem terræ, quatenus rotæ eundo in ejus circulis maximis describunt motu clavorum, perimetris suis infixorum, cycloides extra globum; & pendula inferius in fodinis & cavernis terræ suspensa, in cycloidibus intra globos oscillari debent, PROBL. XXXIV. ut oscillationes omnes evadant isochronæ. Nam gravitas (ut in libro tertio docebitur) decrescit in progressu à superficie terræ, fursum quidem in duplicatâ ratione distantiarum à centro ejus, deorsum vero in ratione simplici.

P R O-

470. (c) \* Sed & descensus &c. Erit in hoc casu tempus unius oscillationis ad tempus descensus perpendicularis per diametrum rotæ A O vel O R, seu per dimidiam penduli longitudinem ut peripheria circuli ad ejus diametrum. Nam iisdem positis quæ (in prop. 52. & ejus cor. 2<sup>o</sup>.) erit tempus unius oscillationis æquale tempori semirevolutionis in circulo H K M (prop. 38.). Est autem (200.) tempus semirevolutionis in circulo H K M, ad tempus descensus uniformiter accelerati per dimidiam radium H G, ut peripheria circuli ad diametrum. Quare cum sit  $\frac{1}{2} H G = \frac{1}{2} S R = \frac{1}{2} A R = O R$  (462.) erit tempus unius oscillationis ad tempus descensus perpendicularis per dimidiam penduli longitudinem ut circuli peripheria ad diametrum.

471. Coroll. Dimidia penduli longitudo A O, est ad spatium A E descensu perpendiculari descriptum unius oscillationis tempore in duplicatâ ratione diametri ad peripheriam circuli. Sit enim tempus unius oscillationis t, diameter circuli ad peripheriam, ut d, ad p, & erit (469) tempus descensus perpendicularis per spatium A O =  $\frac{dt}{p}$ ; sed (27)  $\frac{ddt}{pp} : t = AO : AE$ , ergo  $AO : AE = d d : pp$ . *Hugenius*, cui pendulorum theoria debetur,

prop. 25. part. 4. horologii oscillatorii, longitudinem penduli singulas oscillationes uno minuto secundo absolventis invenit pedum Paris. 3. & linearum  $8\frac{1}{2}$ , hoc est, linearum  $\frac{881}{2}$ , & hinc dimidia penduli

longitudo erat linearum  $\frac{881}{4} = 220.25$ .

Est autem diameter circuli ad peripheriam ut 113, ad 355, quam proximè, & proinde quadratum diametri ad quadratum peripheriæ ut 12769. ad 126025; quare spatium uno minuto secundo descriptum à corpore gravi perpendiculariter cadente, est pedum Paris. 15.  $\frac{1}{12}$ , quam proximè.

472. Coroll. Quoniam propè telluris superficiem gravium directio horizonti ad sensum perpendicularis est gravitasque constans, atque aded V gravitas absoluta, & A C distantia à centro telluris datæ sunt, in pendulis in cycloidem vulgarem aut etiam in exiguos arcus circuli (465) excurrentibus, tempus unius oscillationis (per cas. 2. prop. 52.) erit ut  $\sqrt{A R}$ , id est, in ratione subduplicatâ longitudinis penduli & proinde longitudo penduli in ratione duplicatâ temporis unius oscillationis.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

LIBER

PRIMUS.

PROP.

LIII.

PROBL.

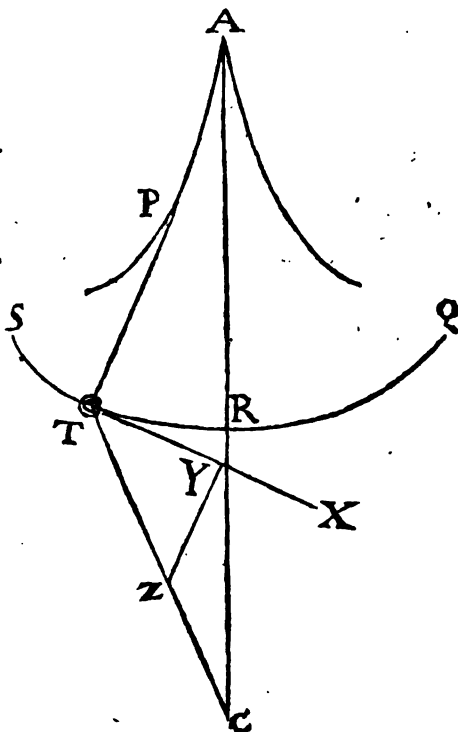
XXXV.

# PROPOSITIO LIII. PROBLEMA XXXV.

*Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis oscillationes semper isochronas peragent.*

Oscilletur corpus  $T$  in curvâ quâvis lineâ  $STRQ$ , cujus axis sit  $AR$  transiens per virium centrum  $C$ . Agatur  $TX$  quæ curvam illam in corporis loco  $T$  quovis contingat, inque hâc tangente  $TX$  capiatur  $TY$  æqualis arcui  $TR$ . Nam <sup>(f)</sup> longitudo arcus illius & figurarum quadraturis, per methodos vulgares, innotescit. De puncto  $Y$  educatur recta  $YZ$  tangenti perpendicularis. Agatur  $CT$  perpendiculari illi occurrens in  $Z$ , & erit vis centripeta proportionalis rectæ  $TZ$ . *Q.E.I.*

Nam si vis, quâ corpus trahitur de  $T$  versus  $C$ , exponatur

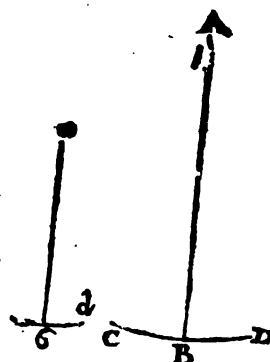


473. Corol. Numeri oscillationum isochronarum à duobus pendulis  $A B$ ,  $a b$ , eodem tempore confectarum sunt reciproce ut tempora quibus singulæ oscillationes fiunt. Nam si pendulum  $a b$ , bis oscilletur eo tempore quo  $A B$  semel;  $a b$ , quatuor oscillationes absolvet, dum  $A B$  duas conficit, & ita porro in aliis suppositionibus, ut patet. Quare numeri oscillationum isochronarum eodem tempore à duobus pendulis confectarum sunt in ratione subduplicatâ longitudinum pendulorum inversè (472).

474. Corroll. Hinc si tempus unius oscillationis penduli  $A B$ , sit  $L$ , tempus unius oscillationis penduli  $a b$ , sit  $t$ , numeri oscillationum eodem tempore confectarum  $N, n$ , erit  $T : t :: N : n$  (473), &  $T T : t t :: A B : a b$  (472) ac propterea  $n n : N N :: A B : a b$ . Datâ igitur tribus harum proportionum terminis quartus datus est.

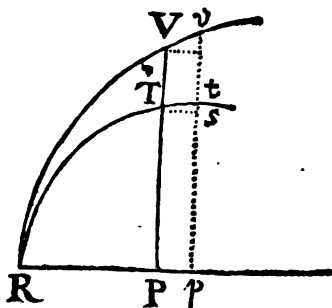
(f) 476. Nam longitudo arcus &c. Curvæ  $R T$  sit axis  $R P$ , vertex  $R$ , ad axem

ordinatim applicatæ  $T P$ ,  $t p$ , infinitè propinquæ  $T$  s axi parallela & ordinariæ  $t p$  occur-



per rectam  $TZ$  captam ipsi proportionalem, resolvetur hæc in *De Mo-*  
vires  $TY, YZ$ ; quarum  $YZ$  trahendo corpus secundum longi-  
tudinem fili  $PT$ , morum ejus nil mutat, vis autem altera  $TY$   
motum ejus in curvâ  $STRQ$  directè accelerat vel directè re-  
tardat. (s) Proinde cum hæc sit ut via describenda  $TR$ , ac-  
celerationes corporis vel retardationes in oscillationum duarum

(ma-  
xxxv.

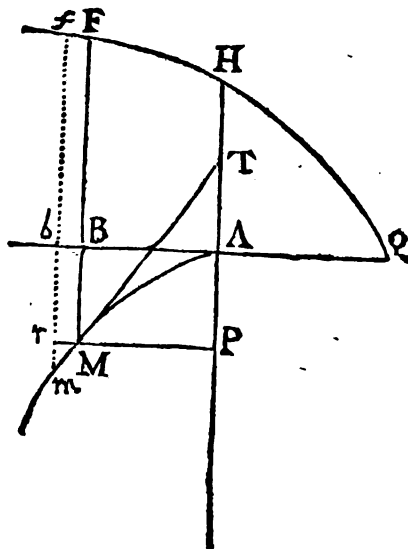


occurrens in s. Sit  $RP = x, PT = y$ , & erit  $Pp = Ts = dx, ts = dy, Tt^2 = dx^2 + dy^2$ , quare  $RT$ , fluens ipsius  $Tt$ , æqualis erit fluenti quantitatis  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ . Ex æquatione ad curvam  $RT$ , quæratuor valor ipsius  $dy$  per  $dx$  & alias quantitates, sitque  $dy = Qdx$ ,  $Q$  vero quantitas quælibet constans aut variabilis, erit  $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + QQ}$ . In perpendiculari  $PT$ , capiatur  $PV = A \times \sqrt{1 + QQ}$ , sitque  $A$  quantitas data, & curva  $RV$  locus punctorum  $V$ , erit areæ  $RVPE$  elementum  $Pp \times PV = Adx\sqrt{1 + QQ}$ , undè  $Tt = \frac{Pp \times PV}{dx\sqrt{1 + QQ}} = \frac{Pp \times PV}{A}$ , & capiendo

utrinque fluentes  $RT = \text{areæ} \frac{RVP}{A}$ , curvæ igitur  $RT$  rectificatio ad quadraturam figuræ  $RVP$  reducta est.

476. Idem aliâ methodo fieri potest. Sit curvæ hujus rectificandæ  $AMm$ , axis  $AP$ , & vertex  $A$ . Per punctum quodvis  $M$  agatur tangens  $MT$  axi occurrens in  $T$ , &  $MF$  axi parallela rectam  $AB$  axi normalem secans in  $B$ ; capiatur semper

Tom. I.



$AB$  ad  $MT$  sicut constans quævis  $A$  ad  $BF$ , & punctum  $F$  curvam  $FHQ$  perpetuò tangat, erit spatium curvilineum  $BFHA$  æquale rectangulo sub arcu  $AM$  & constanti  $A$  comprehenso, adeoque

arcus  $AM = \frac{BFHA}{A}$ . Nam ductâ  $m$  f

priori  $MF$  parrallelâ & infinitè propinquâ, demissâque ad axem  $AP$  perpendicularo  $MP$ , quod rectam  $mf$ , secat in  $r$ ; erit ob triangula  $MPT, Mrm$  similia  $Mr : Mm = MP$ , vel  $BA : MT = A : BF$  (per constr.) Ergò  $BF \times Mr$ , id est, elementum  $Bb fF = Mm \times A$ , ac proinde spatium fluens  $AHF B$  æquale fluenti  $AM \times A$ .

(g) \* Proinde &c. Quæ sequuntur manifestæ sunt (ex dem. prop. 51.

Ccc

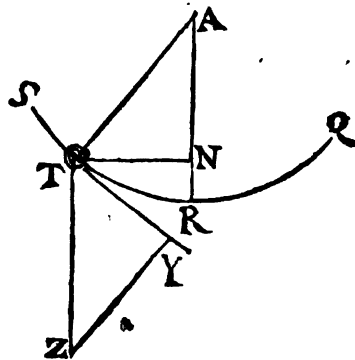
DE MO- (majoris & minoris) partibus proportionalibus describendis, eruit  
TU COR- semper ut partes illæ, & propterea facient ut partes illæ simul  
PORUM. describantur. Corpora autem quæ partes totis semper propor-  
LIBER tionalibus simul describunt, simul describent totas. Q. E. D. (h)  
PRIMUS.

PROF. *Corol. 1.* Hinc si corpus  $T$ , filo  
LILL rectilineo  $AT$  à centro  $A$  pendens,

PROBL. describat arcum circulařem  $\widehat{STR}O$ , &  
xxxv. interea (i) urgeatur secundum lineas

parallelas deorsum à vi aliquâ, quæ  
 sit ad vim uniformem gravitatis, ut  
 arcus  $TR$  ad ejus finem  $TN$ : æqua-  
 lia erunt oscillationum singularum  
 tempora. Etenim ob parallelas  $TZ$ ,  
 $AR$ , similia erunt triângula  $ATN$ ,  
 $ZTY$ ; & propterea  $TZ$  erit ad  $AT$  ut  $TY$  ad  $TN$ ; hoc est,  
 si gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam  
 $AT$ ; vis  $TZ$ , quâ oscillationes evadent isochronæ, erit ad vim  
 gravitatis  $AT$ , ut arcus  $TR$  ipsi  $TY$  æqualis ad arcus illius fi-  
 num  $TN$ .

*Corol. 2.* Et propterea in horologiis, si vires à machinâ in pendulum ad motum conservandum impressæ ita cum vi gravitatis componi possint, ut vis tota deorsum semper sit ut linea quæ oritur applicando rectangulum sub arcu  $T R$  & radia



(h) 477. Q. E. D. Datâ vi centripetâ T Z quâ corpus in datâ curvâ S R Q oscillationes semper isochronas peragit, velocitates illius corporis in locis singulis & tempora quibus tum oscillationes totæ, tum singulæ oscillationum partes peragunt eodem modo definiuntur ac in *cas. 1.º. prop. 52.* Ductâ enim ex centro virium C rectâ quæ curvam tangat in puncto aliquo S, erit in hoc puncto  $TZ = TY$ , hoc est, vis centripetâ in curvâ S T R æqualis vi centripetæ ad C perpendiculariter tendenti in S; quare ma-

nente constructione *cas. 1. prop. 52.* & supponendo vim centripetam in H, (*vid. fig. ibid.*) quâ describitur circulus HKM, æqualem vi centripetæ in S, tempus unius oscillationis & singulæ oscillationum partes, & velocitates in locis singulis inveniuntur prorsus (ut in *nos. 468.*) iidemque ratiociniis res omnis demonstrabitur.

(i) \* *Interea urgeatur secundum linear  
parallelas &c. Centro C figuræ superioris  
in infinitum abeunte.*

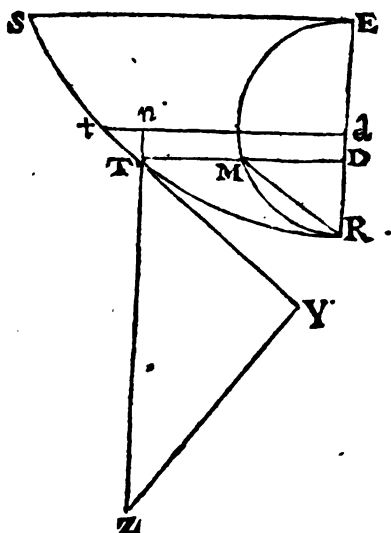
*AR* ad finem *TN*, oscillationes (<sup>k</sup>) omnes erunt isochro-  
næ.

TU COR-  
PORUM.

(k) \* Oscillationes omnes erunt isochro-  
næ. Cum enim vis tota *TZ* quæ oscilla-  
tiones redduntur isochronæ sit (per cor. 1.)  
ad vim gravitatis *AT* seu *AR*, ut *TR*  
ad *TN*, erit  $TZ = \frac{AR \times TR}{TN}$ , adeoque

vis tota *TZ*, ut  $\frac{AR \times TR}{TN}$ .

478. Ex demonstratis solvi potest hoc  
problema: Datâ lege vis centripetæ, in-  
venire curvam tautochronam *STR*, in quâ  
nimirum, corpus oscillationes semper iso-  
chronas peragat.



Casus rus. Vis gravitatis directio *TZ*  
semper sit parallela axi *ER* curvæ *STR*,  
sint *SE*, *td*, *TD* ad axem *RE* ordinatim  
applicatæ, punctum *E* datum, puncta *D*,  
*d* infinitè propinqua, tangens *TY* æqua-  
lis arcui *TR*, *YZ* ad *TY* perpendicu-  
laris secet *TZ* in *Z*, & *ZT* producta secet  
*ed* in *n*. Dicantur *RE* = *a*, vis grava-  
tis in *E* vel *S* = *g*, in *D* vel *T* = *v*, pars  
linæ verticalis per *S* ductæ determinata

ad modum verticalis *TZ*, sit = *b*, *RD* = *x*, *LIBER*  
*DT* = *y*, *TR* = *TY* = *s*. Ob triangula *PRIMUS*.  
*Tnt*, *TYZ* similia, *Tn(dx) : Tt(ds)* *PROP.*  
= *TY(s) : TZ* =  $\frac{sd}{dx}$ ; ob angulum *Tnt* *LI II.*  
rectum  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ; & (per prop. *PROBL.*  
*53.*)  $g : v = b : TZ \left( \frac{sd}{dx} \right)$ , ideoque *XXXV.*

$sd = \frac{b}{g} v dx$ , & sumptis fluentibus

$\frac{1}{2}ss = \frac{b}{g} S. v dx$ ; fluens autem *S. v dx* ita  
sumi debet, ut evanescente *x*, ea fluens eva-  
nescat. Erit igitur  $ss = \frac{2b}{g} S. v dx$ ,  $s =$

$\sqrt{\frac{2b}{g} S. v dx}$ , & sumptis fluxionibus

$ds = \frac{b v dx}{\sqrt{2bg S. v dx}}$ , proindeque  $ds^2$   
=  $\frac{bb v dx^2}{2bg S. v dx} = dx^2 + dy^2$ , & hinc

$dx \sqrt{\frac{b v v - 2g S. v dx}{2g S. v dx}} = dy$  æquatio

ad curvam tautochronam *STR*, in quâ  
datâ lege vis gravitatis exterminabitur *v*.

Exemplum. Sit gravitas constans, seu  
 $v = g$ , & erit  $v dx = g dx$ ,  $S. v dx = gx$ ,  
quæ evanescit, ubi  $x = 0$ . Quare æqua-

tio ad curvam *SR* fiet  $dx \sqrt{\frac{b - 2x}{2x}} =$

$dy$ . Quoniam vero  $ss = \frac{2b}{g} S. v dx =$

$2bx$ , si ponatur  $b = SR$ , ut verticalis per  
*S* ducta curvam tangat in *S*, & loco *s*  
scribatur *b*, ac loco *x* scribatur *a*, erit  
 $bb = 2ba$ , & proinde  $b = 2a$ , atque  $ss =$   
 $4ax$ , hoc est,  $SR = 2RE$ , &  $TR^2 =$   
 $4RE \times RD$ ; porro si diametro *RE* de-  
scribatur circulus *EMR* secans *DT* in *M*,  
erit  $MR^2 = RE \times RD$ ,  $4MR^2 = 4RE \times$   
 $RD$ , ideoque  $TR^2 = 4MR^2$ , &  $TR = 2$   
 $MR$ , quæ est proprietas cycloidis vulgaris  
circulo genitore *EMR* descriptæ.



DE MO- Casus 2. Tendat vis centripeta ad punctum datum C. Centro C, radiis CE, CD, Cd descripti sint arcus circulares ES, DT, dtn, curvæ SR occurrentes in S, T, t, & rectæ CT in n, sintque  
 LIBER PRIMUS. E punctum in axe CE datum, D, d puncta infinitè propinqua, tangentis TX per T ductæ pars TY æqualis arcui TR, & ZY, CX ad tangentem perpendiculares.  
 PROP. Dicantur CE = a, CR = c, SL pars radii CS eodem modo determinata ac TZ  
 LIII. pars radii CT sit = b, vis centripeta in E vel S = g, in D vel T = v, CD vel CT = x, TR vel TY = s, CX = p. Ob similitudinem triangulorum Tnt, TYZ, TXC, est Tn(dx) : Tt(ds) = TY

$$(s) : TZ = \frac{sd s}{dx} \& TC(x) : CX(p) =$$

$$Tt(ds) : tn = \frac{pds}{x}, \text{ ideoque ob an-}$$

$$\text{gulum Tnt rectum } ds^2 = dx^2 + \frac{ppds^2}{xx};$$

$$\& \text{ proinde } ds^2 = \frac{xxdx^2}{xx - pp}.$$

$$\text{Verùm (per prop. 53.) } g : v = b : TZ \left( \frac{sd s}{dx} \right), \text{ unde } sds = \frac{b}{g} vdx, \& \text{ sumptis}$$

$$\text{fluentibus } \frac{1}{2} ss = \frac{b}{g} S. vdx. \text{ Quoniam autem evanescente } s, \text{ fit } x = c, \text{ fluens } S. vdx \text{ ita accipi debet, ut, posita } x = c, \text{ evanescat. Erit igitur } ss = \frac{2b}{g} S. vdx,$$

$$s = \sqrt{\frac{2b}{g}} S. vdx, \& \text{ sumptis fluxionibus}$$

$$ds = \frac{bvdx}{\sqrt{2bgS.vdx}}, \text{ unde } ds^2 = \frac{bvvd x^2}{2gS.vdx}$$

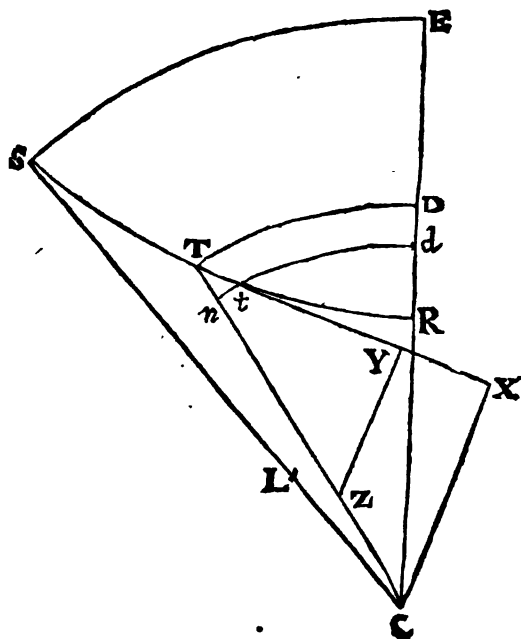
$$= \frac{xxdx^2}{xx - pp}, \text{ atque adeo } \frac{bv v}{2gS.vdx} =$$

$$\frac{xx - pp}{xx - pp} \text{ æquatio ad tautochronam STR, in qua datâ lege vis centripetæ delebitur } v.$$

$$\text{Exemplum. Vis centripeta sit ut distantia à centro C, hoc est, } g : v = a : x, \text{ adeoque } v = \frac{gx}{a}, vdx = \frac{gxdx}{a}, S.vdx$$

$$= \frac{gxx}{2a} + Q(\text{constantem}) \& \text{ quoniam po-}$$

$$\text{sitâ } x = c, \text{ evanescit } S.vdx, \text{ erit } Q = \frac{-gce}{2a},$$



$$\text{atque ita } S, vdx = \frac{gxx - gcc}{2a} \text{ Quare}$$

$$\text{erit } ss = \frac{2b}{g} S. vdx = \frac{bxx - bcc}{a}, \&$$

$$\text{æquatio ad tautochronam evadet } \frac{bxx}{axx - acc} = \frac{xx}{xx - pp}, \text{ seu } pp = \frac{bxx - axx + acc}{b}.$$

Jam si in hac æquatione ponatur  $b = a$ , erit  $p = c$ , &  $ss = xx = ecc$ , ideoque tautochrona SR linea recta ad CR perpendicularis in R.

Si ponatur  $b$  major quàm  $a$ , &  $c = 0$ , erit  $p = x\sqrt{\frac{b-a}{b}}$ , adeoque  $p$  ad  $x$  in ra-

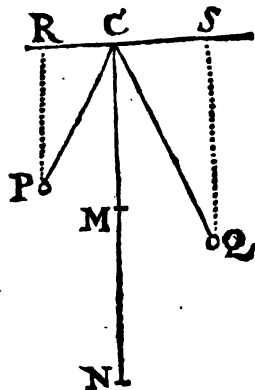
tione datâ, cumque sit  $p$  seu CX finis anguli CTX, existente radio  $x$  seu CT, erit angulus CTX constans, & proinde tautochrona SR spiralis logarithmica.

Si fuerit  $b$  minor quàm  $a$ , & recta CS curvam SR tangat in S, erit  $b = SR$ , cumque sit  $ss = \frac{bxx - bcc}{a}$ , si ponatur

$$s = SR = b, \& \text{ proinde } x = a \text{ fiet } bb = \frac{baa}{a}$$

$\frac{b a a - b c c}{a}$ , &  $b = \frac{a a - c c}{a}$ . Jam si in æquatione ad curvam S R loco b scribatur  $\frac{a a - c c}{a}$ , erit  $p p = \frac{a a c c - c c x x}{a a - c c}$  æquatio ad cycloidem, quæ describitur rotatione circuli cujus diameter est R E seu  $a - c$  super concavam peripheriam circuli centro C radio C E seu a descripti, ut liquet per n. 466.

*Schol.* In superioribus de pendulorum motu propositionibus corporis penduli gravitatem in centro seu puncto coactam & filum gravitatis expers supposuimus, quæ pendulum simplex constituunt. Quamobrem ne demonstrare oscillationum leges in experimentis valde perturbentur, filum usurpandum est tenue cum globo exiguo & ex materia gravissimâ confiato. Si verò filum aut virga e qua globus pendet gravis fuerit & globus major, pendulum non amplius simplex est, sed compositum, quod pluribus ponderibus inter se connexis instructum est.



Pendulum compositum C P Q, onustum quotcumque pondusculis P, Q, &c. quorum commune gravitatis centrum M circa punctum suspensionis C oscilletur. Recta C M per punctum suspensionis C & commune gravitatis centrum M ducta vocatur axis penduli compositi P C Q, recta verò R C S in puncto suspensionis C ad axem penduli C M perpendicularis dicitur axis oscillationis. Si in axe penduli compositi C M, capiatur C N, æqualis longitudini penduli simplicis suas oscillationes in circulo eodem tempore quo pendulum compositum C P Q semper absolvit.

tis, pendulum illud simplex composito C P Q synchronum vel etiam isochronum dicitur, & punctum N centrum oscillationis penduli compositi C P Q appellatur. Porro si singulorum pondusculorum P, Q &c. gravitas in punctis P, Q &c. collecta intelligatur, & lineæ P C, Q C &c. gravitatis expertes supponantur, sique M summa pondusculorum omnium P, Q, &c. atque ex punctis P, Q &c. ad axem oscillationis R C S demittantur perpendiculara P R, Q S &c. erit  $C N = \frac{P \times P R^2 + Q \times Q S^2}{M \times M C} + \&c.$  id est,

si pondera singula penduli compositi ducantur in quadrata distantiarum suarum ab axe oscillationis, & summa productorum dividatur per id quod fit ducendo ponderum summam in distantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oscillationis, orietur longitudo penduli simplicis composito isochroni, sive distantia inter axem & centrum oscillationis ipsius penduli compositi. Hoc pulcherrimum theorema quo linearum ac figurarum omnium oscillantium centrum oscillationis determinatur, primus in horologio oscillatorio invenit ac demonstravit *Hugenius*. Idem theorema suo quisque modo postea demonstrarunt fratres celeberrimi *Jacobus* & *Joannes Bernoulli*, ille in Actis Lipsiensibus an. 1691. & Commentariis Paris. an. 1703. Hinc verò in Actis Lipsiensibus & Commentariis Paris. an. 1714. quorum demonstrationes exposuit clariss. *Wolffius* in Elementis Mechanices. *Hermannus* quoque lib. 1<sup>o</sup>. *Phoron. cap.* 5<sup>o</sup>. & initio Tomi 3<sup>i</sup>. *Acad. Petropol.* duas ejusdem theorematum demonstrationes edidit.

*Hugenius* horologii oscillatorii parte 4<sup>a</sup>. prop. 22. distantiam centri oscillationis à puncto suspensionis in sphaera filo tenui suspensa æqualem esse invenit longitudini fili cum radio sphaerae atque duabus quintis partibus tertiae proportionalis ad lineam compositam ex radio sphaerae ac longitudine fili & radiam ipsum, hoc est, si filum dicatur L, radius sphaerae R, distantia centri oscillationis à puncto suspensionis D, erit  $D = L + R + \frac{2 R R}{5 (L + R)}$ .

Sed hæc omnia indicare, non verò demonstrare nobis licet, cum his Propositionibus non utatur Auctor noster.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

LIBER

PRIMUS.

PROP.

LIV.

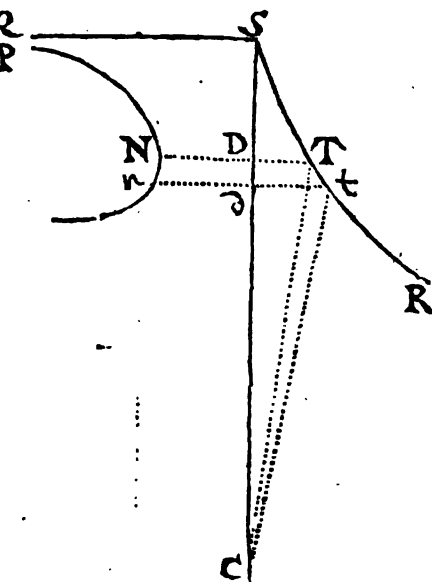
PROBL.

XXXVI.

PROPOSITIO LIV. PROBLEMA XXXVI.

*Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire tempora, quibus corpora vi quâlibet centripetâ in lineis quibuscunque curvis, in plano per centrum virium transeunte descriptis, descendant & ascendant.*

Descendat corpus de loco quovis  $S$ , per lineam quamvis curvam  $ST \text{ \& } R$  in plano per virium centrum  $C$  transeunte datam. Jungatur  $CS$  & dividatur eadem in partes innumeras æquales, sitque  $Dd$  partium illarum aliqua. Centro  $C$  intervallis  $CD$ ,  $Cd$  describantur circuli  $DT$ ,  $dt$ , lineæ curvæ  $ST \text{ \& } R$  occurrentes in  $T$  &  $t$ . Et ex datâ tum lege vis centripetæ, tum altitudine  $CS$  de quâ corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in aliâ quâvis altitudine  $CT$  (per prop. xxxix.) (1) Tempus autem, quo corpus describit lineolam  $Tt$ , est ut lineolæ hujus longitudo, id est, ut secans anguli  $tTC$  directè; & velocitas inversè. Tempori huic proportionalis sit ordinatim applicata  $DN$  ad rectam  $CS$  per punctum  $D$  perpendicularis, & ob datam  $Dd$  erit rectangulum



$Dd$

(1)\* *Tempus autem quo corpus &c.* Nam,  $Tt$ , est spatium nalcens velocitate uniformi descriptum; est autem tempus quo spatium aliquod æquabiliter describitur ut spatium illud directè & velocitas inversè (5). Porro si centro  $T$  radio dato  $Dd$ , æquali differentiæ rectarum  $TC$ ,  $tC$  circulus describi intelligatur, erit  $Tt$  se-

cans anguli  $tTC$ , quare ob datum radii  $Dd$  erit semper  $Tt$  ut secans anguli  $tTC$ , atque adeò tempus quo describitur  $Tt$  erit ut illa secans directè & velocitas inversè. Sed datâ tangente curvæ  $STR$  in puncto  $T$  datur anguli  $CTt$  secans; undè dabitur  $DN$  proportionalis tempori quo describitur  $Tt$ .



## PROPOSITIO LV. THEOREMA XXI.

*Si corpus movetur in superficie quâcunque curvâ, cujus axis per centrum virium transit, & à corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela & æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem describet.*

Sit  $BKL$  superficies curva,  $T$  corpus in eâ revolvens,  $STR$  trajectory, quam corpus in eâdem describit,  $S$  initium trajectory,  $OMK$  axis superficiæ curvæ,  $TN$  recta à corpore in axem perpendicularis,  $OP$  huic parallela & æqualis à puncto  $O$ , quod in axe datur,educta,  $AP^{(m)}$  vestigium trajectory à puncto  $P$  in lineæ volubilis  $OP$  plano  $AOP$  descriptum;  $A$  vestigiî initium puncto  $S$  respondens;  $TC$  recta à corpore ad centrum ducta;  $TG$  pars ejus vi centriptæ quâ corpus urgetur in centrum  $C$ ,  
pro-

*Scholium.* Si ex his tribus, vi centripetâ in singulis locis, curvâ in quâ corpus ascendit vel descendit, & tempore quo singuli curvæ arcus percurruntur, duo data fuerint, tertium dabitur. Sit enim (in superioribus figuris)  $Dd = dx$ ,  $Tt = dt$ ,  $tm = dy$ , velocitas in  $T = c$ , & erit  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ , &  $(s)cdt = ds$ , ideoque  $c c dt^2 = dx^2 + dy^2$ . Quare si, datâ vi centripetâ, seu (per prop. 39.) æquatione inter  $c$  &  $x$ , detur etiam æquatio inter  $s$  &  $x$  vel  $y$ , dabitur æquatio inter  $x$  &  $y$ , hoc est, æquatio ad curvam  $STt$ , & vice versâ. Exempli causâ, positâ vi centripetâ constante & ad distantiam infinitam tendente, corpus ita descendat in curva  $STt$ , ut tempus per arcum quemvis  $ST$  proportionale sit altitudini correspondenti  $Sd$ , dicanturque  $Sd = x$ ,  $DT = y$ , tempus per  $ST = t$ , velocitas in  $T = c$ ; & erit  $dt$  ut  $dx$ , &  $c$  ut  $\sqrt{x}$ , ideoque  $c dt$  ut  $dx \sqrt{x}$ , & hinc si fuerit  $a$  quantitas constans,  $c dt = dx \frac{\sqrt{x}}{a}$

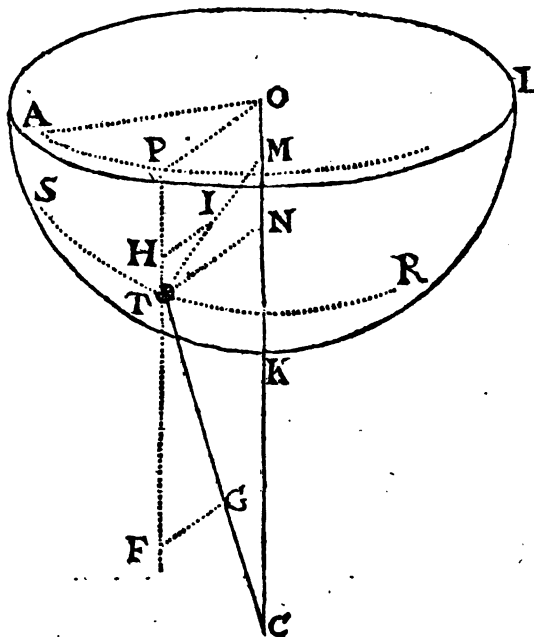
& proinde  $\frac{x dx^2}{a} = dx^2 + dy^2$ , & hinc

$(x - a) dx^2 = a dy^2$ . Ponatur  $x - a = v$ , & erit  $dx = dv$ , &  $v^{\frac{1}{2}} dv = a^{\frac{1}{2}} dy$ , sumptisque fluentibus  $\frac{2}{3} v^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{2}} y$ ,  $\frac{4}{3} v^{\frac{3}{2}} = ayy$ ,  $v^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4} ayy$ , æquatio ad parabolam secundi generis, cujus est latus rectum  $\frac{2}{3} \frac{a}{4}$ , abscissa  $v$ , & ordinatim applicata  $y$ .

Sed quoniam in illâ parabolâ, positâ  $y = 0$ , sit  $v = 0$ , adeoque  $x - a = v = 0$ , &  $x = a$ , patet corpus de altitudine  $a$  cadere debere antequam in parabola descendat, capiendamque esse  $SD = v$ , ut tempus per arcum  $ST$  sit proportionale altitudini  $v + a$ , seu  $x$ .

(m) \*  $AP$  vestigium &c. Si corpus in superficie quâcunque curvâ moveatur, suoque motu curvam describat quæ in plano posita non sit, ad planum est referenda, idque fit si in superficie curvâ aliquod fingatur planum ad quod ex singulis curvæ descriptæ punctis erigantur perpendiculares, quarum extremitates aliam in plano lineam describent, hæc linea primæ vestigium seu linea projectionis dicitur.

proportionalis;  $TM$  re-  
cta ad superficiem cur-  
vam perpendicularis;  $TI$ ;  
pars ejus vi preffionis,  
quâ corpus urget super-  
ficiem vicissimque urge-  
tur versus  $M$  à superfi-  
cie, proportionalis;  $PTF$   
recta axi parallela per  
corpus transiens, &  $GF$ ,  
 $IH$  rectæ à punctis  $G$  &  
 $I$  in parallelam illam  
 $PHTF$  perpendiculari-  
ter demissæ. Dico jam,  
quod area  $AOP$ , radio  
 $OP$  ab initio motus de-  
scripta, sit tempori pro-  
portionalis. Nam vis



$TG$  (per legem corol. 2.) resolvitur in vires  $TF$ ,  $FG$ ; & vis  $TI$   
in vires  $TH$ ,  $HI$ : Vires autem  $TF$ ,  $TH$  agendo secundum lineam  
 $PF$  plano  $AOP$  perpendicularem mutant solummodo motum cor-  
poris quatenus huic plano perpendicularem. Ideoque motus ejus  
quatenus secundum positionem plani factus; hoc est, motus  
puncti  $P$ , quo trajectory vestigium  $AP$  in hoc plano descri-  
bitur, idem est ac si vires  $TF$ ,  $TH$  tollerentur, & corpus so-  
lis viribus  $FG$ ,  $HI$  ageretur; hoc est, idem ac si corpus  
in plano  $AOP$ , vi (<sup>n</sup>) centripetâ ad centrum  $O$  tendente &  
summam virium  $FG$  &  $HI$  æquante, describeret curvam  $AP$ .  
Sed vi tali describitur area  $AOP$  (per prop. 1.) tempori pro-  
portionalis. Q. E. D.

Corol. Eodem argumento si corpus, à viribus agitatum ad  
centra duo vel plura in eâdem quâvis rectâ  $CO$  datâ tendenti-  
bus, describeret in spatio libero lineam quamcunque curvam  
 $ST$ ; foret area  $AOP$  tempori semper proportionalis.

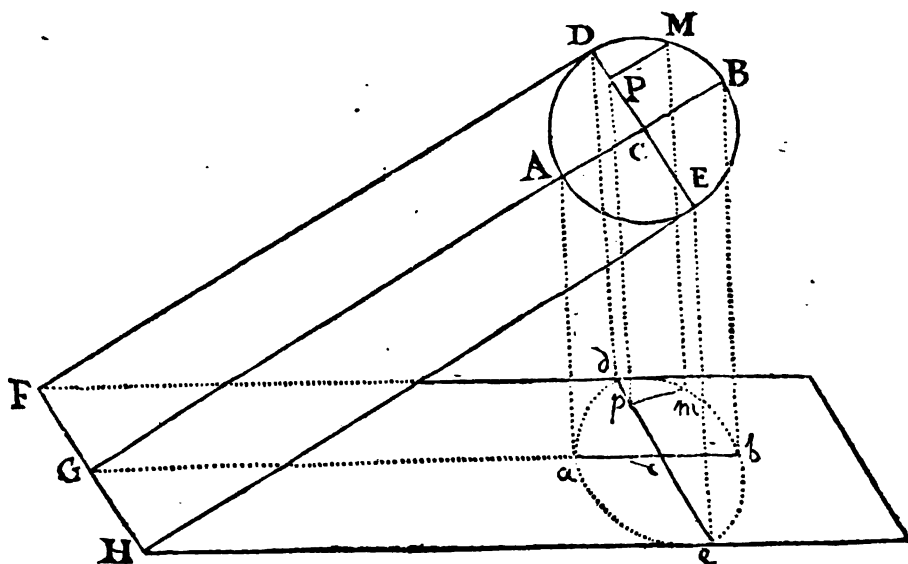
(n) \* Vi centripetâ ad centrum  $O$  &c.  
Nam curva superficies  $BSKL$  genita sup-  
ponitur revolutione curvæ lineæ  $BSK$   
circa axem suum  $OC$ , unde sequitur li-  
Tom. I.

neas omnes  $PO$ ,  $HI$ ,  $TM$ ,  $FG$ ,  $PF$ ,  
 $CO$  esse in eodem plano, atque ideò  
vim centripetam agentem in plano illo  
ad centrum  $O$  juxta lineam  $PO$  dirigi.

D d d

480:

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LV.  
THEOR.  
XIX.



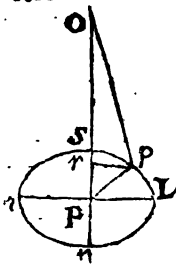
480. *Lem.* Si linea recta  $AB$  projiciatur in planum  $FHebd$ , projectio est linea recta  $ab$ , quæ est ad lineam  $AB$ , ut cosinus anguli inclinationis  $BGb$ , ad sinum totum. Nam si ex punctis  $A, B$ , demittantur ad planum  $FHebd$ , perpendiculara duo  $Aa, Bb$ , patet planum  $aAbb$ , esse ad planum  $FHebd$  normale, adeoque perpendiculara omnia ex singulis lineæ  $AB$  punctis demissa, cadere in lineam rectam  $ab$ , quæ est communis interfectio planorum  $FHebd$ ,  $aAbb$ . Q. E. 1<sup>um</sup>. Porro productis  $BA, ba$  ut sibi occurrant in  $G$ , ob parallelas  $Aa, Bb$ , erit  $ab$  ad  $AB$ , ut  $Gb$  ad  $GB$ , id est, ut sinus anguli  $BGb$  five Cosinus anguli inclinationis  $BGb$ , ad sinum totum. Q. E. 2<sup>um</sup>.

481. *Coroll.* Si linea projicienda, plano in quod projicitur parallela fuerit projectio erit linea recta lineæ projiciendæ æqualis & parallela; Nam in hoc casu angulus inclinationis nullus est, & ejus cosinus fit radius. Hinc si linea  $ED$ , ad rectam  $AB$  perpendicularis, fuerit plano  $FHebd$ , parallela, projectio illius  $ed$ , erit ipsi  $ED$  æqualis.

482. *Lem.* Iisdem positis, si in plano  $DFHEBA$ , centro  $C$ , radio  $CD$ , describatur circulus  $DAEB$ , illius in planum  $FHebd$  projectio  $daeb$ , erit el-

lipis cujus major axis  $de$  æqualis erit diametro circuli  $DE$ , & ad minorem axem  $ab$ , rationem habebit sinus totius ad cosinum anguli  $BGb$ , inclinationis planorum. Agatur enim  $PM$  ordinatim ad diametrum circuli  $DE$ , & projiciatur in rectam  $Pm$ , erit  $dp = DP$ , &  $pe = PE$  (481.) atque  $pm$  ad  $PM$ , ut sinus anguli  $PMm$ , seu anguli  $ABb$ , ad sinum totum (480) hoc est, ut  $ab$ , ad  $AB$  seu  $de$ , adeoque  $pm^2 : PM^2 = ab^2 : de^2$ , sed ex naturâ circuli  $PM^2 = DP \times PE = dp \times pe$ , Ergo  $pm^2 : dp \times pe = ab^2 : de^2$ . Est igitur  $aebd$ , ellipsis. Cætera patent per Lemma superius & ejus coroll.

483. *Lem.* Sint ellipses datæ  $LSmn$  axes  $Lm, Sn$ , centrum  $P, O$  punctum in axe  $nS$  producto datum,  $p$  punctum perimetri non datum. Datâ areâ trianguli  $OpP$ , dabitur perpendicularum  $pr$ , ex puncto  $p$ , ad trianguli basim datam  $PO$  demissum & hinc ex naturâ ellipses dabitur  $rP$ , atque ob angulum rectum ad  $r$ , dabitur  $Pp$ , & inde punctum  $p$  in perimetro cum angulo  $OpP$ , & positione rectæ  $Op$ .







DE MO-  
TU COR-PORUM  
LIBER

PRIMUS.

P R O P.

L V I.

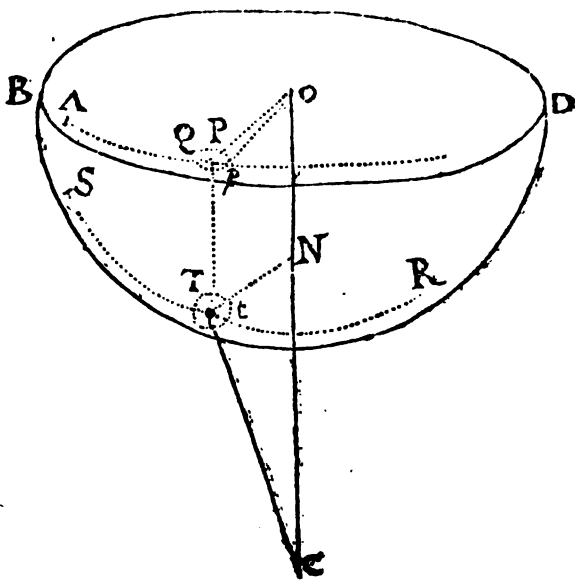
PROBL.

XXXVII.

## PROPOSITIO LVI. PROBLEMA XXXVII.

*Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, datisque tum lege vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum superficie curvâ cujus axis per centrum illud tranfit; invenienda est trajectoria quam corpus in eâdem superficie describet, de loco dato, datâ, cum velocitate, versus plagam in superficie illâ datam egressum.*

Stantibus quæ in superiore propositione constructa sunt, exeat corpus  $T$  de loco dato  $S$  secundum rectam positione datam in trajectoriam inveniendam  $STR$ , cujus vestigium in plano  $BDO$  sit  $AP$ . Et ex datâ corporis velocitate in altitudine  $SC$ , ( $^{\circ}$ ) dabitur ejus velocitas in aliâ quâvis altitudine  $TC$ . Eâ cum velocitate dato tempore quam minimo describat corpus trajectoriæ suæ particulam  $Tt$ , sitque  $Pp$  vestigium ejus in plano  $AOP$  descriptum. Jungatur  $Op$ , & circelli centro  $T$  intervallo  $Tt$  in superficie curva descripti vestigium in plano  $AOP$  fit ellipsis  $pQ$ . Et



ob

( $^{\circ}$ ) \* Dabitur ejus velocitas in aliâ  $TC$ . Nam (per prop. 40.) velocitas corporis in altitudine  $TC$ , æqualis est velocitati quam corpus haberet ad eandem altitudinem in lineâ rectâ  $SC$ , si de loco  $S$ , rectâ fuisset versus  $C$  projectum cum eadem velocitate quâ trajectoriam  $STR$  incipit describere in  $S$ , sed datâ in lo-

co  $S$  velocitate corporis per lineam  $SC$  versus centrum  $C$  projecti, datur illius velocitas in alio quovis loco lineæ  $SC$ , (per cor. 2. prop. 39.). Ergo ex datâ corporis velocitate in altitudine  $SC$ , dabitur ejus velocitas in aliâ quâvis altitudine  $TC$ .

(p) ob datum magnitudine circellum  $Tt$ , datamque ejus ab axe  $CO$  distantiam  $TN$  vel  $PO$ , dabitur ellipsis illa  $pQ$  specie & magnitudine, ut & positione ad rectam  $PO$ . Cumque (q) area  $POp$  sit tempori proportionalis, atque ideo ex dato tempore detur, dabitur angulus  $POp$ . Et inde dabitur ellipseos & rectæ  $Op$  intersectio communis  $p$ , unà cum angulo  $OPp$  in quo trajectoryæ vestigium  $APp$  secat lineam  $OP$ . (r) Inde verò (conferendo (*prop.* xli. cum *corol.* suo 2.) ratio determinandi curvam  $APp$  facile apparet. Tum eu singulis vestigiis punctis  $P$ , erigendo ad planum  $AOP$  perpendiculara  $PT$  superfici ei curvæ occurrentia in  $T$ , dabuntur singula trajectoryæ puncta  $T$ . Q.E.I.

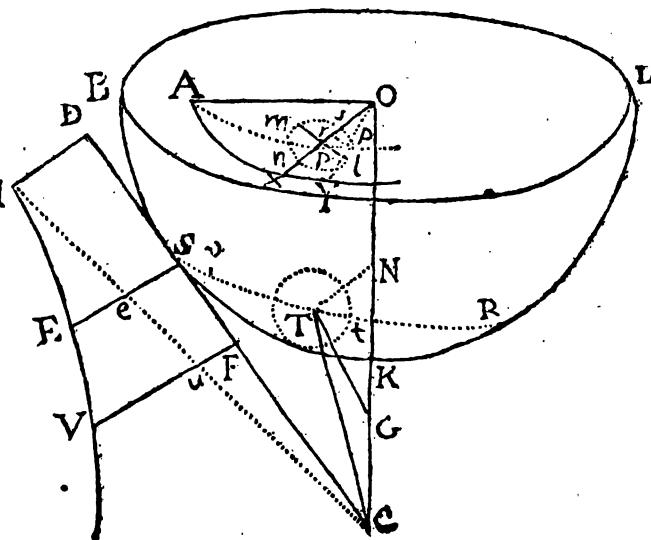
DE MATH.  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROB-  
LVL  
PROBL.  
XXXVII

(p) \* Erob datum magnitudine circellum &c. Nam datis velocitate & tempore quibus uniformiter describitur spatium nascens  $Tt$ , datur spatium illud  $Tt$ , seu radius circelli (5). Præterea datâ altitudine  $TC$ , datur tum planum ad axem  $CO$  perpendicularare in quo circelli centrum positum est, tum angulus inclinationis plani quod in puncto  $T$  curvam superficiem  $BSTD$  tangit (484) ad planum  $BODP$ , adeoque datur angulus inclinationis plani in quo est circellus nas-

cens ad planum  $BODP$  (485), unde (482. 486.) ellipsis  $Ppq$ , in quam circellus projicitur, dabitur specie & magnitudine ut & positione ad rectam  $PO$ .

(q) \* Cumque area  $POp$ , sit temporis quo describitur proportionalis (*prop.* 55.) eodemque tempore quo circelli radius  $Tt$  describitur, ex hoc tempore dato datur, atque adeo dabitur angulus  $POp$ , & inde dabitur ellipseos & rectæ  $Op$  intersectio communis  $p$ , unà cum angulo  $OPp$  (483).

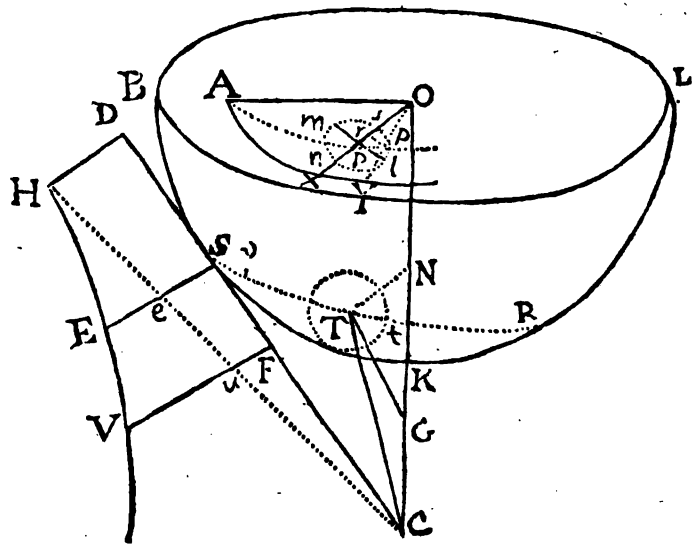
(r) 487. Inde verò &c. Sit  $D$  locus in rectâ  $CS$  productâ, de quo corpus vi centripetâ ad  $C$  tendente cadendo acquirit in loco  $S$  velocitatem cum quâ trajectoryam  $STR$  incipit describere. In linea  $CS$ , capiatur  $CF=CT$ , & per puncta  $F$ ,  $S$ ,  $H$ ,  $D$ , erigantur ad  $CD$  perpendiculara  $FV$ ,  $SE$ ,  $DH$  vi centripetæ in illis locis proportionalia, sitque  $HEV$  linea quam punctum  $V$  perpetuò tangit. Per punctum  $T$ , agatur  $TG$ , quæ curvam cujus revolutione describitur superficies  $BSTKL$ , tangat in  $T$ ; sitque eadem  $TG$  in curvæ illius plano, & producta, axi  $OC$  occurrat in  $G$ , velocitates in locis  $S$ , &  $T$ , seu  $F$ , erunt ut  $\sqrt{DHES}$ , &c.  $\sqrt{DHVF}$ . (Et 1<sup>a</sup> partem



De d 3

prop.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LVI.  
PROBL.  
XXXVII.



prop. 39.) Et quoniam area  $POp$ ; seu  $PO \times pr$  est ut tempus quo describitur

$T$  five  $Pl$ , erit  $Pl$ , ut  $PO \times pr \sqrt{DHVF}$  hoc est, spatium uniformiter descriptum ut velocitas & tempus conjunctim (5). Quare si detur quantitas  $B$  erit  $Pl = B \times PO \times pr \times \sqrt{DHVF}$ . Est autem  $Pl$  semiaxis transversus ellipseos ad  $P$  s semiaxem conjugatum ut  $TH$  ad  $TN$  seu  $PO$  (486) quare erit  $Ps = \frac{B \times PO^2 \times pr \times \sqrt{DHVF}}{TG}$ ;

sed ex natura ellipseos  $Pl^2 : Ps^2 (= TG^2 : PO^2) = pr^2 : nr \times rs$  seu  $Ps^2 = Pr^2$ , atque adeò  $PO^2 \times pr^2 = TG^2 \times Ps^2 = TG^2 \times Pr^2$ ;

& hinc  $Pr^2 = Ps^2 = \frac{PO^2 \times pr^2}{TG^2} = \frac{B^2 \times PO^4 \times pr^2 \times DHVF - PO^2 \times pr^2}{TG^2}$ , proinde

que  $Pr = \frac{PO \times pr \times \sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}{TG}$ , &  $pr = \frac{TG \times Pr}{PO \sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$ . Quare

$PO \times pr = PO_p = \frac{TG \times Pr}{\sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$ .

Centro  $O$  & radio  $OA$ , describatur circuli arcus  $AXY$ , & producantur  $OP$ ,

$Op$ ; ut arcui huic occurrant in  $X$  &  $Y$ ; erit  $PO : OX$  seu  $AO = pr : XY = \frac{AO \times pr}{PO}$ ;

& hinc area  $OPY$  (five  $\frac{AO \times XY}{2}$ ) =  $\frac{AO^2 \times pr}{2PO} = \frac{AO^2 \times TG \times Pr}{2PO^2 \sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$ .

Itaque si in recta  $dc$ , ad  $AO$  perpendiculari capiantur  $db = \frac{TG}{2\sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$

&  $dc = \frac{AO^2 \times TG}{2PO^2 \sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$ ;

& describantur lineæ curvæ  $abz$ ,  $acx$ , quas puncta  $b$ ,  $c$ , perpetuò tangunt, deque puncto  $A$ , ad lineam  $AO$ , erigatur perpendicularum  $Aa$ , ponendo  $dO = PO$ , patet fore areas  $Aab$ ,  $Aac$ , arcis  $AP$ ,  $AX$ ,  $O$ , æquales & c., (ut in prop. 41.)

488. Quantitas constans  $B$ , quam in superioribus æquationibus usurpavimus, facile determinatur. Nam datâ directione corporis trajectorym  $STR$ , (vid. fig. not. 487.) describere incipientis, datur illius projectio  $AQ$ , quæ ut patet, est tangens vestigii  $AP$  in  $A$ , quâ vestigium  $AP$  incipit describi; projecto in tangen-



DEMO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER & O X Y =

$$\frac{p^2 x dx \sqrt{4 b x x + b l l}}{\sqrt{2 q l l b b x x^2 - 2 q x^6 - 2 q l l x^4 - 4 q a l x^4 - 2 q l a^2 x^2 - 4 b l^2 p^4}}$$

PRIMUMUS. Si igitur ordinatæ d b, d c, dicantur y, z, æquationes ad curvas a b, a c, vid. fig.

PROB. 2. nos. 487. ) erunt

LVI.

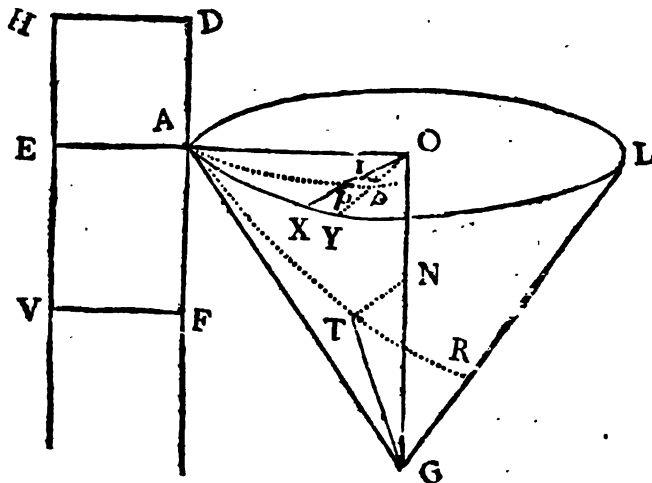
$$\frac{4 b p^4 x^4 + b p^4 l l x x}{2 q l^2 b^2 x^2 - 2 q x^6 - 2 q l l x^4 - 4 q a l x^4 - 2 q l a^2 x^2 - 4 b l^2 p^4}$$

PROBL. y y =

$$\frac{4 b p^4 x^4 + b p^4 l l x x}{2 q l l b b x^4 - 2 q x^6 - 2 q l l x^4 - 4 q a l x^6 - 2 q l^2 a^2 x^4 - 4 b l^2 p^4 x^2}$$

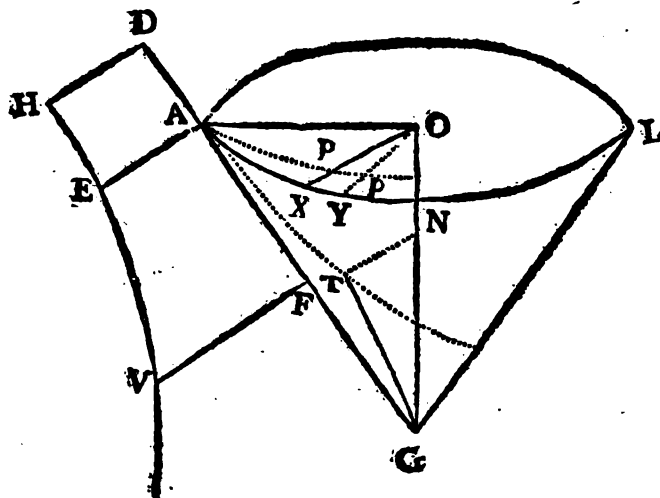
XXXVII.

$$\& z z = \frac{4 b p^4 x^4 + b p^4 l l x x}{2 q l l b b x^4 - 2 q x^6 - 2 q l l x^4 - 4 q a l x^6 - 2 q l^2 a^2 x^4 - 4 b l^2 p^4 x^2}$$



490. Exemplum 2. Sit A T G L, superficies conici recti cujus vertex G, axis G O, basis A X L O, & corpus de loco A egressum moveatur in trajectory A T R, vis centripeta constans sit & juxta directionem axi O G parallelam semper agat, illamque in locis D, A, F, seu T, exponat rectæ D Q, A E, F V æquales & ad rectam DF axi parallelam perpendicularares, erit punctum V in lineâ rectâ H E V, ipsi D F parallelâ. Sit D locus de quo corpus cadere debet ut habeat in loco A velocitatem cum quâ trajectory A T R incipit describere, & ex puncto T, ducatur T G, superficiem conicam tangens in T, & T N = O P ad axem G O perpendicularis. Sit H D = a, D A = b, O G = e, A G = f, A O = r, P O = T N = x, p r = d x, erit (ex naturâ conici) A O (r): A G (f) = T N (x): T G, ( $\frac{f x}{r}$ ). Et A O

(r): O G (e) = T N (x): N G ( $\frac{e x}{r}$ ). Unde  
 de O N = O G - G N =  $\frac{e r - e x}{r}$ , & D F  
 = D A + O N =  $\frac{r b + e r - e x}{r} = \frac{h r - e x}{r}$   
 ponendo b + e = h. Quare area D H E A  
 = a b, & D H V F =  $\frac{r h a - a e x}{r}$ . Et hinc per  
 formulas (488) O P p =  $\frac{C f x dx \sqrt{a b}}{2 r \sqrt{h a x - q x^2 - C C a b}}$ ,  
 ponendo  $\frac{a e}{r} = q$ , & O X Y =  
 $\frac{C r f dx \sqrt{a b}}{2 x \sqrt{h a x - q x^2 - C C a b}}$ , unde sci-  
 ciliè inveniuntur æquationes ad curvas A B,  
 A C, at in exemplo 1<sup>o</sup>.



491. *Exemplum 3um.* Tendat vis centripeta ad con. verticem G, & in triplicatâ ratione distantiarum ab illo puncto G decreſcat, ſitque H E V curva ad quam terminantur perpendiculara DH, AE, FV vim centripetam in locis ſingulis D, A, F, vel T, exhibentia, cætera verò maneant ut in exemplo ſuperiori. Quoniam

$$TG = \frac{f x}{r} \text{ erit vis centripeta in loco T}$$

$$\text{vel F ut } \frac{r^2}{f x}, \text{ adeoque ſi fuerit } \pi$$

quantitas data, vis centripeta ſupponi poterit  $= \frac{n^4}{x^3}$ . Sit DG = m, erit (431)

$$\text{area DHVF} = \frac{n^4(mm - xx)}{m m x x} = \frac{k k m m - k k x x}{x x},$$

$$\text{ponendo } \frac{n^4}{m m} = k k. \text{ Quare ſi dicatur area}$$

$$DHEA = p p, \text{ erit } P O p = \frac{C p f x d x}{2 r \sqrt{k k m m - k k x x - 4 p p}}$$

$$= \frac{q x d x}{\sqrt{h h - x x}} \text{ ponendo } k k m m - C C p p = k k h h, \&$$

$$\frac{C p f}{2 r k} = q. \text{ Similiter invenietur } O X Y =$$

$$\frac{r r q d x}{\sqrt{h h - x x}}. \text{ Quoniam autem creſcen-}$$

Tom. I.

tibus arcibus APO, AXO, decreſcit PO; ſeu x, ſcribendum eſt  $O P p = \frac{-q x d x}{\sqrt{h h - x x}}$

$$\& O X Y = \frac{-r r q d x}{x \sqrt{h h - x x}}. \text{ Fiat } \sqrt{h h - x x}$$

= z, & erit  $h h - x x = z z$  &  $-x d x = z d z$ , & P O p = q d x, ſumptiſque fluentibus &

additâ conſtanti Q, erit APO = q z + Q = q  $\sqrt{h h - x x}$  + Q. Porro area APO

evaneſcit ubi PO, ſcilicet A O = r, quare 0 = q  $\sqrt{h h - r r}$  + Q, & hinc Q =

$$-q \sqrt{h h - r r}, \text{ proindeque A P O} =$$

$$q \sqrt{h h - x x} - q \sqrt{h h - r r}. \text{ Et dato igitur}$$

tempore quo corpus deſcribit AT, geometricè invenitur longitudo lineæ P O. Ponatur

$$\text{nunc } x = \frac{h k}{y} \& \text{ erit } -d x = \frac{h h d y}{y^2}, \text{ h h - x x}$$

$$= h h y y - h^4, \sqrt{h h - x x} = \frac{h \sqrt{y^2 - h^2}}{y^2},$$

$$\text{atque adeò } O X Y = \frac{-r r q d x}{x \sqrt{h h - x x}} = \frac{r r q d y}{h \sqrt{y^2 - h^2}}.$$

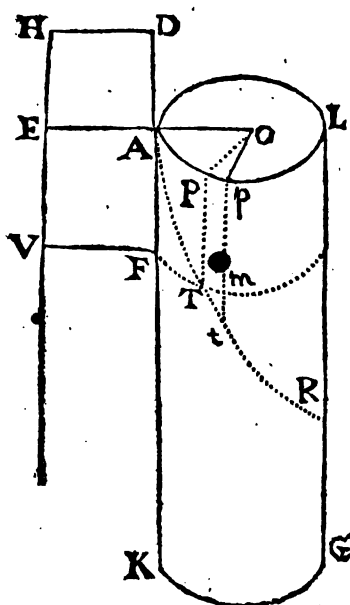
$$\text{Sit } \frac{r r q}{h h} = \frac{1}{2} s, \& \text{ erit } O X Y = \frac{1}{2} \frac{s h d y}{\sqrt{y y - h h}}.$$

Undè habetur conſtructio ſequens.

E e e

Con-





$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{ab + ay}}, \text{ \& } \frac{dx^2}{cc} = \frac{dx^2 + dy^2}{ab + ay}, \text{ \& } \\ abdx^2 + aydx^2 - cc dx^2 = cc dy^2, \\ \text{ \& } dx = \frac{cdy}{\sqrt{ab - cc + ay} \sqrt{aq + ay}}, \\ \text{ponendo } ab - cc = aq. \text{ fiat jam } \sqrt{aq + ay} \\ = z, q + y = zz, dy = z dz, \sqrt{aq + ay}$$

$= z \sqrt{a}$  erit  $dx = \frac{z c z dz}{z \sqrt{a}} = \frac{z c}{\sqrt{a}} \times dz$ , DE MO-  
 & sumptis fluentibus addita constanti Q, TU COR-  
 erit  $x = \frac{z c z}{\sqrt{a}} + Q = \frac{z c \sqrt{q + y}}{\sqrt{a}} + Q$ , LIBER  
 Ponatur  $y = 0$ , erit etiam  $x = 0$ , adeoque PRIMUS.  
 $0 = \frac{z c \sqrt{q}}{a} + Q$ , &  $Q = -\sqrt{\frac{4ccq}{a}}$ , LVI.  
 unde  $x = \sqrt{\frac{4ccq + 4ccy}{a}} - \sqrt{\frac{4ccq}{a}}$ , PROBL. XXXVII.

Sit  $\frac{4cc}{a} = p$ , &  $\frac{4ccq}{a} = nn$ , erit  $x =$   
 $\sqrt{nn + py} - n$ ,  $xx + 2nx = py$ ,  $y =$   
 $\frac{xx + 2nx}{p}$ . Concessa igitur quadratura

circuli facile invenitur trajectoria ATR  
 punctum quodvis T capiendū perpendicu-  
 lum PT ad arcum AP, ut est AP + 2nad  
 p. Ex tempore autem dato datur arcus  
 AP. Si corporis de loco A egredien-  
 tis velocitas eadem sit ac velocitas puncti  
 P in plano baseos APLO revolventis  
 erit  $cc = ab$ , & quoniam supposuimus  
 $ab - cc = aq$ , esset  $q = 0$ , & proinde  $nn =$   
 $\frac{4ccq}{a} = 0$ , atque hinc  $y = \frac{xx}{q}$ , seu  $p : x$   
 $= x : y$ . Sive scribendo loco p ejus valo-  
 rem  $\frac{4cc}{a}$ , in quo loco  $cc$  ponatur  $ab$ ,  
 erit  $4b : x = x : y$ , hoc est, 4DA ad ar-  
 cum AP ut is AP ad PT.



## S E C T I O X I.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.LIBER  
PRIMUS.

P R O P.

L V I I.

THEOR.

X X.

*De motu corporum viribus centripetis se mutuo petentium.*

Hactenus exposui motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum naturâ. Attractiones enim fieri solent ad corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones semper mutuæ sunt & æquales, per legem tertiam: adeo ut neque attrahens possit quiescere neque attractum, si duo sint corpora, sed (1) ambo (per legum corollarium quartum) quasi attractione mutuâ, circum gravitatis centrum commune revolvantur: & si plura sint corpora, quæ vel ab unico attrahantur, & idem attrahant, vel omnia se mutuo attrahant; hæc ita inter se moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quiescat, vel uniformiter moveatur in directum. Quâ de causâ jam pergo motum exponere corporum se mutuo trahentium, considerando vires centripetas tanquam attractiones, quamvis fortasse, si physicè loquamur, verius dicantur impulsus. In mathematicis enim jam versamur; & propterea, missis disputationibus physicis, familiari utimur sermone, quo possimus a lectoribus mathematicis facilius intelligi.

## PROPOSITIO LVII. THEOREMA XX.

*Corpora (1) duo se invicem trahentia describunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum se mutuo, figuras similes.*

Sunt (2) enim distantiae corporum à communi gravitatis centro

(1) \* Sed ambo (per leg. corol. 4.) quasi attractione mutuâ vel ad se invicem rectâ lineâ serantur, vel, si ambo vi impressâ obliquè projiciuntur, circum gravitatis centrum commune quiescens aut uniformiter progrediens revolvantur.

(2) \* Corpora duo. Si corpora duo S, P se invicem trahentia revolvantur circa commune gravitatis centrum C, peragendo de S. ad T. & de P. ad Q. similes

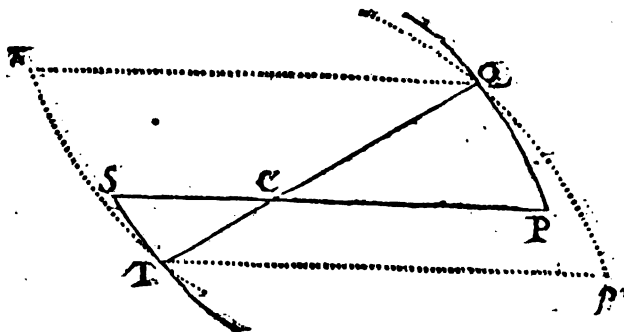
sunt hæc figuræ quatuor, nimirum PQC, STC, quas corpora S & T circa commune gravitatis centrum C describunt, tum figura PQT quam corpus P describit circa corpus S spectatum tanquam immotum, & figura TQ, quam S circa P similiter spectatum describit.

(u) \* Sunt enim distantie corporum à communi gravitatis centro QC, CT recte proportionales corporibus datis P, S

(p. 20)

tro reciprocè proportionales corporibus, atque ideo in datâ ratione ad invicem, & componendo in datâ ratione ad distantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ distantix circum terminum suum communem æquali motu angulari, propterea quod in directum semper jacentes non mutant inclinationem ad se mutuò. Lineæ autem rectæ, quæ sunt in datâ ratione ad invicem, &

DE M<sup>o</sup>  
TU COL  
PORUM.  
LIBER I  
PRIMUS.  
PROP.  
LVII.  
THEOR.  
X X.



(60) *aque idēd in datā ratione ad invicem, & componendo, QC est ad QT in datā ratione corporis S ad summam corporum S + P. Peruntur autem distantia. QC, TC, circa centrum C terminum suum commune aequali motu angulari, id est, angulus QCP est semper æqualis angulo TCS propterea quod distantia QC, TC in directum semper jacent (60.) Quare (112) duæ figuræ PQC, S+TC similes sunt. Quod erat primum.*

Agatur per T recta Tp lineæ SP æqua-  
lis & parallela, & si corpus Stanquam im-  
motum spectetur, motus corporis P quod-  
is Q pervenit idem erit respectu corpo-  
ris S seu T, ac si corpus P de loco p trans-  
latum esset in locum Q; eritque QT ad  
Tp seu SP, ut QC ad CP, & angulus  
QTp = QCP unde figura P Q circa pun-  
ctum S ut immotum spectatur a corpore  
P descripta erit similis figuræ PQC ideo-  
que & figuræ STC, simili ratiocinio of-  
tendetur figuram \* TQ circa punctum P  
immutam a corpore S descriptam, esse  
similem figuræ STC ideoque & figuræ  
EQC. Quod erat alterum.

Quod forte facilius adhuc intelligitur si ponamus in corpore S spectatorem quise & lineam S P tanquam immota habeat, in hac enim hypothesi, ubi corpus S pervenerit in locum T, linea S P, quæ tanquam immota spectatur erit T p ipsi S P æqualis & parallela & spectator in T locatus motum corporis P videbit sub angulo Q T p = Q C P, & ad distantiam T Q. Cum igitur sit semper Q C ad C P, ut Q T ad S P, seu T p, & angulus Q C P æqualis angulo Q T p, figura p Q T, similis erit figuræ P Q C, adeoque & figuræ S T C. Pariter si per Q agatur Q p æqualis & parallela P S liquet figuram p T Q quam S circa P spectatum tanquam immotum describit esse similem & æqualem figuræ p Q T quam corpus P, circa S spectatum tanquam immotum describit. Patet etiam harum omnium figurarum partes similes eodem tempore describi, ideoque etiam totas figuras æqualibus temporibus percurri.

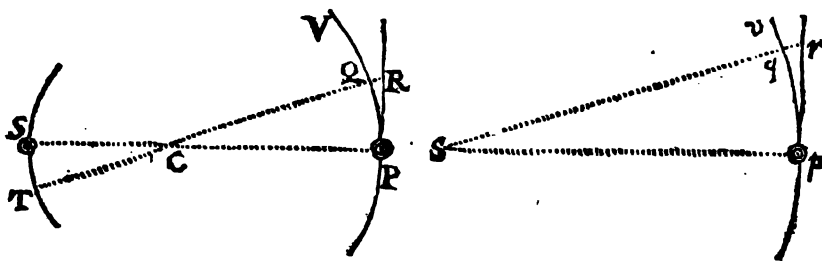
DE Mo-æquali motu angulari circum terminos suos feruntur, figuras cir-  
 TU COR- cum eisdem terminos in planis, quæ unà cum his terminis vel  
 PORUM. quiescunt, vel (a) motu quovis non angulari moventur, de-  
 LIBER scribunt omninè similes. Proinde similes sunt figuræ, quæ his  
 PRIMUS. distantis circumactis describuntur. Q. E. D.  
 PROP.

L VIII.  
 THEOR.  
 XXI.

## PROPOSITIO LVIII. THEOREMA XXI.

*Si corpora duo viribus quibuscumque se mutuo trahunt, & interea re-  
 volvantur circa gravitatis centrum commune: dico quod figuris,  
 quas corpora sic mota describunt circum se mutuò, potest figura  
 similis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus  
 iisdem describi.*

Revolvantur corpora  $S$ ,  $P$  circa commune gravitatis cen-  
 trum  $C$ , pergendo de  $S$  ad  $T$ , deque  $P$  ad  $Q$ . A da-  
 to puncto  $s$  ipsis  $SP$ ,  $TQ$  æquales & parallelæ ducantur



semper  $s p$ ,  $s q$ ; & curva  $p q v$ , quam punctum  $p$  revolen-  
 do circum punctum immotum  $s$  describit, (b) erit similis &  
 æqualis curvis, quas corpora  $S$ ,  $P$  describunt circum se mutuò:  
 proindeque (per theor. xx.) similis curvis  $ST$  &  $PQV$ , quas  
 eadem corpora describunt circum commune gravitatis centrum  
 $C$ : idque quia proportionibus linearum  $SC$ ,  $CP$ , &  $SP$  vel  $s p$   
 ad invicem dantur.

Caf.

(a) \* Motus quovis non angulari. Vi-  
 de Legum coroll. 5. & 6.]

(b) \* Erit similis & æqualis curvis;  
 ut patet ex demonstratione propositionis  
 superioris.

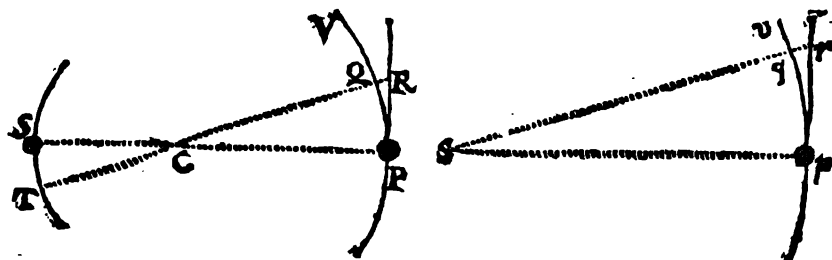
*Cas. 1.* Commune illud gravitatis centrum  $C$ , per legum co-  
rollarium quartum, vel quiescit, vel movetur uniformiter in di-  
rectum. Ponamus primo, quod id quiescit, inque  $s$  &  $p$  locen-  
tur corpora duo, immobile in  $s$ , mobile in  $p$ , corporibus  $S$  &  $P$  similia & æqualia. Dein tangant rectæ  $PR$  &  $pr$  curvas  $PQ$  &  $pq$  in  $P$  &  $p$ , & producantur  $CQ$  &  $cq$  ad  $R$  &  $r$ .  
Et ob similitudinem figurarum  $CPRQ$ ,  $spqr$  erit  $RQ$  ad  $rq$  ut  $CP$  ad  $sp$ , ideoque in datâ ratione. Proinde si vis, quâ corpus  $P$  versus corpus  $S$ , atque ideo versus centrum intermedium  $C$  attrahitur, esset ad vim, quâ corpus  $p$  versus centrum  $s$  attrahitur, in eâdem illâ ratione datâ; hæ vires æqualibus temporibus attraherent semper corpora de tangentibus  $PR$ ,  $pr$  ad arcus  $PQ$ ,  $pq$  per intervalla ipsis proportionalia  $RQ$ ,  $rq$ , ideoque vis posterior efficeret, ut corpus  $p$  gyraretur in curvâ  $pqv$ , quæ similis esset curvæ  $PQV$ , in quâ vis prior efficit, ut corpus  $P$  gyretur; & revolutiones iisdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non sunt ad invicem in ratione  $CP$  ad  $sp$ , sed (ob similitudinem & æqualitatem corporum  $S$  &  $s$ ,  $P$  &  $p$ , & æqualitatem distantiarum  $SP$ ,  $sp$ ) sibi mutuò æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus: & propterea, ut corpus posterius  $p$  trahatur per intervallum majus  $rq$ , requiritur tempus majus, (c) idque in subduplicatâ ratione intervallorum; propterea quod (per lemma decimum) spatia ipso motus initio descripta sunt in duplicatâ ratione temporum. Ponatur igitur ve-

loci

(c) Idque in subduplicatâ ratione intervallorum. Naïcentibus arcibus  $Pq$ ,  $PQ$  tempora quibus describuntur intervalla  $rq$ ,  $RQ$  sunt in subduplicatâ ratione eorundem intervallorum, per Lem. X. Quare si velocitates uniformes quibus similes arcus naïcentes  $pq$ ,  $PQ$  æqualibus viribus centripetis describuntur, dicantur  $V$ ,  $v$ , tempora  $T$ ,  $t$ , erit  $T^2 : t^2 = rq : RQ = sp : CP = pq : PQ$ , est verò (s)  $V : v = \frac{pq}{T} : \frac{PQ}{t}$  sive ut  $\frac{T^2}{t^2} : \frac{t^2}{T^2}$ , adeoque  $V : v = T : t = \sqrt{sp} : \sqrt{CR}$ . Itaque con-

pora  $P$ ,  $p$ , viribus æqualibus semper attractâ, circum centra quiescentia  $C$ ,  $s$ , naïcentes figuras similes  $PQ$ ,  $pq$ , adeoque & figuras quavis similes  $PQV$ ,  $pqv$ , describent temporibus & velocitatibus quæ erunt in subduplicatâ ratione distantiarum similium  $CP$ ,  $sp$ . Est autem (ex Dem.) figura  $pqv$ , similis & æqualis figuræ quam corpus  $P$ , circum corpus mobile  $S$ , (spectatum tanquam immotum, ut in propositione superiori exposuimus) describit eodem tempore, quo circa centrum  $C$ , describit figuram similem  $PQV$ .

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LVIII.  
THEOR  
XXI.



locitas corporis  $p$  esse ad velocitatem corporis  $P$  in subduplicatâ ratione distantiae  $sp$  ad distantiam  $CP$ , eo ut temporibus, quæ sint in eâdem subduplicatâ ratione, describantur arcus  $pq$ ,  $PQ$ , qui sunt in ratione integrâ: Et corpora  $P, p$  viribus æqualibus semper attracta describent circum centra quiescentia  $C$  &  $s$  figuras similes  $PQV$ ,  $pqv$ , quarum posterior  $pqv$  similis est & æqualis figuræ, quam corpus  $P$  circum corpus mobile  $S$  describit. *Q. E. D.*

*Cas. 2.* Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, unâ cum spatio in quo corpora moventur inter se, progreditur uniformiter in directum; & (per legum corollarium sextum) motus omnes in hoc spatio peragentur ut prius, ideoque corpora describent circum se mutuo figuras easdem ac prius, & propterea figuræ  $pqv$  similes & æquales. *Q. E. D.*

*Corol. 1.* Hinc corpora duo viribus distantiae suæ proportionalibus se mutuo trahentia, describunt (per prop. x.) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, ellipses concentricas; & vice versâ, si tales figuræ describuntur, sunt vires (d) distantiae proportionales.

*Corol. 2.* Et corpora duo, viribus quadrato distantiae suæ reciprocè proportionalibus, describunt (per prop. xi. xii. xiii.)

&c

(d) \* *Distantiæ proportionales.* Cum enim (ex Dem.) corpus  $p$ , circa  $s$ , & corpora duo  $P, S$ , circa commune gravitatis centrum  $C$ , & circum se mutuo

figuras similes vi centripetâ æquali describant, sique (per prop. X.) figura  $pqv$ , ellipsis cujus centrum  $S$ , liquet veritas corollarii.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 409

& circum commune gravitatis centrum , & circum se mutuo, sectiones conicas umbilicum habentes in centro , circum quod figuræ describuntur. Et vice versâ, si tales figuræ describuntur , vires centripetæ sunt quadrato distantiae reciprocè proportionales.

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia , radiis & ad centrum illud & ad se mutuò ductis , (e) describunt areas temporibus proportionales.

LIX. THEOR. XXII.

## PROPOSITIO LIX. THEOREMA XXII.

*Corporum duorum S & P , circa commune gravitatis centrum C revolvantium , tempus periodicum esse ad tempus periodicum corporis alterutrius P , circa alterum immotum S gyrantis , & figuris , quæ corpora circum se mutuo describunt , figuram similem & æqualem describentis , in subduplicatâ ratione corporis alterius S , ad summam corporum S + P.*

Namque , ex demonstratione superioris propositionis , tempora , quibus arcus quivis similes  $PQ$  &  $pq$  describuntur , sunt in subduplicatâ ratione distantiarum  $CP$  &  $SP$  vel  $sp$  , hoc est , in subduplicatâ ratione corporis S ad summam corporum  $S + P$ . Et componendo , summæ temporum quibus arcus omnes similes  $PQ$  &  $pq$  describuntur , hoc est , tempora tota , quibus figuræ totæ similes describuntur , sunt in eâdem subduplicatâ ratione. *Q. E. D.*

PRO-

(e) \* Describunt areas temporibus proportionales. Nam tempora quibus describuntur areæ quævis similes  $spq$  ,  $CPQ$  , &  $spu$  ,  $CPV$  , sunt semper in datâ ratione , nimirum , subduplicatâ distantiarum similium  $sp$  ,  $CP$  ( ex Dem. ) & proinde tempus quo describitur area  $spq$  , est ad tempus quo describitur area  $spu$  , ut tempus quo describitur area  $CPQ$  , ad tempus quo describitur area  $CPV$  ; sed ( per *Tem. I.*

*prop. 1.* ) tempora quibus describuntur areæ  $spq$  ;  $spu$  , sunt areis illis adeoque & areis similibus  $CPQ$  ,  $CPV$  proportionalia , ergo areæ  $CPQ$  ,  $CPV$  sunt ut tempora quibus describuntur ; & quoniam areæ quas corpora S , P circum centrum gravitatis describunt similes sunt areis quas iisdem temporibus describunt circum se mutuò , erunt quoque areæ istæ proportionales temporibus quibus describuntur. *F f f*

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

LIBER

PRIMUS.

PROP.

L X.

THEOR.

XXII.

# PROPOSITIO LX. THEOREMA XXIII.

*Si corpora duo S & P, viribus quadrato distantiae suae reciproce proportionalibus, se mutuo trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod ellipseos, quam corpus alterutrum P hoc motu circa alterum S describit, axis principalis erit ad axem principalem ellipseos, quam corpus idem P circa alterum quiescens S eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum S + P ad primum duorum mediè proportionalium inter hanc summam & corpus illud alterum S.*

(f) Nam si descriptæ ellipseos essent sibi invicem æquales, tempora periodica (per theorema superius) forent in subduplicatâ ratione corporis S ad summam corporum S + P. Minuatur in hâc ratione tempus periodicum in ellipsi posteriore, & tempora periodica evadent æqualia; ellipseos autem axis principalis (per prop. xv.) minuetur in ratione, cujus hæc est sesquuplicata, id est in ratione, cujus ratio S ad S + P est triplicata; ideoque erit ad axem principalem ellipseos alterius, ut primum duorum mediè proportionalium inter S + P & S ad S + P. Et inversè, axis principalis ellipseos circa corpus mobile descriptæ erit ad axem principalem descriptæ circa immobile, ut S + P ad primum duorum mediè proportionalium inter S + P & S. Q. E. D.

PRO-

(f)\* Nam si descriptæ ellipseos &c. Axis principalis ellipsium æqualium, quas corpora S, P circum se mutuo describunt (ut ad prop. 57. exposuimus) æqualis est axi principali ellipseos, p q u, quam corpus p vel P, circa corpus s vel S, reverâ immotum describit (ut in prop. 58. Hic axis dicatur A tempus periodicum quod in ellipsis quatuor quas corpora S, P circum C & circum se mutuo describunt (ut in prop. 57.) idem est, dicatur t, tempus periodicum in ellipsi p q u, quam corpus p, vel P, circa corpus S, vel s, reverâ immotum (ut in prop. 58.) de-

scribit dicatur T, sitque X axis principalis ellipseos quam corpus idem P, vel p, circa alterum S vel s reverâ immotum (ut in prop. 58.) describere posset tempore periodico t, erit (per prop. 59.)  $T^2 : t^2 = S + P : S$ . & (per prop. 15.)  $T^2 : t^2 = A : X$ , quare  $A : X = S + P : S$ . Jam si capiantur duæ quantitates B, C mediæ proportionales inter S + P & S, erit S + P ad S in ratione triplicatâ S + P, ad B, hoc est  $S + P : S = S + P : B$ , ac proinde  $A : X = S + P : B$ , ideoque  $A : X = S + P : B$ . Q. E. D.

PROPOSITIO LXI. THEOREMA XXIV.

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXI.  
THEOR.  
XXIV.

*Si corpora duo viribus quibuscvis se mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita, quomodocunque moveantur, motus eorum perinde se habebunt, ac si non traherent se mutuo, sed utrumque à corpore tertio in communi gravitatis centro constituto viribus iisdem traheretur: Et virium trahentium eadem erit lex respectu distantiae corporum à centro illo communi atque respectu distantiae totius inter corpora.*

Nam vires illæ, quibus corpora se mutuo trahunt, tendendo ad corpora, (g) tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium; ideoque eadem sunt, ac si à corpore intermedio manarent. Q. E. D.

Et quoniam [datur ratio distantiae corporis utriusvis à centro illo communi ad distantiam inter corpora, dabitur ratio cuiusvis potestatis distantiae unius ad eandem potestatem distantiae alterius; ut ratio quantitatis cuiusvis, quæ ex unâ distantia & quantitibus datis utcunque derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex alterâ distantia, & quantitibus totidem datis, datamque illam distantiarum rationem ad priores habentibus similiter derivatur. Proinde si vis, quâ corpus unum ab altero trahitur, sit directè vel inversè ut distantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus distantiae potestas; vel denique ut quantitas quævis ex hac distantia & quantitibus datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, quâ corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directè itidem vel inversè ut corporis attracti distantia à centro illo communi, vel ut eadem distantiae hujus potestas, vel denique ut quantitas ex hac distantia & analogis quantitibus datis similiter derivata. (h) Hoc est, vis trahentis eadem erit lex respectu distantiae utriusque. Q. E. D.

P R O:

(g) \* Tendens ad commune gravitatis centrum, est enim communis intersectio omnium rectarum quæ corpora revolvuntia jungunt, & secundum quas, vires quibus corpora se mutuo trahunt, diriguntur.

(h) \* Hoc est vis trahentis eadem erit lex &c. Sit (in fig. prop. 58.)  $TQ = x$ ;  $CQ = y$ , &  $x$  ad  $y$  in ratione datâ  $a$  ad  $b$ , seu  $x = \frac{ay}{b}$ , vis quâ corpora S, P



DE MO-  
TU COR-  
PORUM  
LIBER

PRIMUS.

PROP.

LXII.

PROBL.

XXXVIII.

# PROPOSITIO LXII. PROBLEMA XXXVIII.

*Corporum duorum, quæ viribus quadrato distantiae suæ reciprocè proportionalibus se mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare motus.*

Corpora ( *per theorema novissimum* ) perinde movebuntur ; ac si à corpore tertio in communi gravitatis centro constituto traherentur ; & centrum illud ipso motus initio quiescet per hypothesin ; & propterea ( *per legum corol. 4.* ) semper quiescet. Determinandi sunt igitur motus corporum ( *per prop. xxv.* ) perinde ac si à viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum se mutuo trahentium. *Q. E. I.*

## PROPOSITIO LXIII. PROBLEMA XXXIX.

*Corporum duorum quæ viribus quadrato distantiae suæ reciprocè proportionalibus se mutuo trahunt, deque locis datis, secundum datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus.*

( i ) Ex datis corporum motibus sub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut & motus spatii, quod unà cum hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales respectu hujus spatii. Motus autem subsequentes ( *per legum corollarium quintum, & theorema novissimum* )

in locis T, Q se mutuo trahunt sit ut  $x^m$ ;

erit  $x^m = \frac{a^m y^m}{b^m}$ , adeoque eadem vis

etiam ut  $x^m$ , ob datam rationem  $a^m$ , ad  $b^m$ , cumque vis quæ corpora se mutuo trahunt æqualis sit vi quæ ad commune gravitatis centrum C urgentur, erit quoque vis ad C tendens ut  $y^m$ . Sit nunc vis quæ corpora se mutuo trahunt ut  $c x^m + e x^m$ , &  $c, e$  quantitates datæ, erit  $c x^m + e x^m$

$= \frac{c a^m y^m}{b^m} + \frac{e a^m y^m}{b^m}$ , ideoque vis ad C

tendens ut  $\frac{c a^m y^m}{b^m} + \frac{e a^m y^m}{b^m}$

( i ) \* Ex datis corporum motibus absolutis sub initio, datur uniformis motus absolutus centri communis gravitatis ( 67, 68, 69 ) & hinc datur motus spatii quod unà cum hoc centro & eadem cum illo celeritate moveretur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales respectu hujus spatii.

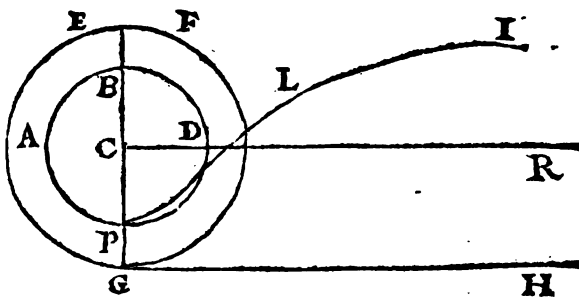
vissimum ) perinde fiunt in hoc spatio , ac si spatium ipsum De Mo-  
 unà cum communi illo gravitatis centro quiesceret , & corpora TU COR-  
 non traherent se mutuo , sed à corpore tertio sito in centro il- PORUM.  
 lo traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc spatio mobi- LIBER  
 li , de loco dato secundum datam rectam , datâ cum velocitate PRIMUS:  
 exeuntis , & vi centripetâ ad centrum illud tendente correpti, PRO P.  
 ( <sup>k</sup> ) determinandus est motus per problema nonum & vicesi- PROBL.  
 mum sextum : & ( <sup>l</sup> ) habebitur simul motus corporis alterius XXXIX.  
 circum idem centrum. ( <sup>m</sup> ) Cum hoc motu componendus est  
 uniformis ille systematis spatii & corporum in eo gyantium mo-  
 tus progressivus supra inventus , & habebitur motus absolutus  
 corporum in spatio immobili. Q. E. I.

( <sup>k</sup> ) \* *Determinandus est motus per*  
*probl. 9. si corpora projiciantur secun-*  
*dum directionem quæ cum eorum distantia*  
*non coincidat , & per probl. 26. si coin-*  
*cidat directio projectionis cum distantia*  
*corporum.*

( <sup>l</sup> ) \* *Et habebitur simul motus corpo-*  
*ris alterius è regione , si ex corpore cu-*  
*jus locus inventus est , per centrum gra-*  
*vitatis commune duorum , agatur recta*  
*quæ ita determinetur ut sit corpus cujus*  
*locus quæritur ad corpus aliud ut distantia*  
*data hujus à centro gravitatis communi*  
*ad eam rectam , in extremo hujus rectæ*  
*erit locus corporis quæsitus ( 60 ).*

( <sup>m</sup> ) 493. *Cum hoc motu componendus est*  
 ¶. In hypothesi hujus problematis , cor-  
 pora duo circa commune gravitatis centrum  
 ceu umbilicum sectiones conicas descri-  
 bunt ( per cor. 2. prop. 58. ) & satis est  
 ( ex notâ superiori ) unius corporis mo-  
 tum determinare. Itaque , exempli gra-  
 tia , corpus P circulum P A B D unifor-  
 miter describat intreadum circuli cen-  
 trum C , cum ipsius circuli plano æqua-  
 biliter movetur per rectam C R diame-  
 tro P B perpendicularem , sitque semper  
 circuli planum mobile in plano hujus sche-  
 matis immoto. In linea C P capiatur  
 C G ad C P in ratione velocitatis cen-  
 tri C per lineam C R progredientis , ad  
 velocitatem corporis P in circuli peri-  
 pheriâ revolvantis , rota G E F centro C  
 & radio C G descripta super regulam G H  
 ad G C normalem progredietur revolen-

do circa axem suum ; & punctum P in  
 plano circuli G E F immotum describet in-  
 terea trochoidem P L I quæ erit trajecto-  
 ria quam corpus P motu absoluto de-  
 scribit , ( ut patet ex prop. 31. & not.  
 367 ). Hâc enim ratione centrum C per-  
 curret spatium C R = G H = semiperiphe-  
 ria rotæ G E F , eodem tempore quo punc-  
 tum P revolvetur per totam semiperiphe-  
 riam P A B ; eritque proinde velocitas cen-  
 tri C per lineam C R ad velocitatem  
 puncti vel corporis P in peripheriâ cir-  
 culi P A B ut semirota ad semicirculum ,  
 hoc est , ut radius C G ad radium C P .  
 Hinc si velocitas centri C æqualis sit ve-



locitati 'corporis P in circulo suo revol-  
 ventis , trochois P L I erit cyclois vul-  
 garis ; si velocitas centri C major extite-  
 rit , erit P L I trochois oblongata , si ve-  
 locitas centri C minor , erit P L I trochois  
 decurtata.

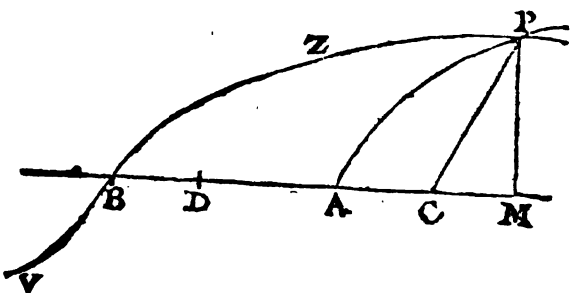
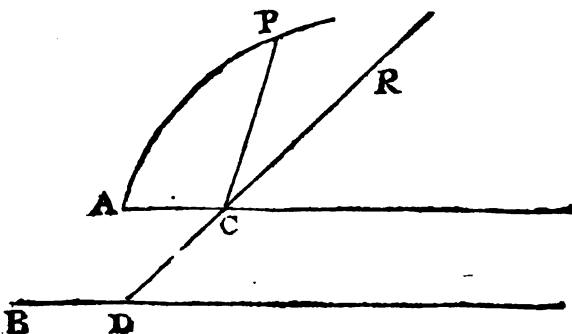
# 414 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MOTU CORP. LIBER PRIMUS. PROP. LXIII. PROBL. XXXIX.

Sic nunc. A P sectio quævis conica cuius vertex A, umbilicus seu virium & gravitatis commune centrum C, axis transversus AC, centrum C uniformiter moveatur in rectâ D R positione datâ, & cum illo planum curvæ A P C, ita transferatur in plano huius schematis immoto, ut axis AC, rectæ B D, positione datæ sit semper parallelus. Dum corpus P in curvâ A P revolvens est in vertice A, fit C in D & A in B, ex datâ velocitate uniformi centri C in lineâ D R, dabitur spatium D C quod centrum illud C dato tempore describit, nec non positio curvæ A P, capiatur (per prop. 30. vel 31. ejusve scholium) area A P C rectæ datæ D D seu tempori proportionalis & obtinebitur locus absolutus corporis P, hoc est, punctum trajectory quæ corpus P in plano huius schematis immoto describit.

Sit A P parabola, & umbilicus C, cum plano A P C uniformi motu progrediatur in axe B C, dum corpus P est in vertice parabolæ A, fit umbilicus C in D & vertex A in B, & trajectory B Z P, quam corpus P, in plano huius chartæ immoto describit, erit parabola secundi generis quæ cubica dici solet. Nam sit A C, seu B D = p, & proinde parabolæ A P, latus rectum = 4p (per theor. 2<sup>am</sup>. de parabola). P M ad axem A B ordinatim applicatâ = y, B M = x, erit (ex naturâ Parabolæ, per theor. 1<sup>am</sup>. de Parabolâ)

$$\begin{aligned} A M &= \frac{y y}{4 p}, \text{ adeoque } B A = D C = x - \frac{y y}{4 p} \\ \frac{y y}{4 p} &= \frac{4 p x - y y}{4 p}, C M \text{ (five } A M - A C) \\ &= \frac{y y - 4 p p}{4 p}. \text{ Porro (ex Archimedo} \\ &\text{prop. 17. de quadr. Parab. quæ est theori} \\ &\text{4<sup>am</sup>. de parabolâ) area } A P M = \frac{2}{3} A M \times P M \\ &= \frac{2 y^3}{12 p}, \text{ area trianguli } C P M = \frac{1}{2} C M \times P M \\ &= \frac{y^3 - 4 p p y}{8 p}; \text{ undè area } A P C = A P M - \\ C P M &= \frac{y^3 + 12 p p y}{24 p}. \text{ Est autem area} \end{aligned}$$



A P C, tempori quo describitur proportionalis, seu ut linea DC vel BA =  $\frac{4 p x - y y}{4 p}$ ,

quarè si fuerit  $\frac{a}{b}$  quantitas constans, erit  $\frac{y^3 + 12 p p y}{24 p} = \frac{4 a p x - a y y}{24 p}$ ; hoc est  $y^3 + a y y + 12 p y y = 4 a p x$ , æquatio ad parabolam cubicam B Z P, quæ crura habet contraria B Z, B V in infinitum progredientia.

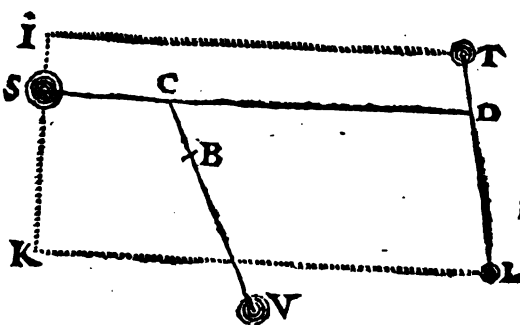
PRO-

PROPOSITIO LXIV. PROBLEMA XL.

*Viribus quibus corpora se mutuo trahunt crescentibus in simplici ratione distantiarum à centrīs: requiruntur motus plurium corporum inter se.*

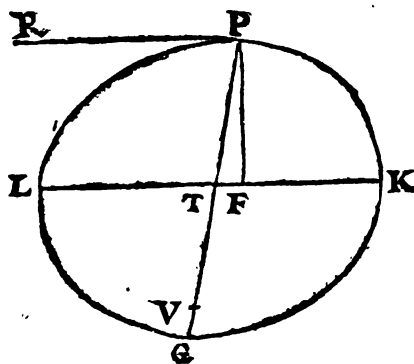
DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. LXIV. PROBL. XL.

Ponantur primo corpora duo  $T$  &  $L$  commune habentia gravitatis centrum  $D$ . Describent hæc ( *per corollarium primum theorematīs 21.* ) ellipses centra habentes in  $D$ , quarum magnitudo (<sup>n</sup>) ex problemate v. innotescit.



Trahat jam corpus tertium  $S$  priora duo  $T$  &  $L$  viribus acceleratricibus  $ST$ ,  $SL$ , & ab ipsis vicissim trahatur. Vis  $ST$ , ( *per legum corol. 2.* ) resolvitur in vires  $SD$ ,  $DT$ ; & vis  $SL$  in vires  $SD$ ,  $DL$ . Vires (<sup>o</sup>) autem  $DT$ ,  $DL$ , quæ sunt

( <sup>n</sup> ) 494. *Ex problemate 5. innotescit.* Si enim corpus aliquod de loco dato  $P$  exeat cum datâ velocitate & secundum datam directionem  $PR$  ut ellipsim  $PLGK$ , circa centrum  $T$  datum describat, recta  $PR$  positione datâ ellipsim tanget in  $P$ ; ideòque diameter  $LK$ , ipsi  $PR$  parallela ( *prop. 32. Lib. I. Conic. Apoll. sive Lem. IV. de Conic. & Theor. I. de Ell.* ) dabitur positione. Præterea, si ex puncto  $P$  ad diametrum  $LK$  demittatur perpendicularum  $PF$ , erit vis centripeta data quâ corpus versus  $T$  urgetur secundum directionem  $PT$  ad partem vis illius quæ juxta directionem  $PF$ , agit, ut  $PT$  ad  $PF$ , proindeque pars illa vis centripetæ dabitur. Datâ autem vi centripetâ juxta directionem  $PF$  urgente, datâque corporis de loco  $P$  exeuntis velocitate in lineâ  $PR$ , ad  $PF$  perpendiculari, dabitur radius circuli ellipsim osculantis in  $P$ , quam corpus  $P$  cum hac velocitate atque vi centripetâ potest describere ( 199, ) & hinc dabitur altera diameter conjugata

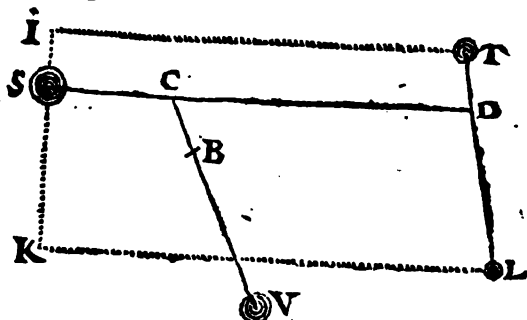


$LK$ ; & ellipsis describi poterit ( vide *Probl. de Ellipsi* p. 130 ).

( <sup>o</sup> ) \* *Vires autem  $DT$ ,  $DL$ , quæ sunt ut ipsarum summa  $TL$  &c.* Est enim  $DT$  ad  $TL$  in ratione datâ corporis  $L$  ad summam corporum  $T+L$ , &  $DL$  ad  $TL$ , in ratione datâ corporis  $T$  ad summam corporum  $T+L$  ( 60 ); quare vires  $DT$ ,  $DL$ , in quâcumque positione corporum  $T$  &  $L$ , sunt ut  $T L$ .

# 416 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo- sunt ut ipsarum summa  $T L$ , atque ideo ut vires acceleratri-  
TU COR- ces quibus corpora  $T \& L$  se mutuo trahunt, additæ his viri-  
PORUM. bus corporum  $T \& L$ , prior priori & posterior posteriori,  
LIBER componunt vires distantis  
PRIMUS.  $D T$  ac  $D L$  proportiona-  
PROP. les, ut prius, sed viribus  
LXIV. prioribus majores; ideo-  
PROBL. que (per corol. 1. prop.  
XL. x. & corol. 1. & 8. prop.  
1 v.) efficiunt ut corpo-  
ra illa describant ellipses  
ut prius, sed motu cele-  
riore. Vires reliquæ acceleratrices  $S D$  &  $S D$ , (p) actionibus  
motricibus  $S D \times T \& S D \times L$ , quæ sunt ut corpora, trahendo  
corpora illa æqualiter & secundum lineas  $T I$ ,  $L K$ , ipsi  
 $D S$  parallelas, nil mutant situs eorum ad invicem, sed faciunt  
ut ipsa æqualiter accedant ad lineam  $I K$ ; quam ductam concipe  
per medium corporis  $S$ , & lineæ  $D S$  perpendicularem. Impedietur autem iste ad lineam  $I K$  accessus (q) faciendo ut  
systema corporum  $T \& L$  ex unâ parte, & corpus  $S$  ex alterâ,  
justis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis cen-  
trum  $C$ . (r) Tali motu corpus  $S$ , eo quod summa virium  
motricium  $S D \times T \& S D \times L$ , distantia  $C S$  proportiona-  
lium, tendit versus centrum  $C$ , describit ellipsin circa idem  
 $C$ ;



(p)\* Actionibus motricibus  $S D \times T$ ;  
&  $S D \times L$  (per def. 8. & not. 12.) quæ  
sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqua-  
liter ob æqualem vim acceleratricem  $S D$ ,  
ut sit in corporibus gravibus, quæ licet  
massis inæqualia, vi tamen gravitatis acce-  
leratrice, cadendo æqualiter acceleran-  
tur.

(q)\* Faciendo ut systema corporum  
 $T$ , &  $L$ , (seu  $D$  centrum gravitatis com-  
mune ipsorum) ex unâ parte, & corpus  $S$   
ex alterâ, justis cum velocitatibus in dato  
plano secundum directiones parallelas &  
contrarias impressis gyrentur circa  $C$  com-  
mune gravitatis centrum trium corporum.

(r)\* Tali motu corpus  $S$  &c. Corpus  
 $S$  à corporibus  $T \& L$  trahitur viribus  
quæ sunt inter se ut  $S T \times T \& S L \times L$   
(ex hyp.) & per resolutionem virium cor-  
pus  $S$  à corporibus  $T \& L$  versus  $D$  &  
 $C$  juxta directionem  $S D$  seu  $S C$  tra-  
hitur viribus quæ sunt inter se ut  $S D \times T$   
&  $S D \times L$ , hoc est, vi quæ est ut  $S D \times T + L$ ,  
adeoque ut  $S D$ , ob datam corporum sum-  
mam  $T + L$ , & ut  $C S$ , ob datam ra-  
tionem  $S D$  ad  $C S$ , (61). Corpus idem  
 $S$  juxta directiones oppositas ipsis  $D T$ ,  
 $D L$  parallelas, trahitur viribus quæ sunt  
inter se ut  $D T \times T \& D L \times L$ , hoc est,  
viribus æqualibus (60) quæ proinde nul-  
lam

$C$ ; & punctum  $D$ , ob proportionales  $CS$ ,  $CD$ , descri-  
bet ellipsin consimilem è regione. Corpora autem  $T$  &  $L$  viri-  
bus motricibus  $SD \times T$  &  $SD \times L$ , prius priore, posterius pos-  
teriore, æqualiter & secundum lineas parallelas  $TI$  &  $LK$ , ut  
dictum est, attracta, pergunt (*per legum corollarium quintum &*  
*sextum*) circa centrum mobile  $D$  ellipses suas describere, ut  
prius. *Q. E. I.*

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXIV.  
PROBL.

Addatur jam corpus quartum  $V$ , & (<sup>1</sup>) simili argumen-  
to concludetur hoc & punctum  $C$  ellipses circa omnium com-  
mune centrum gravitatis  $B$  describere; manentibus motibus  
priorum corporum  $T$ ,  $L$  &  $S$  circa centra  $D$  &  $C$ , sed ac-  
celeratis. Et eadem methodo corpora plura adjungere licebit;

*Q. E. I.*

(<sup>1</sup>) Hæc ita se habent, etsi corpora  $T$  &  $L$  trahunt se mu-  
tuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam quibus  
trahunt corpora reliqua pro ratione distantiarum. Sunt mu-  
tuæ omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut distantia  
ductæ in corpora trahentia, & (<sup>u</sup>) ex præcedentibus facile de-  
ducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis  
ellipses varias, circa omnium commune gravitatis centrum  $B$ ,  
in plano immobili describunt. *Q. E. I.*

PRO.

Iam mutationem producant. Quare cum  
systema corporum  $T$  &  $L$ , seu ipsorum  
commune centrum gravitatis  $D$ , versus  $S$   
seu  $C$  trahatur quoque vi quæ est ut  $SD$ ,  
ac proinde ut  $CD$  ( $\sigma 1$ ), patet quod cor-  
pus  $S$ , ex unâ parte, & punctum  $D$  ex  
alterâ describant circum  $C$  ellipses consi-  
miles, si iustis cum velocitatibus, ut su-  
prâ dictum est, projiciantur.

(<sup>1</sup>) \* *Simili argumento*, considerando  
corpora  $T$  &  $L$  tanquam corpus unicum  
in centro  $D$  positum, concludetur &c.

(<sup>1</sup>) \* *Hæc ita se habent.* Nam pro-  
positionis demonstratio non supponit vires  
acceleratrices quibus corpora  $T$  &  $L$  ad  
distantiam datam trahunt corpus  $S$ , esse  
æquales viribus acceleratricibus quibus se  
mutuò ad eandem distantiam trahunt. Un-  
de manet demonstratio, etsi corpus  $S$  a

Tom. I.

corpore v. gr.  $T$  ad distantiam datam  
trahatur majori vel minori vi accelera-  
trice quam corpus  $L$  ad eandem distan-  
tiam.

(<sup>u</sup>) \* *Et ex præcedentibus facile dedu-  
citur.* Vis enim seu actio acceleratrix,  
quâ corpus  $T$  versus  $D$  trahitur, est (*ex  
Dem. & Hyp.*) ut  $TL \times L + TD \times S$ ,  
hoc est, ut  $TD \times S + T + L$ , ob  $TL \times L$   
 $= TD \times T + L$  ( $\sigma 0$ ), & vis acceleratrix  
quâ punctum  $D$  versus  $C$  trahitur, est  
(*ex Dem. & Hyp.*) ut  $SD \times S$ , hoc est  
ut  $CS \times S + CD \times S$ ; sed ( $\sigma 1$ )  $CS \times S$   
 $= CD \times T + L$ , adeoque vis acceleratrix  
quâ punctum  $D$  versus  $C$  trahitur, est ut  
 $CD \times T + L + S$ . Quare vis accelera-  
trix quâ corpus  $T$  versus  $D$  trahitur, est  
G g g ad

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.

LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXV.  
THEOR.  
XXV.

## PROPOSITIO LXV. THEOREMA XXV.

*Corpora plura, quorum vires decreſcunt in duplicatâ ratione diſtan-  
tiarum ab eorundem centrīs, moveri poſſe inter ſe in ellipſibus;  
& radiis ad umbilicos ductis areas deſcribere temporibus propor-  
tionales quam proximè.*

In propoſitione ſuperiore demonſtratus eſt caſus ubi mo-  
tus plures peraguntur in ellipſibus accuratè. Quo magis re-  
cedit lex virium a lege ibi poſitâ, eo magis corpora per-  
turbabunt mutuos motus; neque fieri poteſt, ut corpora, ſe-  
cundum legem hic poſitam ſe mutuo trahentia, moveantur in  
ellipſibus accuratè, niſi ſervando certam proportionem diſtan-  
tiarum ab invicem. In ſequentibus autem caſibus non multum  
ab ellipſibus errabitur.

*Caf. 1.* Pone corpora plura minora circa maximum aliquod  
ad varias ab eo diſtancias revolvi, tendantque ad ſingula vires  
abſolutæ proportionales iſdem corporibus. Et quoniam omnium  
commune gravitatis centrum (*per legum corol. quartum*) vel  
quieſcit vel movetur uniformiter in directum, fingamus corpora  
minora tam parva eſſe, ut corpus maximum nunquam diſtet ſen-  
ſibiliter ab hoc centro: & maximum illud vel quieſcet, vel mo-  
vebitur uniformiter in directum, ſine errore ſenſibili; minora  
autem revolyentur circa hoc maximum in ellipſibus, atque ra-  
diis ad idem ductis deſcribent areas temporibus proportiona-  
les; (γ) niſi quâtenus errores inducuntur, vel per errorem ma-  
ximi

ad vim acceleratricem quâ punctum D  
trahitur verſus C, ut T D ad C D, hoc  
eſt ut diſtantiæ à punctis ad quæ illæ vi-  
res diriguntur. Corpus igitur T ad punc-  
tum D, & punctum D ad C trahuntur  
viribus abſolutis æqualibus, hoc eſt, eo-  
dem modo ad ſua reſpectivè centra D  
& C trahuntur quo traherentur, ſi cir-  
cà idem virium centrum ad diſtancias  
T D, D C revolverentur, ſed in hoc  
caſu æqualibus temporibus periodicis el-  
lipſes ſuas deſcriberent (*per cor. 2. prop.  
X.*) ergò & in illo caſu corpus T cir-

cà D & punctum D circà C, æqualibus  
temporibus periodicis ſuas ellipſes deſcri-  
bunt. Idem eodem modo demonſtratur,  
cùm plura ſunt corpora revolyentia.

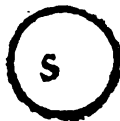
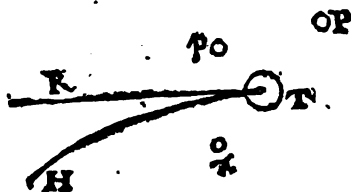
(γ) \* *Niſi quâtenus errores inducuntur  
&c.* Nam ſi corpus maximum à comuni  
illo gravitatis centro non erraret, nulla-  
que eſſet actio minorum corporum in ſe  
mutuò, quodlibet exiguum corpus revol-  
veretur in ellipſi circà maximum, atque  
radiis ad idem ductis deſcriberet areas  
temporibus proportionales (*per cor. 2. &  
3. prop. 58.*).

ximi à communi illo gravitatis centro, vel per actiones mino- DE Mo-  
rum corporum in se mutuo. Diminui autem possunt corpora TU COR-  
minora, usque donec error iste, & (\*) actiones mutue sint da- PORUM.  
tis quibuscvis minores; atque ideo donec orbes cum ellipsis qua- LIBER  
drent, & areæ respondeant temporibus, sine errore, qui non sit PRIMUS.  
minor quovis dato. Q. E. O. PROP.  
LXV.

Cas. 2. (a) Fingamus jam systema corporum minorum mo- THEOR.  
do jam descripto circa maximum revolvendum, aliudve quod- xxv.  
vis duorum circum se mutuò revolvendum corporum systema  
progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alte-  
rius longè maximi & ad magnam distantiam siti urgeri ad la-  
tus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora  
secundum lineas parallelas urgentur, non mutant situs corpo-  
rum ad invicem, sed ut systema totum, servatis partium mo-  
tibus inter se, simul transferatur, efficiunt: manifestum est quod,  
ex attractionibus in corpus maximum, nulla prorsus orietur  
mutatio motus attractorum inter se, nisi vel ex attractionum  
acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad in-  
vicem: secundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractio-  
nes

(\*) \* Et actiones mutue suis datis qui-  
busvis minores respectu actionis corporis  
maximi in corpora miore; nam cum cor-  
poris vis attractiva absoluta hic suppona-  
tur materiæ proportionalis, diminuta cor-  
poris massa, vis attractiva in eadem ra-  
tione minuitur.

(a) \* Fingamus jam corporum mino-  
rum, P, p,  $\pi$ , modo jam descripto circa  
maximum T revolvendum systema progre-  
di uniformiter in directum, seu totius sys-  
tematis commune gravitatis centrum T,  
progredi uniformiter per rectam TR, &  
interea vi corporis alterius longè maximi  
S, & ad magnam distantiam siti, urgeri  
ad latus secundum rectas PS, p s,  $\pi$  S;  
TS, atque à recta TR retrahi & in  
curvam TH cogi &c.





DE MO- nes omnes acceleratrices in corpus maximum esse inter se re-  
 TU COR- ciprocè ut quadrata distantiarum; & augendo corporis maxim  
 PORUM. distantiam, donec rectorum ab hoc ad reliqua ductarum diffe-  
 LIBER rentiæ respectu earum longitudinis & inclinationes ad invicem  
 PRIMUS. minores sint, quam datæ quævis; perseverabunt motus partium  
 PROP. systematis inter se sine erroribus, qui non sint quibuscvis datis  
 LXV. minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invi-  
 THEOR. cem distantiam, systema totum ad modum corporis unius at-  
 XXV. trahitur; movebitur idem hâc attractione ad modum corporis  
 unius; hoc est, <sup>(b)</sup> centro suo gravitatis describet circa corpus  
 maximum sectionem aliquam conicam (*viz.* <sup>(c)</sup> Hyperbolam  
 vel parabolam attractione languidâ, ellipsin fortiore) & radio ad  
 maximum ducto describet areas temporibus proportionales, sine  
 ullis erroribus, nisi quas partium distantiae, perexiguæ sane &  
 pro lubitu minuendæ, valeant efficere. *Q. E. O.*

Simili argumento pergere licet ad casus magis compositos in  
 infinitum.

*Corol. 1.* <sup>(d)</sup> In casu secundo, quo propius accedit cor-  
 pus omnium maximum ad systema duorum vel plurium, eo  
 magis turbabuntur motus partium systematis inter se; prop-  
 terea quod linearum à corpore maximo ad has ductarum jam  
 major est inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæ-  
 qualitas.

*Corol. 2.* Maximè autem turbabuntur, ponendo quod at-  
 tractiones acceleratrices partium systematis, versus corpus om-  
 nium maximum, <sup>(e)</sup> non sint ad invicem reciproce ut quadra-  
 ta

<sup>(b)</sup> \* *Hoc est, centro suo gravitatis, in quo totum systema gravium P, p, \*, T, anitum ac contractum intelligitur (71).*

<sup>(c)</sup> \* *Hyperbolam vel parabolam attractione languidâ, ellipsim vel circulum fortiore; manente enim velocitate corporis circa centrum virium S projecti, & circulum vel ellipsim describentis minui debet illius ad centrum S attractio, ut ad eandem distantiam possit Parabolam describere, & magis adhuc decrescere illam attractionem oportet, ut describat Hyperbolam (per cor. 7. prop. 16. & Dem. prop. 17).*

<sup>(d)</sup> \* *In casu 2<sup>o</sup>. quo propius accedit corpus omnium maximum ad systema duorum vel plurium corporum, eo magis recedit à calu ubi perturbatio est nulla, nempe quando corpus S infinite distat, ergo eo magis turbabuntur motus partium systematis inter se.*

<sup>(e)</sup> \* *Non sint ad invicem reciproce &c. Exempli causâ; Si corpora P, p, diversis legibus traherentur, P, v. gr. in ratione reciproca quadrati distantiae suæ à corpore maximo S; p verò in ratione cubi distantiae.*

ta distantiarum à corpore illo maximo; (f) præsertim si propor-  
tionis hujus inæqualitas major sit quam inæqualitas proportionis  
distantiarum à corpore maximo. Nam si vis acceleratrix, æqua-  
liter & secundum lineas parallelas agendo, perturbat motus in-  
ter se, necesse est, ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur,  
majorque sit, vel minor pro majore, vel minore inæqualitate.  
Excessus impulsuum majorum, agendo in aliqua corpora & non  
agendo in alia, necessariò mutabunt situm eorum inter se. Et  
hæc perturbatio, addita perturbationi, quæ ex linearum incli-  
natione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem  
totam.

Corol. 3. Unde si systematis hujus partes in ellipsis, vel cir-  
culis sine perturbatione insigni moveantur; manifestum est, quod  
eædem à viribus acceleratricibus, ad alia corpora tendentibus,  
aut non urgentur nisi levissimè, aut urgentur æqualiter, & se-  
cundum lineas parallelas quamproximè.

PROPOSITIO LXVI. THEOREMA XXVI.

*Si corpora tria, quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distan-  
tiarum, se mutuo trahant; & attractiones acceleratrices binorum  
quorumcunque in tertium sint inter se reciprocè ut quadrata di-  
stantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: dico  
quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipsum duc-  
tis, describet areas temporibus magis proportionales, & figuram  
ad formam ellipseos umbilicum in concursu radiorum habentis ma-  
gis accedentem, si corpus maximum his attractionibus agitetur,  
quam si maximum illud vel à minoribus non attractum quiescat,  
vel multò minus vel multò magis attractum, aut multò minus  
aut multò magis agitetur.*

Liquet fere ex demonstratione corollarii secundi propositionis

G g 3

præ-

(f) \* Præsertim si proportionis hujus  
inæqualitas &c. Exempli causâ, si inæqua-  
litas attractionum acceleratricum in corpo-  
ribus P, p, major sit inæqualitate distan-  
tiarum S P, S p; Nam si illa inæqualita-

tes attractionum & distantiarum essent in  
datâ ratione, evanescente distantiarum S P,  
S p differentiâ, quando corpus maximum S  
longissimè distat, evanesceret quæque attra-  
cticum acceleratricum inæqualitas.

DEMO. præcedentis; sed argumento magis distincto & latius cogente sic  
TU COR. evincitur.

PORUM.

LIBER

PRIMUS.

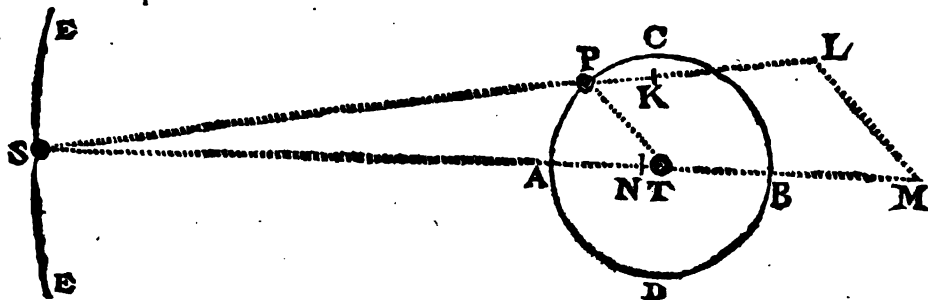
PROP.

LXVI.

THEOR.

XXVI.

*Caf. 1.* Revolvantur corpora minora  $P$  &  $S$  in eodem plano circa maximum  $T$ , quorum  $P$  describat orbem interiorem  $PAB$ , &  $S$  exteriorem  $ESE$ . Sit  $SK$  mediocris distantia corporum  $P$  &  $S$ ; & corporis  $P$  versus  $S$  attractio acceleratrix, in mediocri illâ distantia, exponatur per eandem. In duplicatâ ratione  $SK$  ad  $SP$  capiatur  $SL$  ad  $SK$ , & (g) erit  $SL$  attractio acceleratrix corporis  $P$  versus  $S$  in distantia quâvis  $SP$ . Junge  $PT$ , eique parallelam age  $LM$  occurrentem  $ST$  in  $M$ ;



& attractio  $SL$  resolvetur ( per legum corol. 2. ) in attractiones  $SM$ ,  $LM$ . Et sic urgebitur corpus  $P$  vi acceleratrice triplici. Vis una tendit ad  $T$ , & oritur à mutuâ attractione corporum  $T$  &  $P$ . Hâc vi solâ corpus  $P$  circum corpus  $T$ , five immotum, five hâc attractione agitatum, describere deberet & areas, radio  $PT$ , temporibus proportionales, & ellipsin cui umbilicus est in centro corporis  $T$ . Patet hoc per prop. XI. & corollaria 2. & 3. theor. XXI. Vis altera est attractionis  $LM$ , quæ quoniam tendit à  $P$  ad  $T$ , superaddita vi priori coincidit cum ipsâ, & sic faciet ut areae etiamnum temporibus proportionales describantur per corol. 3. theor. XXI. At (h) quoniam non est quadrato distantia  $PT$  recipro-

cè

(g)\* Et erit  $SL$  attractio acceleratrix &c. Est enim ( ex Hyp. ) ut  $SP^2$  ad  $SK^2$  ita attractio acceleratrix in  $K$  ( quam exhibet linea  $SK$  ) ad attractionem acceleratricem in  $P$ , quam proinde exhibebit linea  $SL$ .

(h) 495. At quoniam non est quadrato distantia  $PT$  reciprocè proportionalis. Est enim ( ex constr. )  $SK^2 : SP^2 = SL : SK$ , adeoque  $SK : SP = SL \times SK : SK \times SP = SL : SP$ . Sed ob triangula  $MLS$ ,  $TPS$  simi-

cè proportionalis, componet eà cum vi priore vim ab hâc proportionē aberrantem, idque eo magis, quo major est proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cum ( *per prop. XI. & per corol. 2. theor. XXI.* ) vis, quâ ellipsis circa umbilicum *T* describitur, tendere debeat ad umbilicum illum, & esse quadrato distantiae *PT* reciprocè proportionalis; vis illa composita, aberrando ab hâc proportionē, faciet ut orbis *PAB* aberret à formâ ellipseos umbilicum habentis in *T*; idque eo magis, quo major est aberratio ab hâc proportionē; atque ideo etiam quo major est proportio vis secundæ *LM* ad vim primam, cæteris paribus. Jam vero vis tertia *SM*, trahendo corpus *P* secundum lineam ipsi *ST* parallelam, componet cum prioribus vim, quæ non amplius dirigitur à *P* in *T*; quæque ab hâc determinatione tanto magis aberrat, quanto major est proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus: atque ideo quæ faciet ut corpus *P*, radio *TP*, areas non amplius temporibus proportionales describat; atque ut aberratio ab hâc proportionalitate tanto major sit, quanto major est proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis verò *PAB* aberrationem à formâ ellipticâ præfatâ hâc vis tertia duplici de causâ adaugebit, tum quod non dirigatur à *P* ad *T*, (i) tum etiam quod non sit reciprocè proportionalis quadrato distantiae *PT*. Quibus intellectis, manifestum est, quod areae temporibus tum maximè fiunt proportionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, fit minima; & quod orbis *PAB* tum maximè accedit ad præfatam formam ellipticam, ubi vis tam secunda quam tertia, sed præcipuè vis tertia fit minima, vi primâ manente.

Exponatur corporis *T* attractio acceleratrix versus *S* per lineam

similia  $SL:SP=LM:PT$ ; ergò  $LM:PT=SK:SP$ , & proinde vis *LM* est ut  $\frac{SK \times PT}{SP}$ , seu datâ *SK*, ut  $\frac{PT}{SP}$ ; unde crescente distantia *PT* crescit vis *LM*.  
(i) 496. Tum etiam quod non sit reciprocè proportionalis &c. Nam *PT* est ad *ST* ut vis *LM* est ad vim *SM*, sed (495) vis *LM* est ut

$\frac{S'K \times P'T'}{SP}$ , & proinde vis *SM* est ut  $\frac{SK \times ST}{SP}$ . Quare vis *SM*, datis *SK* & *ST*, est ut  $\frac{1}{SP}$ .

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROPOSITIO XLVI. THEOREMA XXXV.

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. LXVI. THEOR. XXVI.  
 neam  $SN$ ; & si attractiones acceleratrices  $SM$ ,  $SN$  æquales essent; hæ, trahendo corpora  $T$  &  $P$  æqualiter & secundum lineas parallelas, nil mutarent situm eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter se (*per legum corol. v l.*) ac si hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione si attractio  $SN$  minor esset attractione  $SM$ , tolleretur ipsa attractionis  $SM$  partem  $SN$ , & maneret pars sola  $MN$ , quæ temporum & arearum proportionalitas & orbitæ forma illa elliptica perturbaretur. Et similiter si attractio  $SN$  major esset attractione  $SM$ , oriretur ex differentiâ solâ  $MN$  perturbatio proportionalitatis & orbitæ. Sic per attractionem  $SN$  reducitur semper attractio tertia superior  $SM$  ad attractionem  $MN$ , attractione primâ & secundâ manentibus prorsus immutatis: & propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & orbita  $PAB$  ad formam præfatam ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio  $MN$  vel nulla est, vel quam fieri possit minima; hoc est, ubi corporum  $P$  &  $T$  attractiones acceleratrices, factæ versùs corpus  $S$ , accedunt quantum fieri potest ad æqualitatem; id est, ubi attractio  $SN$  non est nulla, neque minor minimâ attractionum omnium  $SM$ , sed inter attractionum omnium  $SM$  maximam & minimam quasi mediocris; hoc est, non multo major neque multo minor attractione  $SK$ . *Q. E. D.*

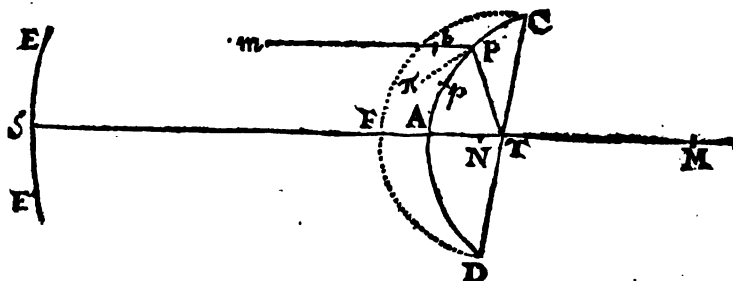
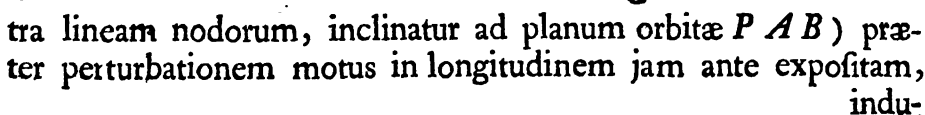
*Caf. 2. (k)* Revolvantur jam corpora minora  $P$ ,  $S$  circa maximum  $T$  in planis diversis; & vis  $LM$ , agendo secundum lineam  $PT$  in plano orbitæ  $PAB$  sitam, eundem habebit effectum ac prius, neque corpus  $P$  de plano orbitæ suæ deturbabit.

(k) 497. *Caf. 2.* Planum  $TESE$  cum huius schematis plano congruere supponatur, orbitæ verò  $PAB$  planum alterâ sui parte, v. gr.  $CAD$  suprà planum  $TESE$  emigere, & altera parte  $DBC$  infrà planum  $TESE$  deprimi intelligatur, linea recta  $DC$  communis planorum  $TESE$  &  $PAB$  interseccio, linea nodorum dicitur, & illius extrema puncta  $D$  &  $C$  nodi appellantur. Nodi vel puncta quævis  $D$ ,  $C$  dicuntur esse in quadraturis seu aspectum quadratum obtinere respectu corporis  $S$ , dum

sunt in lineâ rectâ ad  $ST$  in puncto  $T$  perpendiculari, quod in hoc casu corpus  $S$  & punctum  $C$  vel  $D$  sub angulo recto de loco  $T$  videantur. Si super lineâ  $ST$  erectum intelligatur planum plano  $TESE$  verticale, sinque puncta  $A$  &  $B$  in illo plano verticali,  $A$  quidem inter corpora  $S$  &  $T$ ;  $B$  verò ultra  $T$ , punctum  $A$  dicitur esse in conjunctione, & punctum  $B$  in oppositione respectu corporum  $S$  &  $T$ ; & loca  $A$  &  $B$ , communi nomine syzigia vocantur. Motus in longitudinem est quo  
 cor-

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

THEOR.  
XXVI.



tæ P A B , & motum corporis P [in latitudinem non perturbabit , hoc est , non efficiet ut corpus P ad planum T E S E magis accedat aut ab eo recedat. Verùm si corpus S versatur extrâ lineam nodorum , vis N M inducet perturbationem mortis in latitudinem. Sit enim C A D T pars orbitæ quam corpus P exclusâ vi N M describeret supra planum T E S E seu C F D eminens , sit C D linea nodorum , P in rectâ æqualis & parallela N M , p locus ad quem corpus P exclusâ vi N M tempusculo minimo perveniret , b locus in lineâ P m ad quem corpus idem P , solâ vi N M , eodem tempusculo traheretur ; corpus illud P duabus viribus impulsam , quarum altera agit secundum directionem P p in plano C A D altera secundum directionem P m ad planum C A D inclinatum , motu composito describet lineam P π quæ non est in plano C A D.

Tom. I.

H h h

DE MOTU CORP. inducet perturbationem motus in latitudinem, trahendo corpus  $P$  de plano suæ orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corporum  $P$  &  $T$  ad invicem situ, erit ut vis illa generans  $MN$ , ideoque minima evadet ubi  $MN$  est minima, hoc est (uti jam exposui) ubi attractio  $SN$  non est multo major, neque multo minor attractione  $SK$ . *Q. E. D.*

THEOR. *Corol. 1.* (<sup>n</sup>) Ex his facile colligitur, quod, si corpora plura minora  $P, S, R$ , &c. revolvantur circa maximum  $T$ , motus corporis intimi  $P$  minimè perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum  $T$  pariter à cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitur, atque à cætera se mutuo.

*Corol. 2.* In systemate vero trium corporum  $T, P, S$ , si attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint ad invicem reciprocè ut quadrata distantiarum; corpus  $P$ , radio  $PT$ , aream circa corpus  $T$  velocius describet prope conjunctionem  $A$  & oppositionem  $B$ , quam prope quadraturas  $C, D$ . Namque vis omnis qua corpus  $P$  urgetur & corpus  $T$  non urgetur, quæque non agit secundum lineam  $PT$  accelerat vel retardat descriptionem areæ, perinde ut ipsa in consequentia vel in antecedentia dirigitur. (<sup>o</sup>) Talis est vis  $NM$ . Hæc in transitu corporis  $P$  à  $C$  ad  $A$  tendit in consequentia, motumque accelerat;

(<sup>n</sup>) \* *Corollarium primum* patet ex demonstratis cum duo tantum sunt corpora minora  $P, S$ ; addatur enim tertium corpus  $R$ , eodem modo demonstrabitur motum corporis intimi  $P$  minimè perturbari attractione ipsius  $R$ , ubi corpus maximum  $T$  pariter attrahitur à corpore illo  $R$ , ac corpus  $P$ , & ità de pluribus corporibus ratiocinari licet. Quarè ex demonstratis facile colligitur quod si &c.

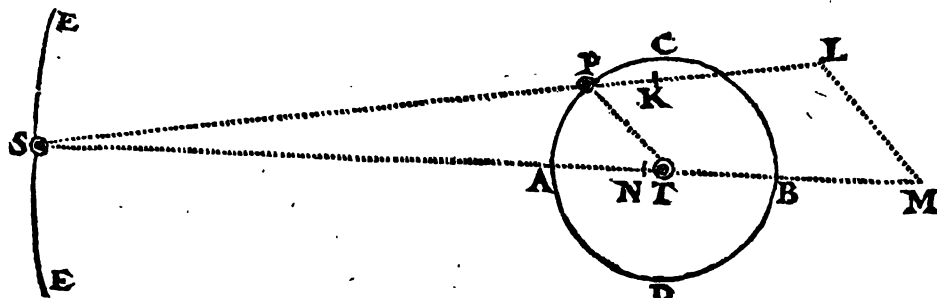
(<sup>o</sup>) 498. Talis est vis  $NM$ . Si supponamus orbem  $CADB$  (vid. fig. Newt.) esse circulo finitimum, & distantiam  $SD$  maximam respectu radii  $PT$ , erit fere  $SC = SK = ST = SN$ , & proindè  $NM = TM$ . Porro corpore  $P$  in quadraturis  $C, D$  versante, est  $SC = SP = SK$ ; quarè cum sit, (per const. prop. 66.)  $SL: SK = SK^2: SP^2$ , erit in quadraturis  $SL = SK = SC$ , &  $LM$  coincidit cum  $CT$  seu  $PT$ , adeoque evanescet  $TM$  seu  $NM$ ,

Nulla igitur erit virium  $SM, SN$ , in quadraturis differentia, & idè corpus  $P$  reliquis viribus ad centrum  $T$  tendentibus agitur, radio vectore areæ ibi describit temporibus proportionales. At ubi corpus  $P$  extrà quadraturas est in hemiperipheriâ  $CAD$ , vis  $SM$  major est vi  $SN$  & corpus  $P$  virium differentia  $NM$  trahitur secundum directionem ipsi  $TS$  parallelam.

Sit  $Pm$  æqualis & parallela ipsi  $NM$ , & demisso ex  $m$  in radium  $TP$  productum perpendiculari  $mn$ , vis  $Pm$ , seu  $NM$ , in duas vires  $Pn, nm$  resolvitur, quarum altera  $Pn$  trahendo secundum directionem radii  $TP$ , corporis  $P$  motum in longitudinem nihil mutat, nec æquabilem arearum descriptionem turbat; altera verò  $NM$ , trahendo secundum directionem  $nm$ , radio  $TP$  perpendiculari, hoc est, secundum directionem tangentis in  $P$ , motum in longitudinem accelerat in primo qua-

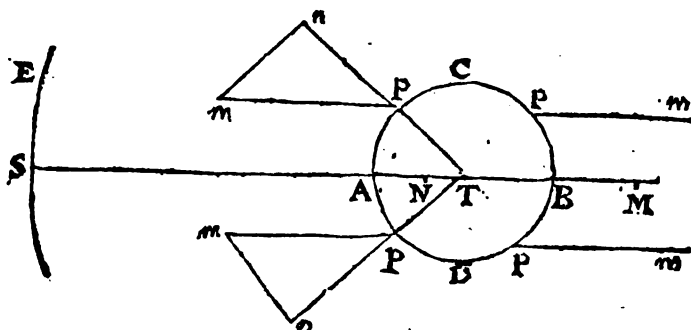
rât ; dein usque ad *D* in antecedentia , & motum retardat ; tum in consequentia usque ad *B* , & ultimo in antecedentia transfundo à *B* ad *C*.

DE MOTU CORPORUM.  
LIBER PRIMUS.  
PROP. LXVI.  
THEOR. XXVI.



*Corol. 3.* Et eodem argumento patet quod corpus *P*, cæteris paribus , velocius movetur in conjunctione & oppositione quam in quadraturis.

Co-



quadrante *C A* retardat in secundo quadrante *A D*.

In alterâ hemiperipheriâ *D B C* , vis *S M* minor est vi *S N* , quoniam corpus *P* à corpore *S* longius distat quam corpus *T* , unde si vires perturbantes ad solum corpus *P* referantur , virium *S M* , *S N* differentia *N M* negativa seu ablatitia erit , aut quod idem est , contrariâ directione aget ; Fingatur enim corpora *T* & *P* urgeri ambo vi *S N* ubique æquali & sibi parallela , pergent moveri inter se quasi omnino abesset illa vis per *Cor. 6.* Legum motûs , tum trahatur corpus *P* vi *N M* secundum directionem oppositam vi *S N* , ex eâ actione mutabuntur motus corporum *T* & *P* inter se , sed eam ex eâ actione vis *S N* quæ

trahere corpus *P* fingebatur , reducetur ad vim *S M* quæ est vis reverâ agens dum vis *S N* agit in *T* , ergo si æstimentur motus corporum *T* & *P* inter se , quasi corpus *P* in hemiperipheriâ *D B C* urgeretur virium differentia *N M* in contrariam partem agente , obtinebuntur veræ mutationes motuum corporum *T* & *P* inter se , ex actionibus *S N* & *S M* ortæ , ideoque in posterum considerabitur corpus *P* in hemiperipheriâ *D B C* quasi urgeretur vi *N M* secundum directionem *P m* ipsi *N M* parallelam à *P* versûs *m* agente ; atque ideo , si vis *P m* in duas vires , ut in alterâ hemiperipheriâ factum est , resolvatur , manifestum erit motum in longitudinem in quadrante *D B* accelerari & in quadrante *B C* retardari.

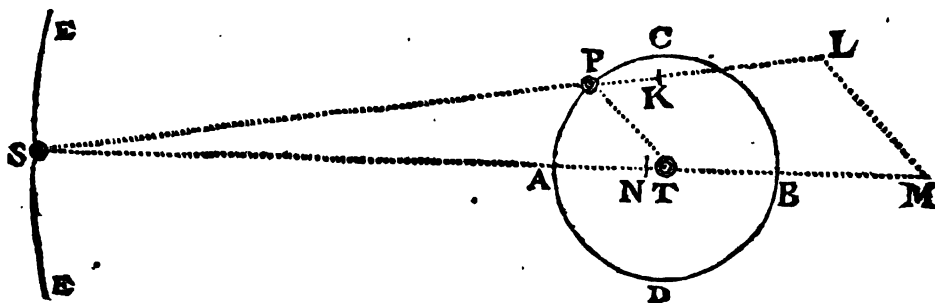
H h h 2



# 428 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mō-  
TO COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXVI.  
THEOR.  
XXVI.

Corol. 4. Orbita corporis  $P$ , cæteris paribus, curvior est in quadraturis quam in conjunctione & oppositione. Nam corpora velociora minus deflectunt à recto tramite. Et ( $P$ ) præterea vis  $KL$ , vel  $NM$ , in conjunctione & oppositione contraria est vi, quâ corpus  $T$  trahit corpus  $P$ ; ideoque vim illam minuit; corpus autem  $P$  minus deflectet à recto tramite ubi minus urgetur in corpus  $T$ .



Corol. 5. (q) Unde corpus  $P$ , cæteris paribus, longius recedet à corpore  $T$  in quadraturis, quam in conjunctione & oppositione. Hæc ita se habent excluso motu excentricitatis. Nam si orbita corporis  $P$  excentrica sit, excentricitas ejus (ut mox in hujus corol. 9. ostendetur) evadet maxima ubi apsidæ sunt in syzygiis; indeque fieri potest ut corpus  $P$ , ad apsidem summam appellens, absit longius à corpore  $T$  in syzygiis quam in quadraturis.

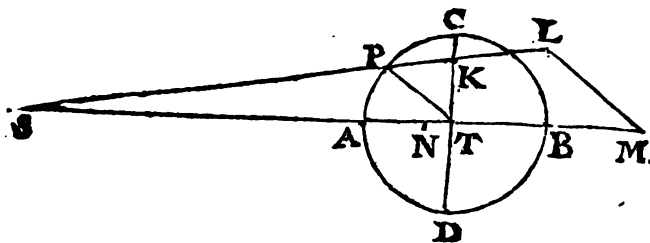
Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis  $T$ , quâ corpus  $P$  retinetur in orbe suo, augetur in quadraturis per additio-

(p) 499. *Et præterea vis KL &c.* Iisdem positis quæ in notâ superiori, rectæ  $SL$ ,  $SM$  sunt fere parallelæ, ac proinde  $TM = PL$  &  $LM = PT$  quam proximè; quare coincidente  $P$  cum  $A$  &  $K$  cum  $T$ , fit  $LM = AT = PK$ , &  $NM$  seu  $TM = PL = AT + KL$ , &  $NM - LM = KL$ , hoc est, vis tota perturbans quâ corpus  $P$  in conjunctione  $A$  à corpore  $T$  verius  $S$  retrahitur, est ut  $KL$  quam proximè; vi enim  $LM$  trahitur  $P$  verius  $T$  & vi  $NM$  à corpore  $T$  verius  $S$  retrahitur. Idem

eodem modo demonstratur, corpore  $P$  in oppositione  $B$  posito.

(q) \* *Unde corpus P &c.* Nam cum orbita corporis  $P$  curvior sit in quadraturis  $C$  vel  $D$  quam in syzygiis  $A$  &  $B$  (per cor. 4.) necesse est, cæteris paribus, ut in syzygiis  $A$  &  $B$  depressior sit quam in quadraturis  $C$  &  $D$  ad instar ellipseos cujus sit centrum  $T$  axis major  $CD$  axis minor  $AB$ . Hæc ita se habent; si, exclusis viribus perturbantibus, orbita corporis  $P$  fuerit circulus cujus centrum  $T$ .

ditionem vis  $LM$ , ac diminuitur in syzygiis per ablationem vis  $KL$ , & (r) ob magnitudinem vis  $KL$ , magis diminuitur quam augetur; est autem vis illa vi centripeta (*per corol. 2. prop. 1v.*) in ratione compositâ ex ratione simplici radii  $TP$  directè & ratione duplicatâ temporis periodici inversè: patet hanc rationem compositam diminui per actionem vis  $KL$ ; ideoque tempus periodicum, si maneat orbis radius  $TP$ , augeri, idque in subduplicatâ ratione, quâ vis illa centripeta diminuitur: atque ideo vel diminuto hoc radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minus quam in radii hujus ratione sesquiplicatâ, (*per corol. vi. prop. 1v.*) Si vis illa corporis centralis paulatim languesceret, corpus  $P$  minus semper & minus attraheretur.



(r) 500. *Est ob magnitudinem vis KL* &c. Si distantia mediocris  $SK$  vel  $ST$  ingens fuerit respectu radii  $TP$  orbitæ  $PAB$ , in loco quovis corporis  $P$ , erit vis  $LM$  quam proximè ad vim  $Nm$  ut sinus totus ad sinum triplum distantie angularis corporis  $P$  à quadraturâ proximâ. Nam ob ingentem distantiam corporis  $S$  (*ex hyp.*) lineæ  $SL$ ,  $SM$  sunt fere parallelæ ac proinde  $LM = PT$ ,  $NM$  seu  $TM = PL$ , &  $SP = SK$ ; cumque sit  $ST$  ad lineam quadraturarum  $CD$  perpendicularis, erit etiam  $SK$  ad eandem normalis, & existente  $PT$  radio, erit  $PK$  sinus anguli  $PTC$ , hoc est, sinus distantie angularis corporis  $P$  à quadraturâ proximâ  $C$ . Porro (*per prop. 66.*)  $SL: SK = SK^2: SP^2$ , adeoque  $SL: SK = SK^2: SP^2$ , hoc est,  $KL: SK = PK \times SK + SP: SP^2 = PK \times 2SP: SP^2 = 2PK: SP = 2PK: SK$ , ob  $SK = SP$ , &  $SK + SP = 2SP$ . Quare erit  $KL = 2PK$ , &

$PL$  seu  $NM = 3PK$ , hoc est, vis  $LM$  seu  $PT$  ad vim  $NM$  seu  $PL$  ut sinus totus  $PT$  ad  $3PK$  triplum sinum distantie angularis corporis  $P$  à quadraturâ proximâ.

501. *Coroll.* Vis  $KL$  in conjunctione  $A$ , est ad vim similem in oppositione  $B$ , ut  $AT$  ad  $TB$ , & si orbita  $PAB$  circularis fuerit vel circulo finitima, erit vis  $KL$  in syzygiis duplo major vi  $LM$  in quadraturis quam proxime. Nam corpore  $P$  in syzygiis verante, fit  $PK = AT = PT = LM$ , & proinde  $NM$  seu  $PL$  fit  $3LM$ , &  $KL = 2LM$ . Tandem iisdem positis, vis  $NM$  maxima est in syzygiis, quoniam ibi  $PK$  fit maxima, seu evadit  $AT$ , &  $NM = 3AT$ .

Unde ob magnitudinem vis  $KL$  (500. 501.) vis centripeta corporis centralis  $T$  magis diminuitur quam augetur, ideoque centienda est pro absolute diminutâ ab actione corporis  $S$ .

DE Mo-attractum perpetuò recederet longius à centro  $T$ ; & contra, TU COR-si vis illa augetur, accederet propius. Ergo si actio corporis FORUM. longinqui  $S$ , quâ vis illa diminuitur, <sup>(f)</sup> augeatur ac diminuat-  
LIBER tur per vices: augebitur simul ac diminuetur radius  $TP$  per vices;  
PRIMUS. & <sup>(t)</sup> tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione com-  
PROP. positâ ex ratione sesquuplicatâ radii, & ratione subduplicatâ;  
LXVI. quâ vis illa centripeta corporis centralis  $T$ , per incrementum  
THEOR. vel decrementum actionis corporis longinqui  $S$ , diminuitur vel  
XXVI. augetur. Co-

(f) \* *Augeatur ac diminuat per vices.* Quoniam vis quâ corpus  $P$  trahitur à corpore  $T$ , est ejusdem corporis  $P$  vis centripeta quâ in orbitâ suâ retinetur; si remissior fuerit vis illa, corpus  $P$  minus attractum à centro  $T$  longius recederet; & contra, si augeatur vis illa, corpus  $P$  ad  $T$  propius accedet. Austâ igitur actione corporis  $S$  in  $T$  per accessum corporis  $T$  ad  $S$ , augetur vis  $NM$ , minuiturque vis centripeta corporis  $P$ , ac proinde crescit distantia  $PT$ . Econtra autem decresciente corporis  $S$  actione per recessum corporis  $T$  ab  $S$  decrescit quoque  $NM$  & augetur corporis  $P$  vis centripeta, minorque fit distantia  $PT$ . Hæc omnia per vices contingent, ubi nempe corpus  $T$  corpori  $S$  proximius fuerit, augebitur radius  $PT$ , ubi verò remotius evadet minuetur radius.

(t) \* *Es tempus periodicum augebitur ac diminuetur &c.* Corpus  $P$  circa  $T$ , exclusâ corporis longinqui  $S$  vi ablatitiâ, in circulo  $PAD$  revolvatur, & accedente vi illâ ablatitiâ corporis  $S$  quæ, ob ingentem distantiam  $ST$ , parva admodum sit respectu vis quâ corpus  $P$  à corpore  $T$  trahitur, idem corpus  $P$  in orbe fere circulari adhuc revolvetur. Jam verò corporis circulum vel orbem circulo finitimum describentis vis acceleratrix versus  $T$  directâ est semper (per cor. 2. prop. 4.) in ratione compositâ ex ratione simplici radii  $TP$  qui dicatur  $R$  directè & ratione duplicatâ temporis periodici, quod dicatur inversè, hoc est, vis acceleratrix corporis  $P$  versus  $T$ , est ut  $\frac{R}{t^2}$ , & manente ra-

dio ut  $\frac{1}{t^2}$ ; sed vis acceleratrix in distantia datâ est ut vis absoluta corporis trahentis, ergò si corporis  $T$  trahentis vis absoluta dicatur  $V$ , erit  $V$  ut  $\frac{1}{t^2}$  &  $t^2$  ut

$\frac{1}{V}$ , ac  $t$  ut  $\frac{1}{\sqrt{V}}$  manente radio  $TP$  seu  $R$ . Porro vis acceleratrix quâ corpus  $P$  versus  $T$  trahitur, exclusâ vi ablatitiâ corporis  $S$ , est reciprocè ut quadratum distantie  $TP$ , hoc est directè ut  $\frac{1}{R^2}$  (ex hyp.)

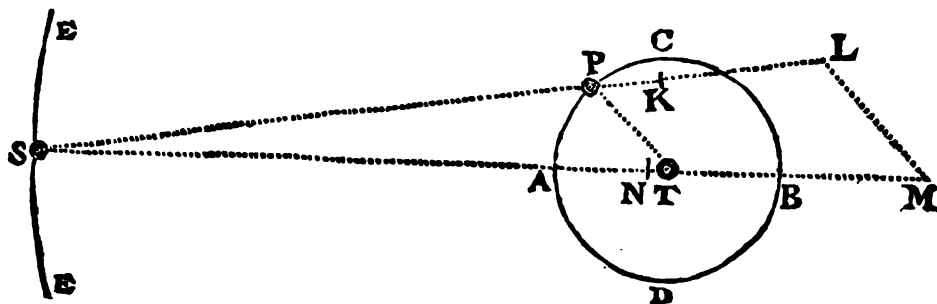
Et quoniam vis ablatitiâ corporis  $S$ , exigua admodum est respectu vis acceleratricis quâ corpus  $P$  à corpore  $T$  trahitur, accedente vi illâ ablatitiâ, vis reliqua acceleratrix in corpore  $P$  erit adhuc ut  $\frac{1}{R^2}$

quam proximè; quare eadem manente reliquâ vi centripetâ absolutâ corporis  $T$  & mutato utcumque radio  $R$ , quadratum temporis periodici  $t^2$  erit ut distantie cubus  $R^3$ . ac proinde  $t$  ut  $\sqrt{R}$ . (per coroll. 6. prop. 4.) hoc est tempus periodicum est in sesquuplicatâ ratione radii  $TP$ . Si igitur neque maneat radius idem, neque eadem vis centripeta absoluta in corpore  $T$ , sed per actionem corporis longinqui  $S$  radius augeatur, & vis centripeta minuatur, aut per diminutionem ejus actionis radius minuatur, & vis centripeta augeatur, quadratum temporis periodici  $t^2$  erit in ratione compositâ ex binis rationibus suprà inventis, nimirum ex ratione  $\frac{1}{V}$ , & ratione  $R$ , hoc est  $t^2$

erit

*Corol. 7.* Ex <sup>(u)</sup> præmissis consequitur etiam, quod ellipseos DE MOTU CORP. à corpore P descriptæ axis, seu apsidum linea, quoad motum angularem, progreditur & regreditur per vices, sed magis ta-

LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXVI.  
THEOR.  
XXVI



men progreditur, & per excessum progressionis fertur in consequentia. Nam vis quâ corpus P urgetur in corpus T in quadraturis, ubi vis MN evanuit, componitur ex vi LM & vi

cen-

erit ut  $\frac{R}{V}$ , & proinde : ut  $\sqrt{\frac{R}{V}}$ , aut quod idem est, tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione composita ex ratione  $\sqrt{R}$ , sesquiplicatâ radii, & ratione  $\frac{1}{\sqrt{V}}$  subduplicatâ hujus quâ vis illa centripeta corporis centralis T per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S diminuitur vel augetur; nam decrescente V crescit pariter  $\frac{1}{V}$ , & contrâ crescente V in eadem ratione decrescit  $\frac{1}{V}$ .

502. *Scholium.* Hinc ut David Gregorius in scholio ad prop. 17. Lib. 4. Astronomiæ physicæ & geometricæ observavit, si vis centripeta corporis centralis T aliunde quam per vim extraneam corporis S augeatur & minuat per vices, ut si corporis T vis centripeta absoluta supponatur ipsius massæ proportionalis & nova ei addatur & detrahatur per vices materia, atque inde ejus vis absoluta in eadem ratione augeatur & minuat, cor-

pus P in minori & majori orbitâ per vices revolvetur, diminuto & aucto per vices radio TP ejusque tempus periodicum minuetur & augebitur per vices in ratione composita ex ratione sesquiplicatâ radii directè & ratione subduplicatâ vis centripetæ absolutæ corporis T inversè ut supra. Vis enim acceleratrix composita & residua quâ corpus T auctum & diminutum per vices trahit corpus P est hic præcisè in duplicatâ ratione distantiz inversè, quod in casu coroll. 6. quam proximè tantum obtinet.

(u) \* *Ex præmissis.* Si corpus P circum T ellipsum circulo finitimam describat cujus umbilicus sit T hujus ellipseos axis major seu apsidum linea motu angulari circa umbilicum T per vices progreditur seu fertur in consequentia & regreditur, seu in antecedentia movetur; progreditur nempe, dum corpus P est in syzygiis A & B, regreditur verò dum corpus P est in quadraturis C & D, sed magis tamen progreditur quam regreditur, & per excessum progressionis fertur in consequentia.

DE Mo-centripeta, quâ corpus  $T$  trahit corpus  $P$ . Vis ( $\gamma$ ) prior  $LM$ ,  
 TU COR-si augeatur distantia  $PT$ , augetur in eâdem fere ratione cum  
 FORUM. hâc distantia, & vis posterior, decrescit in duplicatâ illâ ra-  
 LIBER tione, ideoque summa harum virium ( $z$ ) decrescit in minore  
 PRIMUS. quam duplicatâ ratione distantiae  $PT$ , & ( $a$ ) propterea (per  
 PROP.  $corol.$  1. prop. XLV.) efficit ut aux, seu apsis summa, regredia-  
 LXVI. tur. In conjunctione verò & oppositione vis, quâ corpus  $P$   
 THEOR. XXVI. urgetur in corpus  $T$ , differentia est inter vim, quâ corpus  $T$   
 trahit

( $\gamma$ ) \* Vis prior  $LM$  &c. Nam ob ingen-  
 tem corporis  $S$  à corporibus  $P$  &  $T$  di-  
 stantiam (ex Hyp.  $\beta$ )  $SL$  est fere paral-  
 lela  $SM$ , & proinde  $LM$  ipsi  $PT$  pa-  
 rallela crescit ubique ut  $PT$ , quampro-  
 ximè; in quadraturis verò  $LM$  coincidit  
 cum  $PT$ .

( $z$ ) \* Decrescit in minore quam du-  
 plicatâ illâ ratione, hoc est, non tantum  
 minuitur in distantia majore, nec tantum  
 augetur in distantia minore, quantum mi-  
 nueretur vel augetur, si vis tota acce-  
 leratrix, seu virium summa esset semper ut  
 quadratum distantiae reciproce.

( $a$ ) \* Et propterea per cor. 1. prop. 45.  
 Sit  $TP = A$ , &  $LM = c \times A$ ; c verò quan-  
 titas data, & vis quâ corpus  $P$  versus  $T$   
 exclusâ corporis  $S$  actione urgetur, erit (ex  
 Hyp.) ut  $\frac{1}{A^2}$ , & accedente vi exigua

$LM$  in quadraturis, harum virium summa  
 erit ut  $\frac{1}{A^2} + c \times A$ , adeoque hæc virium

summa decrescet in ratione paulò minore  
 quam in duplicatâ distantiae  $PT$  seu  $A$ .  
 Nam si distantia variabilis  $A$  evadat  $b \times A$ ,  
 sitque  $b$  numerus unitate major, erit vis  
 in simplici distantia  $A$  ad vim in distantia

majore  $b \times A$ , ut  $\frac{1}{A^2} + c \times A$ , ad  $\frac{1}{b^2 A^2}$

+  $c \times b A$ , hoc est, ut  $b b + c b b A$ , ad  $1 +$   
 $c b A$  five ut  $b b \times 1 + c A$ , ad  $1 \times 1 + c b A$ ;

hæc autem ratio minor est quàm ratio  
 $\frac{1}{A^2}$  ad  $\frac{1}{b^2 A^2}$ , seu  $b^2$  ad  $1$ , cum  $(1 +$   
 $c A)$  minus sit quàm  $1 + c b A$ . Pona-

mus itaque virium summam esse ut  $\frac{1}{A^2 - q}$ ,

seu ut  $A^{-2+q}$ , &  $q$ , numerum positivum  
 unitate longe minorem, & quoniam si mo-  
 tus totus angularis quo corpus  $P$  ab ap-  
 side unâ ad eandem apsidem redit, sit ad  
 motum angularem revolutionis unius seu  
 $360^\circ$ . ut numerus aliquis  $m$  ad  $n$  vis cen-

tripeta tota est ut  $A \frac{n n}{m m} - 1$ ; (per cor.

prop. 45.) erit hic  $\frac{n n}{m m} - 3 = q - 2, \frac{n n}{m m}$

$= 1 + q, \frac{n}{m} = \sqrt{1 + q}$ , &  $m$  ad  $n$ , seu

motus totus angularis ab apside ad ean-  
 dem apsidem ad  $360^\circ$ . ut  $1$ ; ad  $\sqrt{1 + q}$ ,  
 adeoque motus ille angularis ab apside

ad eandem  $= \frac{360^\circ}{\sqrt{1 + q}}$ , quare cum sit

$\sqrt{1 + q}$ , paulo major unitate, motus to-  
 tus angularis ab apside ad eandem apsi-  
 dem minor erit  $360^\circ$ . & ideo apsidem ob-

viam ibunt corpori  $P$  revolventi, seu mo-  
 vebuntur in antecedentia, aut quod idem  
 est, regredientur. Idem facile demonstra-

tur (per cor. 2. prop. 45.) vel per exem-  
 pla tertia. Cum enim vis tota sit (ex

Hyp.) ut  $\frac{1}{A^2} + c \times A$ , erit (loco cita-

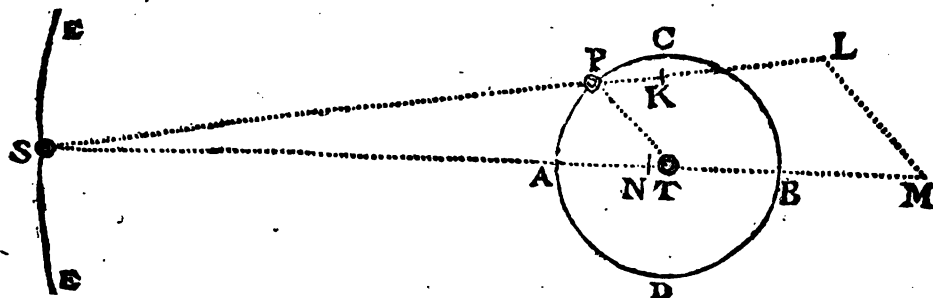
to), angulus revolutionis corporis inter apsi-

des summam & imam  $= 180^\circ \times \sqrt{\frac{1 + c}{1 + 4c}}$ ,

sed quoniam  $c$  est numerus positivus,  
 $\frac{1 + c}{1 + 4c}$ , est numerus unitate minor, ergò

angulus revolutionis corporis  $P$  inter apsi-

des minor est  $180^\circ$ .



trahit corpus  $P$ , & vim  $KL$ ; & differentia illa, (<sup>b</sup>) propterea quod vis  $KL$  augetur quamproximè in ratione distantiae  $PT$ , decrefcit in majore quam duplicatâ ratione distantiae  $PT$ , (<sup>c</sup>) ideoque (*per corol. 1. prop. XLV.*) efficit ut aux progredia-  
tur. In (<sup>d</sup>) locis inter syzygias & quadraturas pendet motus augis ex causâ utraque conjunctim, adeo ut pro hujus vel al-  
terius excessu progrediatur ipsa vel regrediatur. Unde cum  
vis  $KL$  in syzygiis fit quasi duplo major quam vis  $LM$  in  
quadraturis, excessus erit penes vim  $KL$ , transferetque augem  
in consequentia. Veritas autem hujus & præcedentis corollarii  
faci-

(<sup>b</sup>) \* *Propterea quod vis  $KL$  &c.* Est enim in syzygiis  $KL = 2 AT$ , seu  $2 PT$  quam proximè (501).

(<sup>c</sup>) \* *Ideoquæ per cor. 1. prop. 45.* Nam si in superiori calculo loco  $+ q$  scribatur  $-q$ , vel loco  $+c \times A$ , scriba-  
tur  $-c \times A$ , quod vis  $KL$  sit ablatitia,  
invenietur angulus totius revolutionis cor-  
poris  $P$  ab apside unâ ad eandem apsidem

$$= \frac{360^\circ}{\sqrt{1-q}}, \text{ vel angulus inter apsidem sum-}$$

$$\text{mam \& imam} = 180^\circ \times \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}. \text{ Est au-}$$

tem  $\sqrt{1-q}$ , numerus unitate minor, &

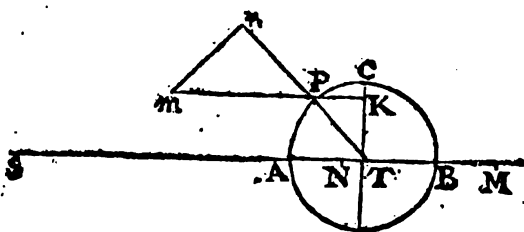
$$\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}} \text{ numerus unitate major, adeoque}$$

$$\frac{360^\circ}{\sqrt{1-q}}, \text{ arcus major } [360^\circ. \& 180^\circ$$

$$\times \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}, \text{ arcus major } 180^\circ. \text{ quare apsi-}$$

des in hoc casu progrediuntur.

Tom. I.

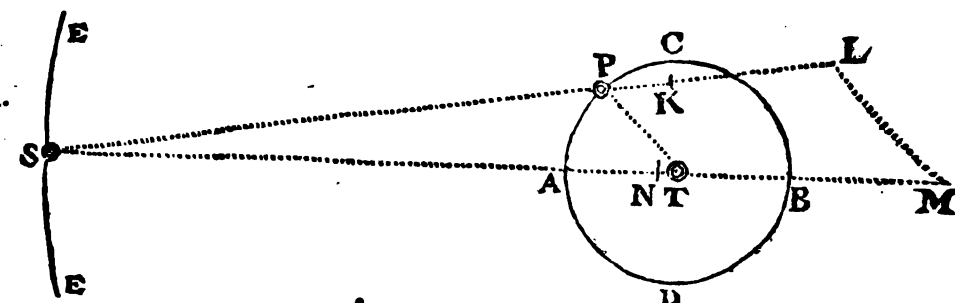


(<sup>d</sup>) 503. In locis inter syzygias & qua-  
draturas &c. Iisdem positis quæ in Lem-  
mate 500. queritur distantia angularis  
corporis  $P$  à quadraturâ  $C$ , v. gr. ubi ap-  
sides quiescunt. Per locum corporis  $P$   
agatur  $Pm$  parallela & æqualis  $NM$  seu  
 $TM$ , & erit  $Pm = 3 PK$  (500). Vis  
 $Pm$ , si in radium  $TP$  productum demit-  
tatur perpendicularum  $mn$ , resolvitur in vi-  
res  $Pn$ ,  $nm$ , quarum  $nm$  agendo secun-  
dum lineam radio perpendicularem, vim

I i i

ac-

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXVI.  
THEOR.  
XXVI.

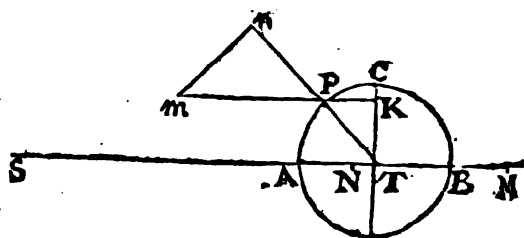


minuetur undique, decrefcetque in ratione plusquam duplicatâ  
distantiæ.

Co-

acceleratricem corporis *P* verſus *T* nec  
auget, nec minuit, & *P* n agendo ſecun-  
dum radium *TP* à *P* verſus *n*, vim illam  
acceleratricem corporis *P* minuit; viſ vo-  
rò *LM* ſeu *TP* vim accleratricem cor-  
poris *P* verſus *T* auget. Quare ubi erit  
 $Pn = PT$  viſ acceleratrix corporis *P* nec  
augebitur nec minuetur, & apſides quieſ-  
cent. Porro ob trianguſa *TPK*,  $mPn$  ſi-  
milis  $PT : PK = Pm$ , ſeu  $3 PK : Pn$  ſeu  
 $PT$ . Eſt igitur in loco quaſito *P*,  $3 PK^2$   
 $= PT^2$ , & proinde  $PT : PK = \sqrt{3} : 1$ .  
hoc eſt ſinus totus ad ſinum diſtantiæ an-  
gularis corporis *P* à quadraturâ proximâ  
ut  $\sqrt{3}$  ad 1, ſeu ut 1732. ad 1000. pro-  
xime; unde angulus *PTC* invenitur eſſe  
 $35^\circ. 26'$  circiter. Quieſcent igitur apſi-  
des in quatuor locis corporis *P* quæ à qua-  
draturis diſtant angulo  $35^\circ. 16'$ ; & hinc  
in ſingulis corporis *P* revolutionibus, cæ-  
teris paribus, apſides regredientur per gra-  
dus revolutionis corporis *P*,  $141^\circ$ , & pro-  
gredientur per grad. 219.

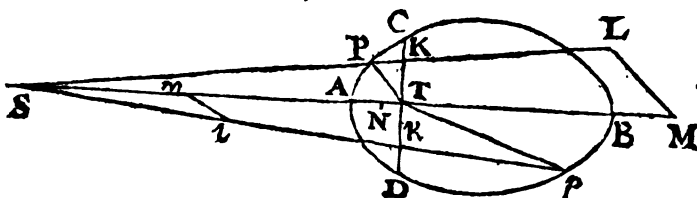
504. Iiſdem poſitis, ſi orbita *CPD*,  
circulo finiſſima ſit, erit viſ additiua *PT*  
 $= Pn$ , maxima in quadraturis. Nam cum  
ſit ſemper  $PT : PK = 3 PK : Pn$ , erit  $Pn$   
 $= \frac{3 PK^2}{PT}$ , ac proinde  $PT - Pn = PT$ .



$= \frac{3 PK^2}{PT}$ , quæ quantitas maximâ evadet  
ubi erit  $PK = 0$ , quod in quadraturis con-  
tingit.

(c) \* Namque horum aſſionibus &c. Hæc  
enim ratione corpus *P* erit ſemper in  
quadraturis ſimul & in ſyzygiis corporis,  
ſeu corporum *S*, adeoque cum viſ abla-  
titiua *KL*; in ſyzygiis & prope ſyzygias  
ſit ſerè duplo major quam viſ additiua  
*LM*, in quadraturis & prope quadraturas,  
aſſio corporis *T* minuetur undique, decreſ-  
cetque proinde in ratione plusquam dupli-  
catâ diſtantiæ *TP*.

*Corol. 8. (f)* Cum autem pendeat apsidum progressus vel regressus à decremento vis centripetæ factò in majori vel minori quam duplicatâ ratione distantiae  $TP$ , in transitu corporis ab apside imâ ad apsidem summam; ut & à simili incremento in reditu ad apsidem imam; atque ideo maximus sit ubi proportio vis in apside summâ ad vim in apside imâ maximè recedit à duplicatâ ratione distantiarum inversâ: manifestum est quod apsides in syzygiis suis, per vim ablatitiam  $KL$  seu  $NM-LM$ , progredientur velocius, inque quadraturis suis tardius recedent per vim addititiam  $LM$ . Ob diuturnitatem verò temporis, quo velocitas progressus vel tarditas regressus continuatur, fit hæc inæqualitas longè maxima.



(f) \* Cum autem (per corol. 7.) pendeat apsidum progressus vel regressus à decremento vis centripetæ factò in majori vel minori quam duplicatâ ratione distantiae  $TP$  quæ augetur in recessu à centro  $T$ , sive in transitu corporis  $P$  ab apside imâ ad apsidem summam, ut & à simili incremento in accessu ad centrum, sive in reditu ab apside summâ ad apsidem imam, manifestum est progressum vel regressum apsidum maximum esse ubi ratio vis in apside summâ ad vim in apside imâ maximè recedit à duplicatâ ratione distantiarum inversâ, porro dum linea apsidum seu major axis ellipseos  $B C A D$ , cujus umbilicus est  $T$ , in syzygiis  $A, B$  versatur, ratio vis totius corporis  $P$  in apside summâ positi ad vim ejus in apside imâ versantis, magis recedit à duplicatâ ratione distantiarum inversâ quam in alio quovis lineæ apsidum situ. Sit enim  $B$  apsis summa,  $A$  apsis ima, & erit  $TB$  distantia maxima,  $AT$  minima (ex naturâ ellipseos). Unde corpore  $P$  in conjunctione  $A$  versante erit vis ablatitia  $KL$  (seu differentia virium acceleratricium cor-

porum  $T$  &  $P$  versus  $S$ ) omnium minima, & corpore  $P$  in oppositione  $B$  versante, erit differentia illa  $KL$  omnium maxima. Cum autem ob ingentem corporis  $S$  distantiam (ex Hyp.) sit fere  $KL$  ad  $kl$  ut  $AT$  ad  $TB$  (501) ratio vis corporis  $P$  in  $A$  versantis ad vim illius in  $B$  positi, exprimi hic poterit per ratio-

$$\text{nem } \frac{b}{AT^2} - c \times AT, \text{ ad } \frac{b}{TB^2} - c \times TB,$$

( si ratio  $b$  ad  $c$  exprimat rationem vis absolutæ trahentis corpus  $P$  versus  $T$ , ad vim absolutam ablatitiam  $KL$  ) seu reductione ad eundem denominatorem fa-

ctâ, per rationem  $TB^2 \times b - c \times AT$ ;

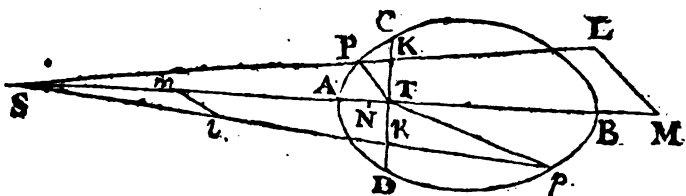
ad  $AT^2 \times b - c \times TB$ , quæ ratio eò magis recedit à ratione  $TB^2$  ad  $AT^2$ , seu duplicatâ distantiarum inversâ, quo magis ratio quantitatis  $b - c \times AT$ , ad quantitatem  $b - c \times TB$ , recedit à ratione æqualitatis, seu quo minor est  $AT$  respectu  $TB$ , quare dum linea apsidum est in syzygiis  $A, B$ , ratio vis totius in apside summâ ad vim in apside imâ maxi-



DE MO-  
TU COR-  
PORUM  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXVI.  
THEOR.  
XXVI.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM  
LIBER  
PRIMUS.  
PROF.  
LXVI.  
THEOR.  
XXVI.

*Corol. 9.* Si corpus aliquod; vi reciproce proportionali quadrato distantiae suae à centro revolveretur circa hoc centrum in ellipsi; & mox, in descensu ab apside summâ seu auge ad apsidem imam; vis illa per accessum perpetuum vis novæ augeretur in ratione plusquam duplicatâ distantiae diminutæ: manifestum est quod corpus, perpetuò accessu vis illius novæ impulsus semper in centrum, magis vergeret in hoc centrum quam si urgeretur vi solâ crescente in duplicatâ ratione distantiae diminutæ; ideoque orbem describeret orbe elliptico interiorem, & in apside imâ propius accederet ad centrum quam prius. ( 8 ) Orbis igitur, accessu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis in recessu cor-



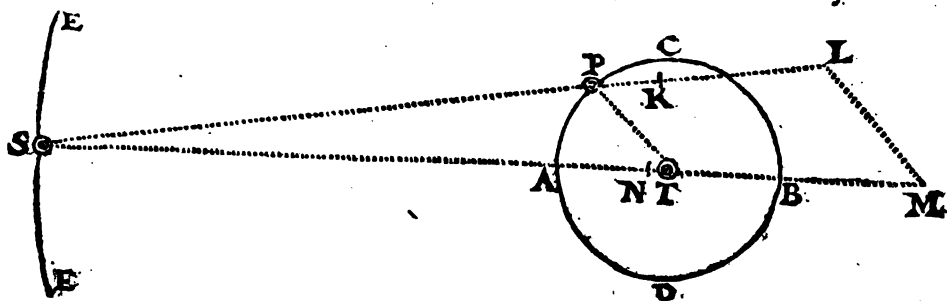
me recedit à ratione duplicarè distantiarum inversà. In hoc igitur lineæ apsidum situ, apides celerrimè progrediuntur, corpore P in syzygiis vel prope syzygias versante, Dum vero corpus P est in quadraturis C, D, sit vis  $LM = C T$ , vel  $D T$ ; Est autem ex naturâ ellipseos, summa linearum  $C T$ ,  $D T$ , omnium minima; quare in integrâ corporis P revolutione, apides viribus  $C T$ ,  $D T$  tardissimè regrediuntur in quadraturis corporis P, & celerrimè progrediuntur in ipsius syzygiis, atque adeo excelsus progressus supra regressum erit in hoc casu omnium maximus, & apides in integrâ corporis P revolutione celerrimè movebantur in consequentia. Ob contrarias prorsus causas, si lineæ apsidum in quadraturis posita sit, apides velocissimè regrediuntur, corpore P in quadraturis versante, & tardissimè progrediuntur corpore P in syzygiis existente, & ex hac utraq; causâ fieri poterit ut integrâ corporis P circum T revolutione, regressus apsidum superet eorum progressum, proindeque ut apides in antecedentia ferantur; sed quoniam, cæteris paribus, vis

ablatitia K. L. quæ progressum apsidem in syzygiis corporis P inducit est ( 500 ) fere duplo major vi adjectitiâ L M quæ apsidum regressum in quadraturis corporis P producit , excessu progressus supra regressum , apsidæ progrediuntur in integrâ sui revolutione circum T, hoc est, eo tempore quo apsidæ ex T: visæ omnes cum corpore S, aspectus subeunt; augetur verò progressus ille, si corpora P & S in suis orbitis ferantur in eandem plagam; In hac enim hypothesi, apsidæ diutius hærent in syzygiis quam in quadraturis, quia in syzygiis progrediuntur cum corpore S, atque adeò diutius illud quasi comitantur, in quadraturis verò feruntur in antecedentia & corporis S in consequentia revolvantis aspectum quadratum veluti fugiunt; unde fit ut apsidæ diutius progrediuntur in syzygiis suis quam regrediuntur in suis quadraturis.

(g) \* Orbis igitur accessu hujus vis novæ fiet magis excentricus; manentq; enim distantia apudis summæ ab orbis umbilico, decrescet distantia apudis imæ ab eodem umbilico, majorque proinde erit ratio prioris distantia ad posteriorem, quam

corporis ab apside imâ ad apsidem summam, decresceret iis-  
dem gradibus quibus ante creverat, redieret corpus ad distan-  
tiam priorem, ideoque si vis decrescat in majori ratione, cor-  
pus jam minus attractum ascendet ad distantiam majorem &  
sic orbis excentricitas adhuc magis augebitur. Quare si ra-  
tio incrementi & decrementi vis centripetæ singulis revolutionibus  
augeatur, augebitur semper excentricitas; (h) & contra, dimi-  
nuetur eadem, si ratio illa decrescat. Jam verò in systemate

DE MO-  
TU COR-  
PORUM:  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXVI.  
THEOR.  
XXVI.



corporum T, P, S, ubi apsidæ orbis  $PAB$  sunt in quadra-  
turis, ratio illa incrementi ac decrementi minima est, & maxima  
fit ubi apsidæ sunt in syzygiis. Si apsidæ constituentur in qua-  
draturis, ratio prope apsidæ minor est & prope syzygias major  
quam duplicata distantiarum, & ex ratione illâ majori oritur  
augis motus directus, (i) uti jam dictum est. (k) At si con-  
sideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progressu  
inter-

si vis illa nova non accessisset, hoc est, orbis fiet magis excentricus.

(h) \* Et contra &c. Si in descensu corporis ab apside summâ ad apsidem imâ, vis centripeta augeatur minus quam in duplicatâ ratione distantie diminuitur, corpus describet orbem orbi elliptico exteriori, & in apside imâ, minus accedet ad centrum quam prius, hoc est, orbis fiet minus excentricus, & excentricitas adhuc minuetur, si in corporis ascensu ab apside imâ ad summam, vis centripeta minus decrescat quam antea creverat. Quare si ratio incrementi & decrementi vis centripetæ singulis revolutionibus minuat, minuetur semper excentricitas.

(i) \* Uti jam dictum est (Cor. 7.)

(k) \* At si consideretur ratio incrementi

si vel decrementi totius in progressu corporis P inter apsidæ in quadraturis C, D constituit, hæc minor est quam duplicata distantiarum. Sit enim apsis ima C, summa D, umbilicus T, erit (ex Dem.) vis in apside imâ ad vim in apside summâ ut

$$\frac{b}{CT^2 + n \times CP}, \text{ ad } \frac{b}{TD^2 + n \times TD}$$

(si ratio b ad n exprimat rationem vis absolutæ trahentis corpus P versus T ad vim absolutam additionem LM) & reductione ad eandem denominationem factâ ut  $TD^2 \times b + nCT$ ; ad  $CT^2 \times b + nTD$ , quæ ratio minor est quam ratio  $TD^2$ , ad  $CT^2$ , ob  $TD$ , majorem quam  $CT$ ; & quoniam in hoc lineæ apsidum situ ratio  $TD$  ad  $CT$  seu ratio distantiarum umbilici Ta-

**DE MO.** inter apfides, hæc minor est quam duplicata distantiarum. **Vis**  
**TU COR-** in apfide imâ est ad vim in apfide summâ in minore quam du-  
**FORUM.** plicatâ ratione distantiae apfidis summæ ab umbilico ellipseos  
**LIBER** ad distantiam apfidis imæ ab eodem umbilico, & contra, ubi  
**PRIMUS.** apfides constituuntur in syzygiis, vis in apfide imâ est ad vim  
**PROP.** in apfide summâ in maiore quam duplicatâ ratione distantiarum.  
**LXVI.** **THEOR.** Nam vires  $L M$  in quadraturis additæ viribus corporis  $T$   
**XXVI.** componunt vires in ratione minore, & vires  $KL$  in syzygiis  
 subductæ à viribus corporis  $T$  relinquunt vires in ratione ma-  
 jore. Est igitur ratio decrementi & incrementi totius, in tran-  
 situ inter apfides, minima in quadraturis, maxima in syzygiis:  
 & propterea in transitu apfidum, à quadraturis ad syzygias per-  
 petuò augetur, augetque excentricitatem ellipseos; inque transi-  
 tu à syzygiis ad quadraturas perpetuò diminuitur, & excentri-  
 citatem diminuit.

*Corol. 10.* Ut rationem ineamus errorum in latitudinem, fin-  
 gamus planum orbis  $EST$  immobile manere; & ex errorum  
 expo-

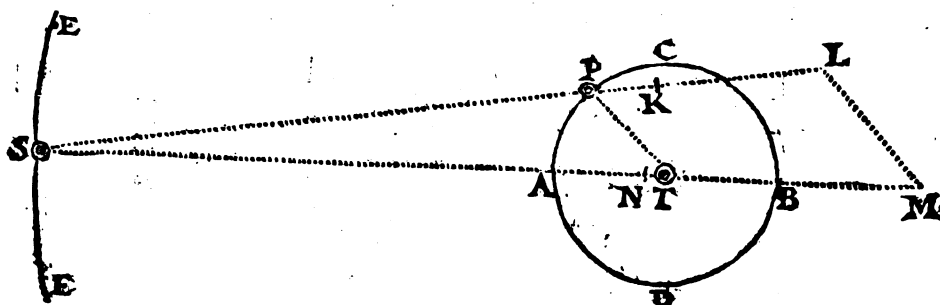
quadraturis maxima est, ( ex naturâ ellip-  
 seos ) patet rationem totius decrementi &  
 incrementi vis centripetæ in transitu cor-  
 poris  $P$  inter apfides minimam esse in qua-  
 draturis apfidum. Et contrâ si fuerit  $A$   
 apfis imâ,  $B$  apfis summa, erit vis in apfi-  
 de imâ ad vim in apfide summâ ut  $T B^2 \times$   
 $b - c A T$ , ad  $A T^2 \times b - c T B$ ,  
 adeoque in maiori ratione quam  $T B^2$ ,  
 ad  $A T^2$ , & quoniam ratio  $T B$ , ad  $A T$ ,  
 in his apfidum locis maxima est, ex na-  
 turâ ellipseos, ratio decrementi & incre-  
 menti totius in transitu inter apfides, ma-  
 xima est in syzygiis apfidum, & propter-  
 eâ singulis corporis  $P$  revolutionibus in  
 transitu apfidum à quadraturis ad syzygias,  
 hæc ratio perpetuò augetur, augetque ex-  
 centricitatem ellipseos, & in transitu ap-  
 fidum à syzygiis ad quadraturas perpetuò  
 diminuitur, & excentricitatem diminuit.  
 Maxima ergo est orbis excentricitas, ubi  
 apfides sunt in syzygiis, minima ubi sunt  
 in quadraturis.

105. Ex his etiam sequitur in unâquâ-  
 que corporis  $P$  circum  $T$  revolutione ex-

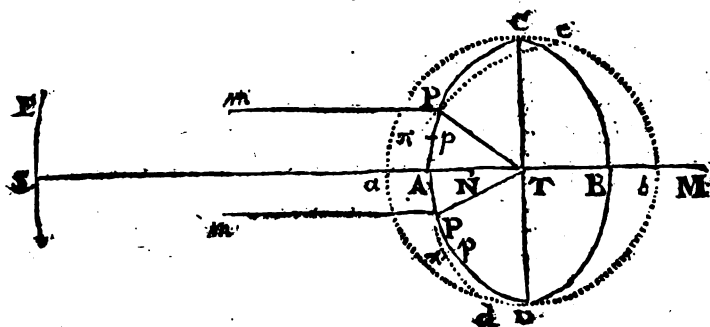
centricitatem orbis circa syzygias corpo-  
 ris  $P$  augeri, & circa ejus quadraturas mi-  
 nuï, minimamque esse in illius quadratu-  
 ris, maximam in syzygiis, cæteris paribus.  
 Nam ( per cor. 7. ) corporis  $P$  vis centri-  
 peta tota in syzygiis decrescit in maiori  
 quam duplicatâ ratione distantiae auctæ, &  
 crescit in maiori ratione quam duplicatâ  
 distantiae diminutæ, & in quadraturis con-  
 trâ. Quare corpus  $P$ , in syzygiis & prope  
 syzygias describit partem orbis magis  
 excentrici, in quadraturis verò & prope  
 quadraturas partem orbis minus excentri-  
 ci ( ex demonstratis initio cor. 9. ) Et  
 quoniam vis addititia  $L M$  in quadraturis  
 corporis  $P$  maxima est, & vis ablatitia  
 $KL$  in syzygiis ejus etiam maxima, vis  
 autem addititia excentricitatem diminuit  
 & ablatitia auget, manifestum est quod  
 ( cæteris paribus ) in unâ corporis  $P$  re-  
 volutione, excentricitas orbis minima sit  
 in quadraturis corporis  $P$ , & maxima in  
 illius syzygiis, atque adeò quod à quadra-  
 turis ad syzygias perpetuò augeatur, & à  
 syzygiis ad quadraturas perpetuò minuatur.

expositâ causâ manifestum est, quod ex viribus  $NM$ ,  $ML$ , De Mo-  
quæ sunt causa illa tota, vis  $ML$  agendo semper secundum pla-  
num orbis  $PAB$ , nunquam perturbat motus in latitudinem; quod-  
quævis  $NM$ , ubi nodi sunt in syzygiis, agendo etiam secun-

TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXVI.  
THEOR.  
XXVI.



dum idem orbis planum; (1) non perturbat hos motus; (m)  
ubi verò sunt in quadraturis, eos maximè perturbat, corpusque  $P$   
de plano orbis sui perpetuò trahendo, (n) minuit inclinationem  
plani in transitu corporis à quadraturis ad syzygias, augetque vi-  
cissim.



(1) \* Non perturbat hos motus. Pa-  
ret per cas. 2. prop. 66.

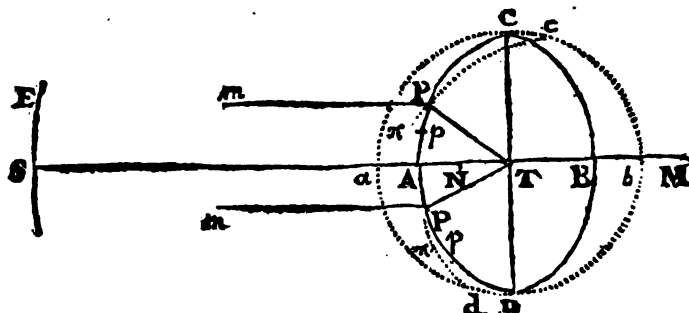
(m) 506. Ubi verò sunt in quadraturis  
eos maximè perturbat; Ubi nodi sunt in  
quadraturis C & D inclinatio directionis  
vis  $NM$  (quæ lineâ  $Pm$  exhibetur) ad  
planum orbitæ corporis  $P$  maxima est, ut  
potè æqualis planorum  $CAD$ , EST incli-  
nationi & proinde, cæteris paribus, maxi-  
me potenter agit; in alio enim lineæ no-  
dorum situ, minor est inclinatio directio-

nis vis  $NM$  ad planum orbitæ corporis  $P$ ;  
& evanescit cum nodi sunt in syzygiis,  
crescitque aded in transitu nodorum à  
syzygiis ad quadraturas, & contrà decre-  
cit in eorum transitu à quadraturis ad sy-  
zygias.

(n) 507. Minuit inclinationem plani &c.  
Si orbitæ corporis  $P$  nodi in quadraturis C,  
D constituentur, angulus inclinationis orbi-  
tæ ad planum in motum  $DST$  perpetuò  
minuitur in transitu corporis  $P$  à quadra-  
tutis

DE MO- cissim eandem in transitu à syzygiis ad quadraturas. Unde fit  
TU COR- ut (°) corpore in syzygiis existente inclinatio evadat omnium  
PORUM.

LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXVI.  
THEOR.  
XXVI.



turis ad syzygias, augetur verò in transitu corporis à syzygiis ad quadraturas, & in utroque transitu nodi regrediuntur. Sic enim orbitæ PAB pars CAD suprà planum immotum EST elevata, altera verò pars CBD infrà illud depressa intelligatur; per locum corporis P agatur recta Pm parallela lineæ TS, exhibens directionem vis NM, & corpus P feratur primum à nodo seu quadraturâ C ad conjunctionem A, & quoniam corpus P vi revolutionis per arcum Pp urgetur, & vi NM per rectam Pm trahitur, tempore quam minimo, vi compositâ, describet lineolam Pπ quæ non est in plano CPT, sed ab eo descehit versus Pm, adedque corpus movetur in plano TPπ quod productum plano EST non occurret in C sed ultra C versus oppositionem B Centro T & intervallo TP describatur in plano EST circulus CADb, in plano CPD circuli arcus PC, & in plano πPT arcus Pc circulo CADb, occurrens in c. Et quoniam vis NM minima est respectu vis revolutionis corporis P, angulus CPc, inclinationis planorum CPT & cPT minimus est seu infinitesimus, & arcus Pc ab arcu PC nonnisi minimâ seu infinitesimâ quantitate differt; quare cum (ex hyp.) arcus PC à quadrante CA differat finitâ quantitate PA, summa arcuum PC, Pc semicirculo minor est, hinc in triangulo spherico CPc, angulus externus PCa (per prop. 13. sphericorum

Menelai, vel per theor. 33. Sphericorum Clariss. Wolfii), major est angulo interno opposito P c C, hoc est, inclinatio plani cPT ad planum immotum EST minor est inclinatione plani CPT ad idem planum EST. In transitu igitur corporis P à quadraturâ C ad conjunctionem A orbitæ inclinatio perpetuò minuitur, & quoniam nodus C transfertur in c, sitque proinde obviam corpori revolventi, nodi regrediuntur. Eodem modo demonstratur inclinationem minui & nodos regredi in transitu corporis à quadraturâ D ad oppositionem B. Jam feratur corpus à conjunctione A ad quadraturam proximam D, & in loco quovis P, duplici vi, nempe vi revolutionis per arcum Pp & vi NM per rectam Pm urgetur, atque aded describit lineolam Pπ, quæ ab arcu Pp versus Pm declinat. Quare si centro T & intervallo TP describantur ut suprà tres arcus PD, a D, Pd, eodem modo demonstrabitur nodum D transferri in antecedentia in d, & angulum Pd a majorem esse angulo interno opposito P D d, hoc est, inclinationem orbitæ augeri in transitu corporis P, à conjunctione ad quadraturam proximam, & eadem eodem modo ostenduntur fieri in transitu ab oppositione B ad quadraturam C. Q. E. D.

(°) \* Corpore in syzygiis existente. Vis enim NM, cæteris paribus maxima est in syzygiis (401).

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 441

minimâ, (P) redeatque ad priorem magnitudinem circiter, ubi De Mo-  
corpus ad nodum proximum accedit. (q) At si nodi consti-  
TU COR-

tuan-FORUM.

LIBER

PRIMUS.

PROP.

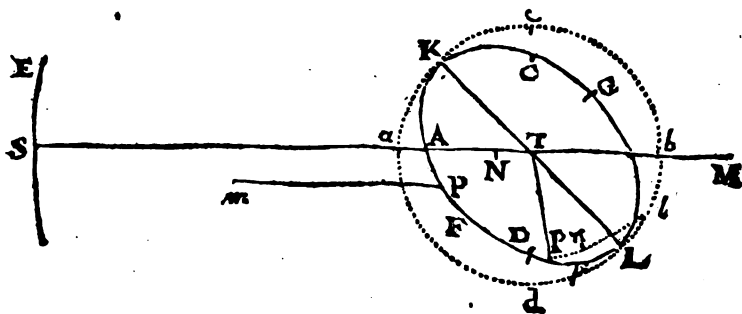
LXVI.

THEOR.

XXVI.

(p) \* *Redeatque ad priorem magnitudinem circiter.* Si enim orbita C A D B perfectè circularis maneret, æqualis esset vis N M in paribus corporis P distantis à nodis C & D, in utroque quadrante C A & A D, vel D B & B C; quare cum orbita C A D, circulo finitima supponatur, & per vim exiguam N M minuatur incli-

natio plani in transitu corporis P à quadraturis ad syzygias, & contrà augeatur per æqualem vim N M in transitu corporis P à quadraturis ad syzygias; liquet quòd inclinatio redeat ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus P à syzygiâ ad nodum proximum in quadraturâ positum accedit.

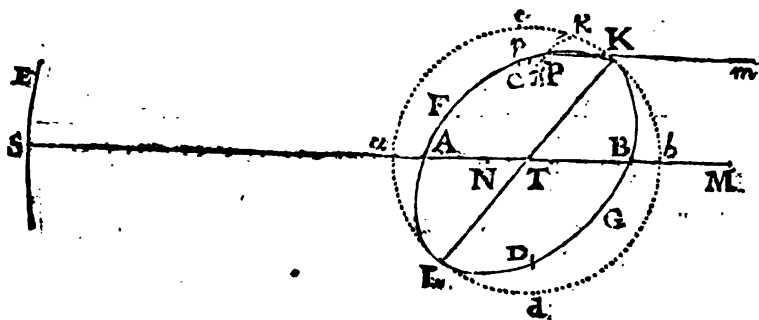


(q) 508. *At si nodi constituantur in distantibus post quadraturas, id est in locis K & L ita ut anguli K T c, K T a sint æquales, seu 45°. 1°. Inclinatio plani perpetuò minuitur in transitu corporis P à nodo ad gradum inde nonagesimum F vel G. 2°. Auetur in transitu à gradu illo 90°. ad quadraturam proximam. 3°. In utroque transitu regrediuntur nodi. 4°. In transitu à quadraturâ ad nodum proximum inclinatio minuitur & nodi progrediuntur. 1<sup>um</sup>, 2<sup>um</sup>, & 3<sup>um</sup>. Eodem modo demonstrantur ac superius (507). Quartum ita ostenditur. Dum corpus P à quadraturâ D ad nodum proximum L fertur, directio vis N M, quæ antè dirigebatur à P versus m, in contrariam mutatur; Quare corpus P*

inter D & L positum vi revolutionis urgetur per arcum P p & vi N M ab illo arcu retrahitur versus M atque vi utrâque fertur tempore minimo per lineolam P π quæ ab arcu P p in plagam M a deflectit. Si itaque centro T & intervallo T P describantur tres arcus circulares P L, P π, L l b a, in planis T P L, T P π, E S T eodem modo ac in notâ 507. patet angulum P l L minorem esse angulo P L a. Unde in transitu corporis à quadraturâ D ad nodum proximum L inclinatio orbitæ minuitur & nodus progreditur; eadem fieri in transitu corporis à quadraturâ C ad nodum proximum K, eodem modo demonstratur. Q. E. D.

# 442 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo tuantur in octantibus post quadraturas, id est, inter *C & A*,  
TU COR- *D & B*, intelligitur ex modo expositis, quod, in transitu  
PORUM. corporis *P* à nodo alterutro ad gradum inde nonagesimum, in-  
LIBER clinatio plani perpetuo minuitur; deinde in transitu per proxi-  
PRIMUS. mos 45 gradus, usque ad quadraturam proximam, inclina-  
PRO P. tio augetur, & postea denuò in transitu per alios 45 gradus,  
LXVI. usque ad nodum proximam, diminuitur. Magis itaque dimi-  
THEOR. nuitur inclinatio quàm augetur, (r) & propterea minor est sem-  
XXVI. per in nodo subsequente quàm in præcedente. (f) Et simili ra-  
tiorcinio, inclinatio magis augetur, quàm diminuitur, ubi nodi  
sunt.



(r) \* *Es propterea minor est semper inclinatio in nodo subsequente quàm in præcedente, quod verum quoque est, ubicumque constituatur nodus K inter c & a, ut patet ex ipsis demonstrationibus in notis 507. & 508. traditis.*

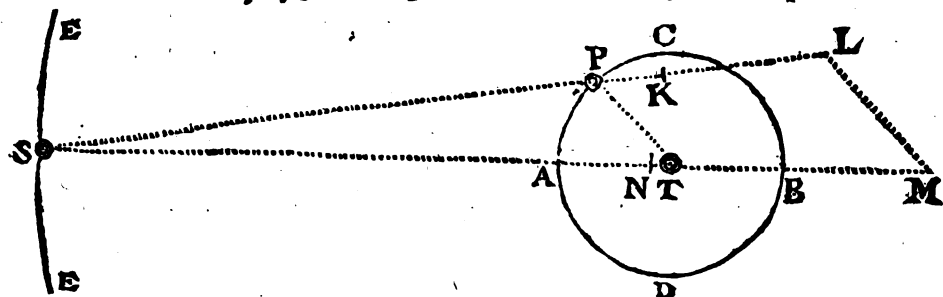
(f) 509. *Es simili ratiocinio &c.* Si nodus K constituatur inter quadraturam C vel c & oppositionem B vel b, & nodus oppositus L inter quadraturam D vel d, & conjunctionem A seu a, feraturque corpus à nodo K per C ad alterum nodum L. 1°. In transitu corporis à nodo ad quadraturam proximam inclinatio plani perpetuò augetur & nodi progrediuntur. 2°. In transitu à quadraturâ C vel D ad gradum à nodo nonagesimum F vel G inclinatio minuitur & nodi regrediuntur. 3°. In transitu à gradu illo 90°. ad nodum proximam inclinatio augetur & nodi regrediuntur. 2<sup>aa</sup>. & 3<sup>aa</sup>. demonstrantur prorsus ut in notâ 507. 1<sup>aa</sup>. verò ita ostenditur.

Dum corpus P versatur inter nodum K & quadraturam C, vi revolutionis urgetur per arcum Pp, & vi NM trahitur secundum directionem Pm in plagam M, adeoque vi utraque describet tempusculo minimo lineolam Pπ, quæ ab arcu Pp deflectet versus Pm; quare si centro T, radio TP, describantur ut supra arcus PK, πPK, Kkca in planis TpP, TπP, EST patet propositum, ut in notâ 507.

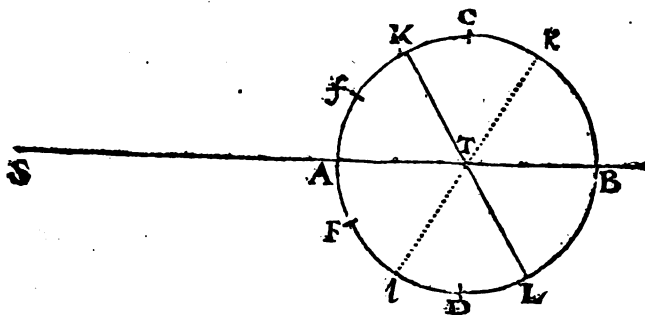
510. Coroll. Ex tribus superioribus demonstrationibus (507. 508. 509.) inter se collatis, manifestum est nodos progredi quamdiu corpus P inter quadraturam alterutram & nodum quadraturæ proximam versatur; eos verò regredi, dum corpus P in aliis quibuscumque locis versatur. Unde sequitur in singulis corporis P à nodo ad nodum revolutionibus nodos magis regredi quàm progredi, adeoque absolute regredi nisi fuerint in syzygiis.

sunt in octantibus alteris inter  $A$  &  $D$ ,  $B$  &  $C$ . (t) Inclina-  
tio igitur ubi nodi sunt in syzygiis est omnium maxima. In tran-  
situ eorum à syzygiis ad quadraturas, in singulis corporis ad no-

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXVI.  
THEOR.  
XXVI.



dos appulsibus, diminuitur; fitque omnium minima; ubi nodi  
sunt in quadraturis, & corpus in syzygiis: dein crescit iisdem  
gradibus, quibus antea decreverat, nodisque ad syzygias proxi-  
mas appulsis, ad magnitudinem primam revertitur.



(t) \* Inclinatione igitur ubi nodi sunt  
in syzygiis &c. Quoniam in singulis cor-  
poris P à nodo ad nodum revolutionibus,  
linea nodorum regreditur (510) & in tran-  
situ nodorum à syzygiis A & B ad qua-  
draturas C & D, inclinatio orbitæ per-  
petuò minuitur (508.) deinde verò in tran-  
situ nodorum à quadraturis C & D, ad  
syzygias B, & A, perpetuò augetur (509.),  
manifestum est inclinationem minimam esse  
ubi nodi sunt in quadraturis & corpus  
P in syzygiis (in quibus vis NM, cæte-  
ris paribus, maxima est) & maximam in-  
clinationem esse ubi nodi sunt in syzygiis.  
Porro sunt nodi K & L inter C & A,  
D & B primum, deinde regrediendo tran-  
seant in loca k & l, inter C & B, D  
& A, sintque arcus CK & Ck, æquales.

In primo casu inclinatio minuitur in tran-  
situ corporis P, per quadrantem KF, (508.)  
& in secundo casu æqualibus viribus au-  
getur per quadrantem Fl, (509.) In pri-  
mo casu inclinatio augetur per arcum FD  
(508.), & in secundo casu æqualibus vi-  
ribus minuitur per arcum c f = FD (509.)  
Tandem in primo casu, inclinatio minui-  
tur per arcum DL, (508.) & in se-  
cundo casu augetur æqualibus viribus per  
arcum æqualem k C, (509.) Quare, cæ-  
teris paribus, in transitu nodorum à qua-  
draturis ad syzygias inclinatio planorum  
iisdem gradibus crescit quibus antea de-  
creverat in transitu nodorum à syzygiis ad  
quadraturas, ideoque nodis ad syzygias  
proximas appulsis, ad magnitudinem pri-  
mam revertitur.

Kkk 2



**PRIMUS.**

**PROP.**

**LXVI.**

**THEOR.**

XXVL

[illegible]

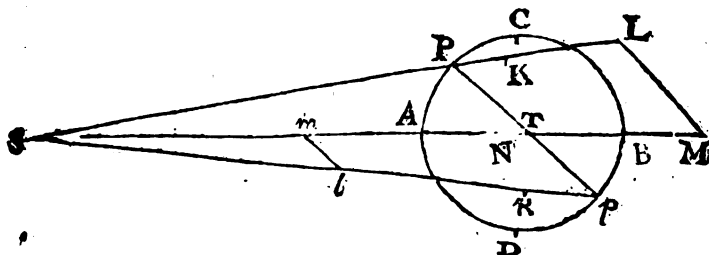
Co.

571: *Lemma.* Si fuerint tres quantitates  $a, a + b, a + 2b$  in continuâ proportione arithmetica, ratio 1<sup>a</sup>: ad 1<sup>am</sup>, (quæ est tribus esse minima) major erit quàm ratio 3<sup>a</sup>: (quæ est maxima) ad 1<sup>am</sup>. Est enim  $a + b : a = a + b \times a + b : aa + ab = aa + 2ab + bb : aa + ab$ ; sed est  $a + 2b : a + b = aa + 2ab : aa + ab$ . Ergo cum ratio  $aa + 2ab + bb$  ad  $aa + ab$  major sit quàm ratio  $aa + 2ab$  ad  $aa + ab$ , erit ratio  $a + b$  ad  $a$  major ratione  $a + 2b$  ad  $a + b$ .

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 445

*Corol. 12.* Omnes illi in his corollariis descripti errores sunt DE Mo-  
paulò majores in conjunctione corporum P, S, quàm in eo-  
rum oppositione; (\*) idque ob majores vires generantes NM<sup>PORUM.</sup>  
& ML. LIBER PRIMUS.

*Corol. 13.* Cùmque rationes horum corollariorum non pendeant PROP.  
à magnitudine corporis S, obtinent præcedentia, omnia ubi cor-  
poris S tanta statuitur magnitudo, (γ) ut circa ipsum revolvatur THEOR.  
corporum duorum T & P systema. Et ex aucto corpore S auc-  
tâque



(\*) \* Idque ob majores vires generantes  
NM & ML. Vis LM in conjunctione est ut

$\frac{AT}{SA}$ , & vis l m in oppositione est ut

$\frac{TB}{SB}$ , (495). Quare (cæteris paribus) hoc

est, si fuerit  $AT = TB$  vis ME in con-

junctione major erit vi m. l in opposi-

tione propter SA minorem quam SB:

Quod erat unum. Porro si AT & BT

sint æquales, tres lineæ SA, ST, SB erunt

in continuâ proportionem arithmetica &

proinde SK mediocris distantia corporis

P ab S erit æqualis ST, & quoniam SK

exhibet vim acceleratricem corporis P ver-

fusus S in mediocri distantia SK, & SN ex-

ponit vim acceleratricem corporis T ver-

fusus S, (prop. 66.) erit  $SN = ST$ , atque

adeò  $NM = TM$ , &  $mN = Tm$ . Sed quo-

niam  $PT$ , seu  $AT : ST = LM : SM$ ,

$$Tm = ST - sm = \frac{ST \times AT - ST \times lm}{AT};$$

undè differentia  $TM - Tm$ , erit ut  $ST \times LM$

$+ ST \times lm - ST \times 2 AT$ , hoc est, ut

$LM + lm - 2 AT$ ; Est autem summa  $LM$

$+ lm$ , major quàm  $2 AT$ . Nam cùm

fit (495)  $LM = \frac{ST \times AT}{SA}$ , &  $lm =$

$\frac{ST \times AT}{SB}$ , recta LM major est recta

AT, in ratione ST ad SA, & lm

minor est AT in ratione SB ad ST.

Est verò ratio ST ad SA, major ra-

tione SB ad ST, (511.) & proinde

differentia rectarum LM & AT major

erit quàm differentia rectarum AT & lm,

& ideò summa  $LM + lm$  major est quàm

$2 AT$ ; Quare tandem erit  $TM$  major quàm

$Tm$ , seu vis NM major in conjunc-

tione quàm in oppositione; Quod erat al-

terum.

(γ) \* Ut circa ipsum revolvatur &c. De-

monstrationes enim sunt eadem, si cor-

pus S moveatur circum T, seu corpus T

revolvatur circum S.

DE Mo. taque ideo ipsius vi centripetâ à quâ errores corporis  $P$  oriun-  
TU COR- tur, evadent errores illi omnes, paribus distantis; majores in  
PORUM. hoc casu quàm in altero; ubi corpus  $S$  circum systema corporum  
LIBER  $P$  &  $T$  revolvitur.

PRIMUS.

PROP.

LXV.I.

THEOR.

XXVI.

*Corol. 14. (2)* Cum autem vires  $NM$ ,  $ML$ , ubi corpus  $S$  longinquum est, sint quamproximè ut vis  $SK$  & ratio  $PT$  ad  $ST$  conjunctim, hoc est, si detur tum distantia  $PT$ ; tum corporis  $S$  vis absoluta, ut  $ST$  cub. reciprocè; sint autem vires illæ  $NM$ ,  $ML$  causæ errorum & effectuum omnium, de quibus actum est in præcedentibus corollariis: manifestum est; quòd effectus illi omnes, stante corporum  $T$  &  $P$  systemate, & mutatis tantum distantia  $ST$  & vi absolutâ corporis  $S$ , sint quamproximè in ratione compositâ ex ratione directâ vis absolutæ

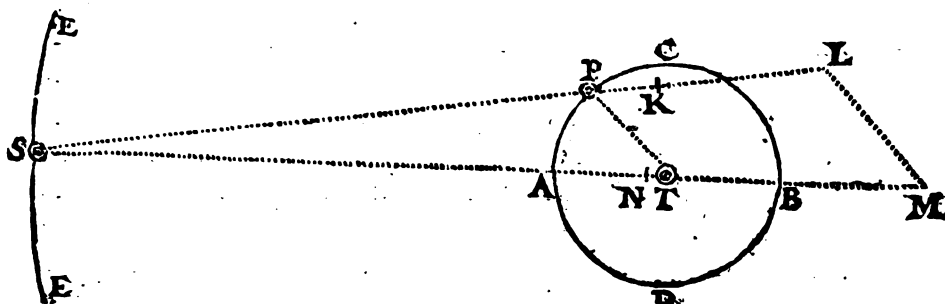
(2) 312. \* Cum autem vires  $NM$ ,  $ML$  &c. Ob magnam distantiam corporis  $S$ , erit ferè  $LS$  parallela  $MS$ , &  $SN = ST = SK$ , ac  $ML = PT$ ; & quoniam  $NM$  in syzygiis est ut  $ML$  in quadratis (501). Si auctâ vel diminutâ actione corporis  $S$ , orbita  $CADB$  unâ cum lineis hinc pendentibus  $PT$ ,  $NM$ ,  $ML$  augeatur vel diminuat (cor. 6. hujus prop. 66.) tres illæ lineæ in eadem ferè ratione inter se (cæteris paribus) augebuntur vel diminuentur. Est autem vis  $ML$  ad vim  $SK$  ut recta  $ML$  ad rectam  $SK$ , seu quam proximè ut  $PT$  ad  $ST$ ; Quare vis  $ML$  (adeoque & vis  $NM$ ) est quam proximè ut vis  $SK$  & ratio  $PT$ , ad  $ST$ , conjunctim, hoc est, si vis acceleratrix  $SK$  dicatur  $A$  ut  $\frac{A \times PT}{ST}$ . Porro datâ vi absolutâ corporis  $S$ , vis acceleratrix  $A$  in distantia  $SK$  seu  $ST$  est ut  $\frac{1}{ST^2}$ , (ex hyp.) Quare vires  $NM$ ,  $ML$ , datâ vi absolutâ corporis  $S$ , sunt ut  $\frac{PT}{ST^3}$ ; hoc est (si detur distantia  $PT$ ) ut  $ST$  reciprocè. Verùm si variabilis sit vis absoluta  $V$  corporis  $S$ , erit vis acceleratrix  $A$  in distantia  $ST$ , ut vis absoluta  $V$  directè & quadratum distantie  $ST$  inversè, (nam manente vi absolutâ corporis  $S$ , vis acce-

leratrix est ut  $ST^2$  inversè, & manente distantia  $ST$  vis acceleratrix est ut vis absoluta directè, proindeque variantibus vi absolutâ & distantia simul, vis acceleratrix est ut vis absoluta directè & quadratum distantie inversè); Quare si loco vis acceleratricis  $A$  ratio illa composita in facto  $\frac{A \times PT}{ST}$  ponatur, vires  $NM$ ,  $ML$

erunt quàm proximè ut  $\frac{V \times PT}{ST^3}$ , seu da-

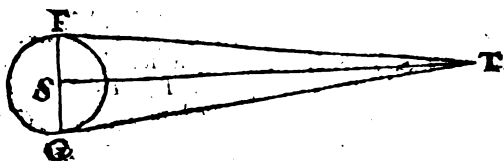
tâ  $PT$ , ut  $\frac{V}{ST^3}$ , hoc est in ratione compositâ ex ratione directâ vis absolutæ corporis  $S$ , & ratione triplicatâ inversâ distantie  $ST$ . Vis autem absoluta corporis  $S$ , est (ex Dem.) in ratione compositâ vis acceleratricis  $A$  & quadrati distantie  $ST$ , & vis acceleratrix  $A$  in distantia  $ST$  est (per coroll. 2. prop. 4.) in ratione compositâ ex ratione directâ distantie  $ST$  & ratione duplicatâ inversâ temporis periodici corporis  $T$  circum  $S$  ad distantiam  $ST$  circulum describentis, adeoque vis absoluta corporis  $S$  est ut cubus distantie  $ST$  directè, & quadratum temporis periodici corporis  $T$  inversè. Quare vires  $NM$ ,  $ML$  (earumque effectus) quæ sunt directè ut vis absoluta, & inversè ut cubus distantie, sunt reciprocè in duplicatâ ratione temporis periodici corporis  $T$ .

FORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXVI.  
THEOR.  
XXVI.



*Corol.* 15. (<sup>b</sup>) Et quoniam si, manentibus orbium *ESE* & *AB* formâ, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur

cubus diametri apparentis corporis longinqu-  
S è corpore T spectati.



(b) \* *Et quoniam si manentibus* &c. Hoc est, si corporum S & T vel maneant vel mutantur vires absolute in datâ quavis ratione, & orbium ESE & PAB, magnitudo ita mutantur, ut orbis ESE sibi similis semper maneant, sicut & orbis PAB sibi, & horum orbium inclinatio non mutantur, nec proportio seu ratio axium unius orbis ad axes alterius aut linearum quatumvis in uno orbe ad lineas homologas in altero orbe.

# 448 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
L X V I.  
THEOR.  
X X V I.

tetur eorum magnitudo, & si corporum  $S$  &  $T$  vel maneant; vel mutantur vires in datâ quâvis ratione; (<sup>c</sup>) hæ vires (hoc est, vis corporis  $T$ , quâ corpus  $P$  de recto tramite in orbitam  $PAB$  deflectere, & vis corporis  $S$ , quâ corpus idem  $P$  de orbitâ illâ deviare cogitur) agunt semper eodem modo, & eâdem proportionem: necesse est ut similes & proportionales sint effectus omnes, & proportionalia effectuum tempora; hoc est, ut errores omnes lineares sint ut orbium diametri, angulares verò iidem, qui prius, & errorum linearum similium, vel angularium æqualium tempora ut orbium tempora periodica.

*Corol. 16.* Unde, si dentur orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutantur utcumque corporum magnitudines, vires & distantie; ex datis erroribus & errorum temporibus in uno casu, colligi possunt errores & errorum tempora in alio quovis, quam proximè: sed brevius hæc methodo. (<sup>d</sup>) Vires  $NM$ ,  $ML$ , cæteris stantibus, sunt ut radius  $TP$ , & harum effe-

(c) \* *Hæ vires &c.* Vis acceleratrix quâ corpus  $P$  in loco  $P$  versûs  $T$  trahitur, est (512) ad vim acceleratricem quâ versûs  $S$  urgetur, in ratione compositâ ex ratione directâ vis absolutæ corporis  $T$  ad vim absolutam corporis  $S$ , & ratione inversâ duplicatâ distantie  $P$   $T$  ad distantiam  $P$   $S$ . Quare si vires absolutæ & distantie in datis rationibus mutantur, manebit eadem virium acceleratricium ratio, & ob figurarum similitudinem, in similibus corporum  $P$ ,  $T$ ,  $S$  positionibus, antè & post distantias viresque mutatas omnium linearum  $SP$ ,  $SK$ ,  $ML$ ,  $SM$ ,  $NM$ , &c. eadem manet ratio, atque adeo vires agunt semper eodem modo & eâdem proportionem. Necesse igitur est, ut antè & post distantias, & vires mutatas in datis rationibus, similes ac proportionales sint effectus omnes & proportionalia effectuum tempora (196) hoc est, errores omnes lineares similes à viribus  $ML$ ,  $NM$  producti, seu deviationes, corporis  $P$  in longitudinem & latitudinem à locis illis in quibus versaretur, si viribus perturbantibus  $ML$ ,  $NM$  non

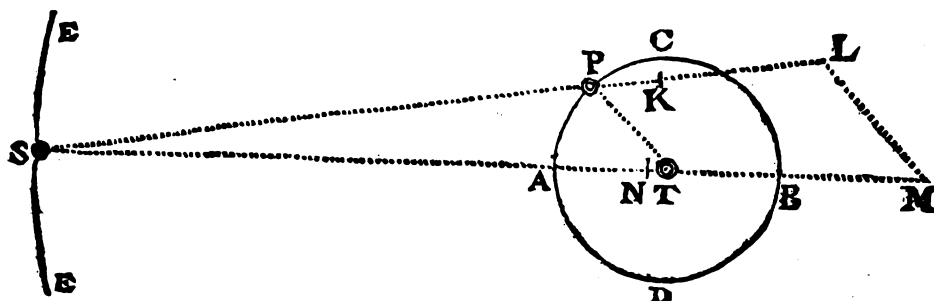
agitaretur, sunt ut orbium diametri, & anguli sub quibus è centro  $T$  deviationes illæ similes videntur, semper manent æquales, ut patet ex naturâ figurarum similium (*Lem. V. & not. 112*), & errorum linearum similium vel angularium æqualium tempora, sunt ut orbium tempora periodica (196). Hæc omnia etiam obtinent, ubi corporum duorum  $T$ , &  $P$  systema circâ corpus  $S$  revolvitur, ut patet, si loco orbis  $ESE$  in demonstratione ponatur orbis quem corpus  $T$  circum  $S$  describit.

(d) \* *Vires  $NM$ ,  $ML$  &c.* Quoniam vires  $NM$ ,  $ML$  sunt (*cor. 14.*) ut vis  $SK$  & ratio  $P$   $T$  ad  $S$   $T$  conjunctam, manentibus vi  $SK$  &  $S$   $T$  erunt vires illæ ut radius  $TP$  & proinde aucto vel diminuto radio illo  $TP$ , manent in datâ inter se ratione, & quoniam ob longinquitatem corporis  $S$  ad similes orbis variabilis  $PAB$  (sed sibi semper similis & æque inclinati) partes similiter applicantur quamproximè, illarum effectus periodici. (*per coroll. 2. Lem. X.*) sunt ut vires ipsæ & quadratum temporis periodici corporis  $P$  circum  $T$

cor-

effectus periodici ( *per corol. 2. lem. x.* ) ut vires, & quadra- DE Mo-  
tum temporis periodici corporis *P* conjunctim. Hi sunt erro- TU COR-  
res lineares corporis *P*; & hinc errores angulares è centro *T* PORUM.  
spectati ( id est, tam motus augis & nodorum, quàm omnes LIBER  
PRIMUS.

PROP.  
LXVI.  
THEOR.  
XXVI.



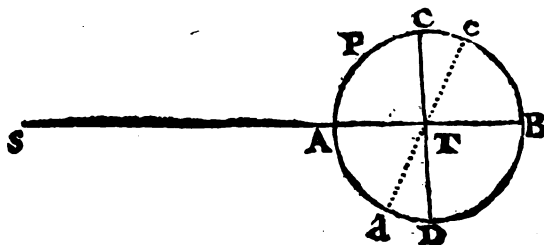
in longitudinem & latitudinem errores apparentes) sunt, in quâ-  
libet revolutione corporis *P*, ut quadratum temporis revolutio-  
nis quam proximè. Conjungantur hæ rationes cum rationibus  
corollarii xiv. & in quolibet corporum *T*, *P*, *S* systemate, ubi  
*P* circum *T* sibi propinquum, & *T* circum *S* longinquum re-  
vol-

conjunctim, hoc est, ut radius *TP*, &  
quadratum temporis periodici corporis *P*  
quamproximè. Porro si in orbitâ circula-  
ri vel circulo finitima *PAB*, sit arcus *Dd*  
error linearis periodicus v. gr. nodi *D*  
in antecedentia ad *d* regressi tempore  
unius revolutionis corporis *P* circum *T*,  
angulus *DTd*, sub quo error ille *Dd* è  
centro *T* videtur, hoc est, error angula-

ris periodicus erit =  $\frac{Dd}{TD}$  (154).

Erro-  
res igitur angulares periodici sunt ut er-  
rores lineares directè & radius *TD* vel  
*TP* inversè, adebque ut quadratum tem-  
poris periodici corporis *P* quamproximè.  
Et hæc quidem vera sunt, stantibus vi ab-  
solutâ corporis *S* & distantia *ST* & va-  
riantibus radio *TP* ac tempore periodico  
corporis *P*; verum stantibus radio *TP* &  
tempore periodico corporis *P* & varian-  
tibus vi absolutâ corporis *S* atque distan-  
tia *ST*, errores periodici tum lineares,  
tum angulares sunt ( *coroll. 14.* ) recipro-

Tom. I.



oè ut 'quadratum temporis periodici cor-  
poris *T* circum *S*, quare variantibus tum  
radio *TP*, & tempore periodico corporis  
*P*, tum radio *ST*, atque vi absolutâ cor-  
poris *S*, errores angulares corporis *P* de  
centro *T* apparentes, erunt in singulis re-  
volutionibus corporis illius *P* circum *T*;  
in ratione ex binis superioribus rationibus  
compositâ, seu erunt ut quadratum tem-  
poris periodici corporis *P*, directè & qua-  
dratum temporis periodici corporis *T*, in-  
versè.

# 450 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. LXVI. THEOR. XXVI.   
volvitur, errores angulares corporis  $P$ , de centro  $T$  apparentes, erunt, in singulis revolutionibus corporis illius  $P$ , ut quadratum temporis periodici corporis  $P$  directè, & quadratum temporis periodici corporis  $T$  inversè. (e) Et inde motus medius augis erit in datâ ratione ad motum medium nodorum; & motus uterque erit ut tempus periodicum corporis  $P$  directè & quadratum temporis periodici corporis  $T$  inversè. Augendo vel minuendo excentricitatem & inclinationem orbis  $PAB$  (f) non mutantur motus augis & nodorum sensibilibiter, nisi ubi eadem sunt nimis magnæ.

Corol. 17. Cum autem linea  $LM$  nunc major sit, nunc minor quam radius  $PT$ , exponatur vis mediocris  $LM$  per radium illum  $PT$ ; & erit hæc ad vim mediocrem  $SK$  vel  $SN$  (quam exponere licet per  $ST$ ) ut longitudo  $PT$  ad longitudinem  $ST$ . Est autem vis mediocris  $SN$  vel  $ST$ , quâ corpus  $T$  retinetur in orbe suo circum  $S$ , ad vim, quâ corpus  $P$  retinetur in orbe suo circum  $T$ , (g) in ratione compositâ ex ratione radii  $ST$ , ad radium  $PT$ , & ratione duplicatâ temporis periodici cor-

(e) \* *Es inde motus medius augis &c.* Si corpus quodvis celerius & tardius vel in plagas oppositas per vices moveatur, illius velocitas æquabilis media, seu motus medius obinetur, si spatium quod corpus illud in unam plagam latum, longo satis tempore percurrit, per illud notabile tempus dividatur. Hinc quoniam apsidum & nodorum motus tardior & celerior est per vices, nuncque in antecedentia, nunc in consequentia sit, invenitur illorum motus medius angularis, si spatium angulare totum, quod plarium revolutionum corporis  $P$  tempore describant, per illud tempus dividatur. Quare cum motus angularis periodicus augis & nodorum sit (ex Dem.) ut quadratum temporis periodici corporis  $P$  directè, & quadratum temporis periodici corporis  $T$  inversè, si ratio hæc composita per tempus periodicum corporis  $P$  pluries sumptum dividatur, erit quotiens seu motus medius angularis augis & nodorum ut tempus periodicum corporis  $P$  directè & quadratum temporis pe-

riodici corporis  $T$  inversè; & inde motus medius augis & nodorum, qui sunt ambo ut eadem quantitas, seu ut tempus periodicum corporis  $P$  directè & quadratum temporis periodici corporis  $T$  inversè, datam habent ad se mutand rationem.

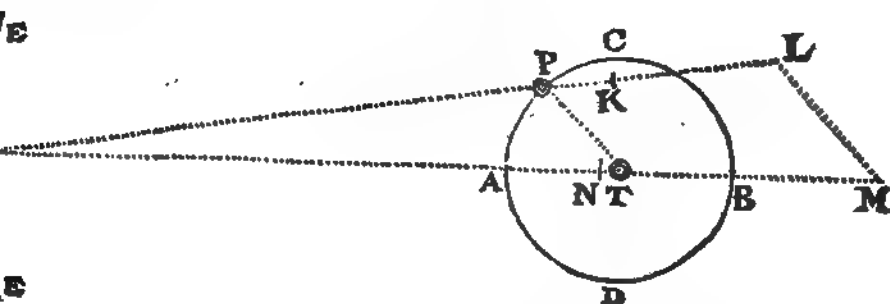
(f) \* *Non mutantur &c.* Nam vires  $ML$ ,  $NM$  motuum augis & nodorum productrices, cæteris stantibus, non multum mutantur, si augeatur vel minuat excentricitas & inclinatio orbis  $PAB$ , nisi magna satis fuerit illa mutatio, ut patet ex ratione quâ vires illæ  $ML$ ,  $NM$  prop. 66. determinantur.

(g) \* *In ratione compositâ ex ratione radii  $ST$  &c.* Nam (per cor. 2. prop. 4.) vis acceleratrix mediocris  $ST$  quâ corpus  $T$  circum  $S$  ad distantiam  $ST$  circulum vel orbem circulo finitimum describere supponitur, est ad vim similem quâ corpus  $P$  in orbitâ suâ circulari vel circulo finitima retinetur in ratione compositâ ex ratione radii  $ST$  ad radium  $PT$  directè, & ratione duplicatâ temporis pe-

riodici

## PRINCIPIA MATHEMATICA. 451

corporis  $P$  circum  $T$  ad tempus periodicum corporis  $T$  circum  $S$ . Et ex æquo, vis mediocris  $LM$  ad vim, quâ corpus  $P$  retinetur in orbe suo circum  $T$  (quâve corpus idem  $P$ , eodem tempore periodico, circum punctum quodvis immobile  $T$  distantiam  $PT$  revolvi posset) est in ratione illâ duplicatâ periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis unâ cum distantia  $PT$ , datur vis mediocris  $LM$ ; (<sup>h</sup>) & eâ datâ, datur etiam vis  $MN$  quam proximè per analogiam linearum  $PT, MN$ .



*Corol.* 18. Iisdem legibus; quibus corpus  $P$  circum corpus  $T$  revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem  $T$  ad æquales ab ipso distantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari annulum fluidum, rotundum ac corpori  $T$  concentricum; & singulæ annuli partes, motus suos omnes ad legem corporis  $P$  peragendo, propius accedent ad corpus  $T$ , & celerius movebuntur in conjunctione & oppositione ipsarum & corporis  $S$ , quàm in quadraturis. Et nodi annuli hujus, seu intersectiones ejus cum plano orbitæ corporis  $S$  vel  $T$ , qui-

periodici corporis  $T$  circum  $S$ , ad tempus periodicum corporis  $P$  circum  $T$ , inversè. Quare vis prior est ad posteriorem in ratione composita ex ratione radii  $ST$  ad radium  $PT$ , & ratione duplicata temporis periodici corporis  $P$  ad tempus periodicum corporis  $T$ ; cùmque sit etiam, ex *Dem.*, vis mediocris  $LM$  ad vim mediocrem  $ST$ , ut  $PT$  ad  $ST$ , erit per com-

positionem rationum & ex æquo; vis me-  
diocrius L M, ad vim acceleratricem quæ  
corpus P retinetur in orbe suo circum T,  
ut quadratum temporis periodici corporis  
P circum T ad quadratum temporis perio-  
dici corporis T circum S. \*

(h) \* *Es eâ datâ*, datur etiam vis  
N M ( 100 ).



DE Mo- quiescent in syzygiis; extra syzygias verò movebuntur in antece-  
 TU COR- dentia, & velocissimè quidem in quadraturis, tardius aliis im-  
 PORUM. locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, <sup>(i)</sup> & axis ejus sin-  
 LIBER gulis revolutionibus oscillabitur; completæque revolutione ad pris-  
 PRIMUS. tinum situm redibit, nisi quatenus per præcessionem nodorum  
 P R O P. circumfertur.  
 L X V I.

THEOR. Corol. 19. Fingas jam globum corporis *T*, ex materiâ non  
 XX.VI. fluidâ constantem, ampliari & extendi usque ad hunc annu-  
 lum, & alveo per circuitum excavato continere aquam, motu-  
 que eodem periodico circa axem suum uniformiter revolvi.  
 Hic liquor per vices acceleratus & retardatus (ut in superiore  
 corollario) <sup>(k)</sup> in syzygiis velocior erit, in quadraturis tardior  
 quam superficies globi, & sic fluet in alveo refluetque ad mo-  
 dum maris. Aqua, revolvendo circa globi centrum quiescens,  
 si tollatur attractio corporis *S*, nullum acquireret motum fluxus  
 & refluxus. <sup>(l)</sup> Par est ratio globi uniformiter progredientis  
 in directum, & interea revolventis circa centrum suum (*per*  
*legum corol. v.*) ut & globi de cursu rectilineo uniformiter  
 tracti, (*per legum corol. 6.*) Accedat autem corpus *S*, & ab  
 ipso inæquabili attractione mox turbabitur aqua. Etenim ma-  
 jor erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. <sup>(m)</sup> Vis  
 autem *LM* trahet aquam deorsum in quadraturis, facietque  
 ipsam.

(i) \* *Et axis ejus seu recta per cen-*  
*trum annuli ducta ad planum ejus perpen-*  
*diculariter, cum plano illo singulis revolu-*  
*tionibus oscillabitur, hoc est, ad planum*  
*E S T* magis & minus per vices inclinabi-  
 tur (*cor. 10.*) completaque &c. totum  
 verò corollarium patet ex *coroll. 3. 5. 10.*  
 11. 13.

(k) \* *In syzygiis velocior erit &c.*  
*Per cor. 18. & 3.* Nam velocitas unifor-  
 mis quâ globus circa axem suum revolvi-  
 tur eodem tempore periodico quo pars  
 quælibet fluidi suam revolutionem absol-  
 vit, media erit inter maximam velocita-  
 tem fluidi in syzygiis & minimam in qua-  
 draturis.

(l) \* *Par est ratio &c.* Id est, ex-  
 clusâ actione corporis *S* aqua uniformiter

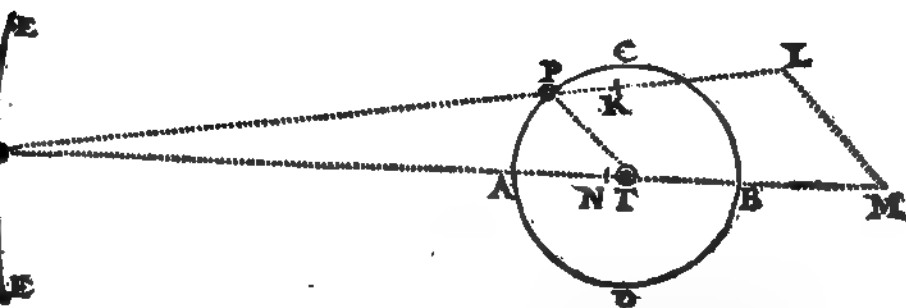
revolvendo circum centrum globi vel uni-  
 formiter moti in directum vel de cursu  
 rectilineo per lineas parallelas uniformiter  
 tracti, nullum acquireret motum fluxus &  
 refluxus, accedat autem &c.

(m) \* 514. *Vis autem LM &c.* Pa-  
 tet per *coroll. 5.* Verum ut totum hoc co-  
 rollarium 19<sup>um</sup> clarius intelligatur, sit  
*c a d b* globi solidi æquator hoc est, circulus  
 globi maximus ad axem rotationis glo-  
 bi perpendicularis *CADB* zona fluida sa-  
 tis profunda, seu annulus fluidus globo  
 circumpositus, & supponendo quod cen-  
 trum gravitatis globi solidi accuratè vel  
 quamproximè coincidat cum figuræ centro  
*T*, globus eodem quamproximè modo tra-  
 hetur à corpore longinquo *S*, & trahet  
 ipse particulam *P* fluidi (*71.*) ac si tota  
 illius.

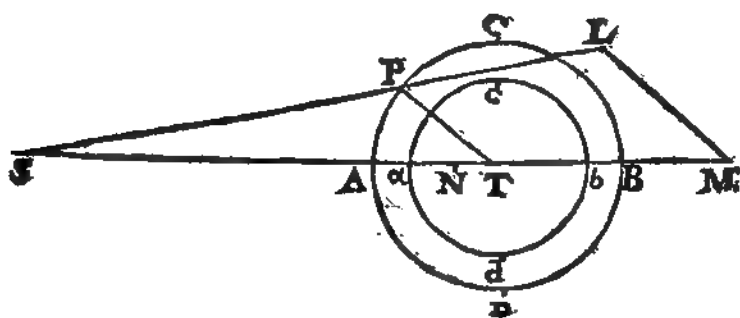
# PRINCIPIA MATHEMATICA. 453

ipsam descendere usque ad syzygias; & vis  $KL$  trahet eandem De Mo-  
 sursum in syzygiis, sistetque descensum ejus & faciet ipsam as-  
 cendere usque ad quadraturas: nisi quatenus motus fluendi &  
 refluentis ab alveo aquæ dirigatur, & per frictionem aliquatenus  
 retardetur.

De Mo-  
 TU COR-  
 PORUM.  
 LIBER  
 PRIMUS.  
 PROP.  
 LXVI.  
 THEOR.  
 XXVI.



Corol. 20. Si annulus jam rigeat, & minuatur globus; cessa-  
 bit motus fluendi & refluentis; (n) sed oscillatorius ille inclinatio-  
 nis motus & præcessio nodorum manebunt. Habeat globus eun-  
 dem axem cum annulo, gyrosque compleat iisdem tempori-  
 bus, & superficie suâ contingat ipsum interius, eique inhæreat;  
 & participando motum ejus, compages utriusque oscillabitur,  
 & nodi regredientur. (o) Nam globus, ut mox dicetur, ad  
 susci-



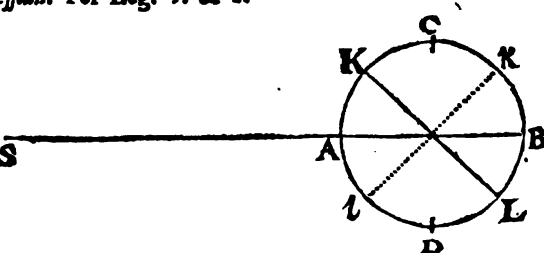
illius massa esset in centro T coacta (quod  
 quidem accuratè verum esse quibusdam in  
 casibus postea demonstrabitur), sed hic  
 approximatio sufficit; quare fluidi particu-  
 la quævis P à corpore S inæqualiter at-  
 tracta, totusque proinde annulus movetur.

tur, ut in coroll. 19. ex corollariis præ-  
 cedentibus determinatum est.  
 (n) \* Sed oscillatorius ille  $\phi$ . Patet  
 per cor. 18. & not. superiorem.  
 (o) \* Nam globus indifferens est  $\phi$ .  
 Aliquot etiam ex legibus 1. & 2. & not. 9.  
 L. 11 3.

DE Mo- fufcipiendas impreffiones omnes indifferens eft. Annuli globo  
 TU COR- orbati maximus inclinationis angulus eft, ubi nodi funt in fy-  
 PORUM. zygiis. Inde in progreflu nodorum ad quadraturas conatur is  
 LIBER inclinationem fuam minuere, & ifto conatu motum imprimit  
 PRIMUS. globo toti. (p) Retinet globus motum impreffum, ufque dum  
 PROP. annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque mo-  
 LXVI. tum novum in contrariam partem: Atque (q) hâc ratione ma-  
 THEOR. ximus decrefcantis inclinationis motus fit in quadraturis nodo-  
 XXVI. rum, & minimus inclinationis angulus in octantibus poft qua-  
 draturas; dein maximus reclinacionis motus in fyzygiis, & ma-  
 ximus angulus in octantibus proximis. Et eadem eft ratio glo-  
 bi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior eft  
 paulò quam juxta polos, vel conftat ex materiâ paulo denfio-  
 re. (r) Supplet enim vicem annuli ifte materiæ in æquatoris  
 regionibus exceffus. Et quanquam, auctâ utcunque globi hu-  
 jus vi centripetâ, tendere fupponantur omnes ejus partes deor-  
 fum,

(p) Retinet globus motum impreffum. Per Leg. 1. & 2.

(q) \* Atque hâc ratione ma-  
 ximus inclinationis motus fit in qua-  
 draturis nodorum (per coroll. 18.  
 & 10.) non idè tamen ibidem fit  
 minimus inclinationis angulus, fed  
 in octantibus poft quadraturas. Sint  
 enim nodi K & L in octantibus  
 poft fyzygias A & B, & retrogre-  
 diendo accedant ad quadraturas  
 C, D; dum nodus K percurrit  
 arcum KC, & nodus L, arcum LD, in-  
 clinatio per actionem vis NM, continuò  
 decrefcit, cumque nodus K, pervenit in  
 C, & tranfit ad octantem k perleverat, ex  
 inertia materiæ, motus inclinationis de-  
 crefcentis per totum arcum KC impreffus;  
 Licet vis NM in contrarium agat  
 per totum arcum Ck = CK; vis enim  
 NM per arcum Ck motum inclinationis  
 decrefcantis iifdem gradibus diminuit, qui-  
 bus per arcum KC productus & accelera-  
 tus eft. Quare ille decrefcantis inclina-  
 tionis motus penitus non destruitur, nifi  
 nodus K pervenerit in k, tumque vis NM  
 planum reclinat, hoc eft, nodo existente  
 in k incipit motus reclinacionis five motus



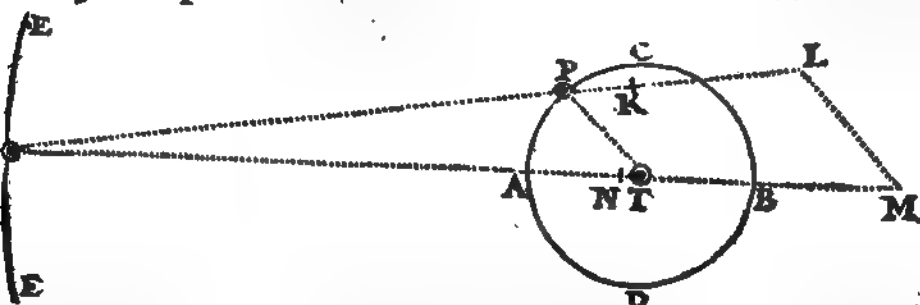
inclinationis crefcentis & perleverat ufque  
 ad octantem proximum L atque ibi ceffat.  
 Liqueat igitur minimum angulum inclina-  
 tionis fieri in octantibus nodorum k, l  
 poft quadraturas C, D maximum verò dum  
 nodi verfantur in octantibus K & L poft  
 fyzygias A, B.

(r) Supplet enim vicem annuli &c.  
 Patet per not. 514. Si materiæ in æqua-  
 toris regionibus exceffus per annulum  
 CcA D b, (vid. fig. not. 514.) exhibea-  
 tur & reliqua globi materia in centro T  
 coacta intelligatur.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 455

sum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen phænomena hujus & præcedentis corollarii (f) vix inde mutabuntur; nisi quod loca maximarum & minimarum altitudinum

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXVI.  
THEOR.  
XXVI.



aquæ diversa erunt. Aqua enim jam in orbe suo sustinetur & permanet, non per vim suam centrifugam, sed per alveum in quo fluit. Et præterea vis LM trahit aquam deorsum maxime in quadraturis, & vis KL seu NM—LM trahit

(f) \* Vis inde mutabuntur. Nam major partium globi in centrum T gravitas non impedit quin annulus fluidus vel solidus, impressiones virium LM, NM suscipiat, loca tamen maximarum & minimarum altitudinum aquæ diversa erunt. Hucusque enim supposuimus particulas aquæ ex virium centripetæ & centrifugæ æquilibrio, in orbe suo sustineri & permanere instar corporis solitarii P circum T in spatio libero revolventis; atque inde ex cor. 5. ostensum est in cor. 18. maximam aquæ altitudinem in quadraturis incidere, minimam in syzygiis. Verum si manente eadem vi centrifugâ augeatur vis centripetæ, seu gravitas particularum aquæ, particula illæ non vi suâ centrifugâ, sed alvei parietibus, ut in mari atque fluminibus telluris contingit, sustinentur & in orbe suo permavent ac proinde non amplius ad legem corporis solitarii circum centrum T, in spatio libero revolventis à centro illo T recedant, vel ad illud accedunt. Loca igitur maximarum & minimarum altitudinum aquæ diversa erunt: velocitas tamen partium aquæ, cæteris paribus, maxima erit in syzygiis, minima in quadraturis (per cor. 3.) Præterea vis LM additicia trahit, aquam deor-

sum, seu ad centrum T, maxime in quadraturis (504.) & vis ablatitia KL trahit eandem sursum, maxime in syzygiis (505) & ided si globus cum aquâ circumpositâ non revolveretur circa centrum T, minimæ aquarum altitudines in quadraturis C & D, maximæ in syzygiis A & B essent) verum revovente cum globo aquâ à C ad A, vis additicia post quadraturas agens, aquam deorsum temper urget, donec vi ablatitiâ vincatur; & similiter hæc vis ablatitia post syzygias sursum trahit aquas, quarum proinde minimæ altitudines non incident in quadraturas, sed post quadraturas, maximæ verb post syzygias. Insuper rotatio globi circa proprium axem maximas aquarum altitudines à syzygiis A & B versus quadraturas D & C transfert, intereadum vires LM, NM simul junctæ maximas eas aquarum altitudines in syzygiis instaurare perpetuè nituntur, aqua autem à C & D continuè fluit versus A & B, dum elevatio ab A versus D & à B versus C transfertur, & ided inter A & D ut & inter B & C dantur duo motus contrarii quibus aqua accumulatur ita ut altitudines maximæ inter hæc puncta incidant sere cixà octantes.

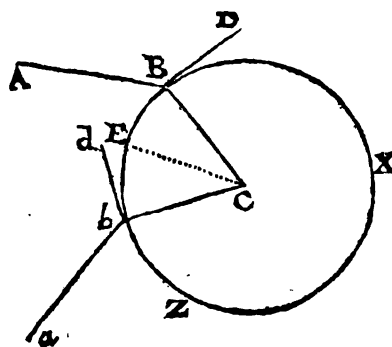
DE Mo- hit eandem sursum maximè in syzygiis. Et hæ vires conjunc-  
 TU COR- tæ desinunt trahere aquam deorsum & incipiunt trahere aquam  
 PORUM. sursum in octantibus ante syzygias, ac desinunt trahere aquam  
 LIBER sursum incipiuntque trahere aquam deorsum in octantibus post  
 PRIMUS. syzygias. Et inde maxima aquæ altitudo evenire potest in octan-  
 P. R. O. P. tibus post syzygias, & minima in octantibus post quadraturas  
 LXVI. circiter; nisi quatenus motus ascendendi vel descendendi ab his  
 THEOR. viribus impressus vel per vim insitam aquæ paulò diutius perse-  
 XXVI. veret, vel per impedimenta alvei paulò citius sistatur.

*Corol. 21.* Eâdem ratione, quâ materia globi juxta æqua-  
 torem redundans efficit ut nodi regrediantur, atque ideo per  
 hujus incrementum augetur iste regressus, per diminutionem ve-  
 rò diminuitur, & per ablationem tollitur; (t) si materia plus-  
 quam redundans tollatur, hoc est si globus juxta æquatorem vel  
 depressior reddatur, vel rarior quàm juxta polos, orietur motus  
 nodorum in consequentia.

*Corol. 22.* Et inde vicissim, ex motu nodorum innotescit  
 constitutio globi. Nimirum si globus polos eosdem constanter  
 servat, & motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem  
 redundat; si in consequentia, deficit. Pone globum uniformem  
 & perfectè circinatum in spatiis liberis primo quiescere; dein  
 impetu quocunque obliquè in superficiem suam facto propelli,  
 & motum inde concipere. (u) partim circularem, partim in di-  
 rectum

(t) \* Si materia plusquam redundans  
 tollatur, seu si materia redundans negati-  
 va fiat, motus nodorum qui erat in ante-  
 cedentia, negativus evadet, hoc est, orie-  
 tur motus nodorum in consequentia.

(u) \* Partim circularem, partim in  
 directum. Vis AB quâ globus BXZ obli-  
 què impellitur, secundum directionem  
 AB, in duas vires resolvitur, quarum al-  
 tera ad centrum C juxta radium BC di-  
 rigitur, ei motum globi in directum pro-  
 ducit, altera secundum tangeantem BD ra-  
 dio BC normalem agit, & motum rota-  
 tionis circâ axem plano ABDC perpen-  
 dicularem inducit.



DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXVI.  
THEOR.  
XXVL

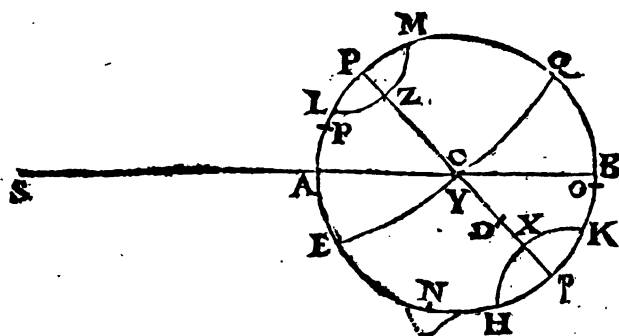
suprà divinis, sit B P X Z æquator quem punctum B vi BD describit, & b P x Z æquator alter quem punctum b vi b d describeret, horum æquatorum communes intersectiones P, Z; vires quæ secundum radios B C, b c, agunt in unam componentur, ut suprà, quæ globus movebitur uniformiter in directum; vires autem B D, b d,

eisdem rotationis motus seorsim producant  
quos producerent, si in punctum P singule  
agerent seorsim, fortisque PK, P i; sed vires  
duz PK, P i, in unam PL componuntur  
quâ globus circa æquatorem unicum ro-  
tatur. Quare vires seu impulsus AB, a b  
generabunt motum unicum simplicem ac  
M m m unifo-

# 458 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MOTU COR-  
FORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP. LXVI.  
THEOR.  
XXVI.

bunt hi eundem motum circularem ac si simul & semel in lo-  
cum intersectionis æquatorum motuum illorum, quos seorsim  
generarent, fuissent impressi. Globus igitur homogeneous & per-  
fectus non retinet motus plures distinctos, sed impressos omnes  
componit & ad unum reducit, & quâtenus in se est, gyratur  
semper motu simplici & uniformi circa axem unicum, inclina-  
tione semper invariabili datum. Sed nec vis centripeta incli-  
nationem axis, aut rotationis velocitatem mutare potest. Si  
globus plano quocunque, per centrum suum & centrum in  
quod vis dirigitur transeunte, dividi intelligatur in duo hemi-  
sphæria; urgebit semper vis illa utrumque hemisphærium æqua-  
liter, & propterea globum, quoad motum rotationis, (b) nul-  
lam in partem inclinabit. Addatur verò alicubi inter polum &  
æquatorem materia nova in formam montis cumulata, & hæc,  
perpetuo conatu recedendi à centro sui motus, turbabit mo-  
tum



uniformem; tum directum; tum circularem  
circa axem unicum. inclinatione semper  
invariabili datum adeoque & sibi semper  
parallelum.

(b) \* *Nullam in partem inclinabit.*  
Sit S virium centrum, A P Q E globus cir-  
cà axem P p revolvens, S C B planum per  
centrum globi C & per centrum virium S  
transiens, globumque dividens in duo he-  
misphæria A P B, A p B, vis centripeta ur-  
gebit semper utrumque hemisphærium æ-  
qualiter versùs S, & propterea globum  
quoad motum rotationis nullam in partem  
inclinabit, manebitque proinde eadem  
axis. P p inclinatio. Addatur verò alicu-

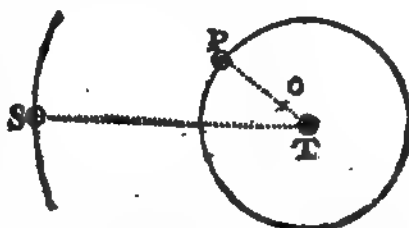
bi, v. gr. in N, inter polum p & æquatorem E Y Q materia nova in formam mon-  
tis cumulata, & hæc, perpetuo conatu re-  
cedendi à centro sui motus E, turbabit  
motum globi, quod partem globi N, cui  
adhæret validius trahat quam vis centri-  
fuga partem oppositam O, magis depres-  
sam, & ideo faciet ut poli P, p, errent  
per superficiem globi & circulos L, Z, M,  
H, X, K, circum se punctumque sibi oppo-  
situm describant. Nam cum materia illa  
est in loco N, sua majori vi centrifuga  
facit ut polus p accedat ad H & polus P  
ad M, sublato partium globi æquilibrio,  
undè materia illa revolvens, poli H & M  
circ-

um globi, facietque ut poli ejus errent per ipsius superficiem, DE Mo-  
 & circulos circum se punctumque sibi oppositum perpetuò descri-  
 vant. Neque corrigetur ista vagationis enormitas, nisi locando  
 nontem illum vel in polo alterutro, quo in casu ( per corol. LIBER  
 XXI. ) nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, quâ ra- PRIMUS.  
 tione ( per corol. XX. ) nodi regredientur; vel denique ex alterâ LXVI.  
 xis parte addendo materiam novam, quâ mons inter moven- THEOR.  
 dum libretur, & hoc pacto nodi vel progredientur, vel rece- XXVL  
 lent, perinde ut mons & hæcce nova materia sunt vel polo  
 vel æquatori propiores.

PROPOSITIO LXVII. THEOREMA XXVII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, cir-  
 ca interiorum P, T commune gravitatis centrum O, radiis ad  
 centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportiona-  
 les & orbem ad formam ellipseos umbilicum in centro eodem ha-  
 bentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maxi-  
 mum T, radiis ad ipsum ductis, describere potest.

Nam corporis S attractiones  
 versus T & P componunt ip-  
 sius attractionem absolutam, quæ  
 magis dirigitur in corporum T  
 & P commune gravitatis cen-  
 trum O, quam in corpus ma-  
 ximum T, quæque quadrato dis-  
 tantiae S O magis est proportionalis reciproçè; quam quadra-  
 to distantiae S T: ( c ) ut rem perpendenti facile constabit.



PRO-

circulos H X K H, M Z L M describunt  
 in superficie globi circa puncta P, p, sive  
 circa loca polorum antequam materia in N  
 addita esset. Neque corrigetur ista vaga-  
 tionis enormitas, nisi locando memem il-  
 lum vel in polo alterutro p vel P ubi per-  
 am non magis in unam partem trahit  
 quam in alteram; vel in æquatore E Y Q;  
 ubi polum unum non magis trahit quam  
 alteram; vel ex alterâ axis parte in Q ad-

dendo materiam novam, quâ motus in N  
 inter movendum libramur, seu quâ axis in  
 partes oppositas æque trahatur, vel etiam  
 addendo materiam novam ex alterâ æqua-  
 toris parte in R, quâ polus P tantum tra-  
 hatur quantum polus p à materiâ in N  
 posita.

( c ) \* Ut rem perpendenti facile con-  
 stabit. Nam vis accelerationis composita  
 quâ corpus S à corporibus T & P trahi-  
 M m m a tur



PROPOSITIO LXVIII. THEOREMA XXVIII.

**FORUM.  
LIBER**

PRIMUS.

**PROP.**

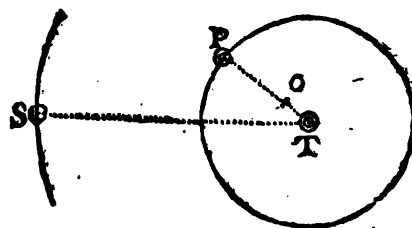
LXVIII.

**THEOR.**

**XXVIII.**

*Positis iisdem attractionum legibus , dico quod corpus exterius S , circa interiorum P & T commune gravitatis centrum O , radiis ad centrum illud ductis , describit areas temporibus magis proportionales , & orbem ad formam ellipses umbilicam in centro eodem habentis magis accedentem , si corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atque cætera agitur , quam si id vel non attractum quiescat , vel multò magis aut multò minus attractum aut multò magis aut multò minus agitur .*

(d) Demonstratur eodem fere modo cum prop. L X V I. sed argumento proluxiore, quod ideo prætereo. Sufficeret rem sic æstimare. Ex demonstratione propositionis novissimæ liquet centrum,



in quod corpus S conjunctis viribus urgetur, proximum esse communi centro gravitatis duorum illorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quiesceret commune centrum gravitatis corporum trium; describerent corpus S ex unâ parte, & commune centrum aliorum duorum ex alterâ parte, circa commune omnium centrum quiescens, ellipses accuratas. (\*) Liqueat hoc per corollarium secundum propositionis LVIII.

col:

tar directio cadit inter lineas  $SP$ ,  $ST$ , & cæteris paribus, magis accedit ad  $ST$ , quam ad  $SP$  ( si modò corpus majus  $T$  cæteris paribus magis trahat quam corpus minus  $P$  ) quemadmodum centrum gravitatis  $O$ , proprius est corpori  $T$  quam corpori  $P$ ; præterea manente distantia  $ST$ , vis acceleratrix corporis  $S$  versùs  $P$  augetur vel diminuitur, dum decrescit vel crefcit distantia  $SP$ , & similiter distantia  $S O$ , augetur vel diminuitur, prout crefcit vel decrescit  $SP$ ; Quare attractio absoluta ( seu tota ) corporis  $S$  quadrato distantie  $S O$  ma-

gis proportionalis est reciproce, quam quadrato distantiz S T; insuper commune gravitatis centrum O ferè spectari potest tanquam punctum in quo corporum T & P vires physicè uniantur.

(d) \* *Demonstratur eodem fere modo.*  
O. Nimirum resolvendo singulas attractiones corporis S versus P & T in alias quarum duæ ad centrum. O dirigantur & alia duæ directiones habeant rectæ T & parallelas.

(e). \* *Liquet hoc &c.* Nam si ceptum  
in quod corpus S conjunctis viribus argu-  
tur

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 461

collatum cum demonstratis in prop. LXIV. & LXV. Perturba-  
tur iste motus ellipticus aliquantulum per distantiam centri duo-  
rum à centro, in quod tertium *S* attrahitur. Detur præterea  
motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proin-  
de minima est perturbatio, ubi commune trium centrum quief-  
cit; hoc est, ubi corpus intimum & maximum *T* lege cætero-  
rum attrahitur: fitque major semper, ubi trium commune illud  
centrum, ( <sup>f</sup> ) minuendo motum corporis *T*, moveri incipit, &  
magis deinceps magisque agitur.

*Corol.* Et hinc, si corpora plura minora revolvantur circa  
maximum, colligere licet quod orbitæ descriptæ propius acce-  
dent ad ellipticas, & arearum descriptiones fient magis æquabi-  
les, si corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt ut eo-  
rum vires absolutæ directè & quadrata distantiarum inversè, se  
mutuo trahant agitentque, & orbitæ cujusque umbilicus collo-  
cetur in communi centro gravitatis corporum omnium interio-  
rum ( [ <sup>g</sup> ] ) nimirum umbilicus orbitæ primæ & intimæ in centro  
gravitatis corporis maximi & intimi; ille orbitæ secundæ, in  
communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iste  
ter-

ter coincideret cum centro *O* gravitatis  
communi duorum corporum *P* & *T* hæc  
duo corpora *P* & *T* ellipses accuratas seor-  
sum describerent circum se mutuo & cir-  
cum centrum illud *O* ( per coroll. 1. prop.  
58 ). Et præterea corpus *S* ex una parte  
& duorum aliorum systema tanquam unum  
corpus consideratum, hoc est, eorum com-  
mune gravitatis centrum *O* ex altera par-  
te ellipses accuratas describerent circum  
commune trium *S*, *T*, *P* centrum gravita-  
tis quietens ( per coroll. 2. prop. 58 ).  
Quod adhuc clarius intelligitur, si legan-  
tur propositiones 64. 65. Perturbatur iste  
motus ellipticus aliquantulum per distan-  
tiam centri *O*, duorum *P* & *T* à centro  
in quod tertium *S* trahitur. Detur præ-  
terea motus non uniformis in directum  
communi trium centro, ( quod continget,  
si corpus intimum & maximum *T*, lege  
cæterorum non attrahitur, ut ex dictis  
patet ) & augebitur perturbatio, proinde & c.

( <sup>f</sup> ) \* Minuendo motum corporis *T* & c.

Quæ ratione sit ut centrum commune trium  
corporum, interea dum corpora *S* & *P* mo-  
ventur, nunc accedat ad corpus *T* nunc  
ab illo recedat, pro mutata corporum il-  
lorum distantia, & hinc magis ac magis  
perturbabitur motus ellipticus & magis ac  
magis deinceps agitur centrum com-  
mune gravitatis trium corporum.

( <sup>g</sup> ) \* Nimirum umbilicus orbitæ pri-  
mæ & intimæ, quam v. gr. corpus par-  
vum *P* hic describit in centro gravitatis  
corporis maximi & intimi *T* quod fere  
coincidit cum communi centro *O* gravita-  
tis duorum *P* & *T* ( per cas. 1. prop. 65. ) ;  
umbilicus orbitæ secundæ quam v. gr. cor-  
pus *S* describit in communi centro gravi-  
tatis *O*, corporum duorum intimorum *P*  
& *T*; umbilicus tertie orbitæ quam aliud  
corpus longius distans describeret in com-  
muni centro gravitatis trium interiorum  
*P*, *T*, *S* & c. Nam idem est ratiocinium  
seu tria seu quatuor aut plura sint corpo-  
ra ( ut in prop. 64. 65. )

M m m 3

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXIX.  
THEOR.  
XXIX.

tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum; & sic deinceps) quam si corpus intimum quiescat & statuatur communis umbilicus orbitarum omnium.

## PROPOSITIO LXIX. THEOREMA XXIX.

*In systemate corporum plurium, A, B, C, D, &c. si corpus aliquod A trahit cætera omnia B, C, D, &c. viribus acceleratricibus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum à trahente; & corpus aliud B trahit etiam cætera A, C, D, &c. viribus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum à trahente: erunt absolutæ corporum trahentium A, B vires ad invicem, ut sunt ipsa corpora A, B, quorum sunt vires.*

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium B, C, D versus A, paribus distantiiis, sibi invicem æquantur ex hypothesi; & similiter attractiones acceleratrices corporum omnium versus B, paribus distantiiis, sibi invicem æquantur. Est autem absoluta vis attractiva corporis A ad vim absolutam attractivam corporis B, (<sup>h</sup>) ut attractio acceleratrix corporum omnium versus A ad attractionem acceleratricem corporum omnium versus B, paribus distantiiis; (<sup>i</sup>) & ita est attractio acceleratrix corporis B versus A, ad attractionem acceleratricem corporis A versus B. Sed attractio acceleratrix corporis B versus A est ad attractionem acceleratricem corporis A versus B, ut massa corporis A ad massam corporis B; propterea quod vires motrices, quæ (per definitionem secundam, septimam & octavam) sunt ut vires acceleratrices & corpora attracta conjunctim, hic sunt (per motus legem tertiam) (<sup>k</sup>) sibi invicem æquales. Ergo absoluta vis attractiva corporis A est ad absolutam

(h) \* Ut attractio acceleratrix corporum omnium, seu ut attractio acceleratrix uniuscujusque corporis versus A &c. Patet enim quod si vis absoluta dupla vel tripla &c. sit, actio quoque acceleratrix in distantia datâ dupla vel tripla erit.

(i) \* Et ita est attractio acceleratrix corporis B versus A, ad attractionem acceleratricem corporis A versus B, ob distan-

tiam inter B & A, & A & B eandem.

(k) \* Sibi invicem æquales. Si enim attractio acceleratrix corporis B versus A dicatur V & attractio acceleratrix corporis A versus B dicatur v; vis motrix in B, erit B x V; in A erit A x v; & (per leg. 3<sup>am</sup>.) B x V = A x v. Unde V : v = A : B. Ergo absoluta &c.

lutam vim attractivam corporis  $B$ , ut massa corporis  $A$  ad massam corporis  $B$ . *Q. E. D.*

*Corol. 1.* Hinc si singula systematis corpora  $A, B, C, D$ , &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à trahente; erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem ut sunt ipsa corpora.

*Corol. 2.* Eodem argumento, si singula systematis corpora  $A, B, C, D$ , &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt vel reciprocè, vel directè in ratione dignitatis cujuscunque distantiarum à trahente, quæve secundum legem quamcunque communem ex distantibus ab unoquoque trahente definiuntur; constat quod corporum illorum vires <sup>(1)</sup> absolutæ sunt ut corpora.

*Corol. 3.* In systemate corporum quorum vires decrescunt in ratione duplicatâ distantiarum, si minora circa maximum in ellipsis, umbilicum communem in maximi illius centro habentibus, <sup>(m)</sup> quam fieri potest accuratissimis revolvantur; & radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maximè proportionales: erunt corporum illorum vires absolutæ ad invicem, aut accuratè aut quamproximè, in ratione corporum; & <sup>(n)</sup> contra. Patet per *corol. prop. LXVIII.* collatum cum hujus *corol. 1.*

*Schar-*

(1) \* *Vires absolutæ sunt ut corpora.* Omnia enim ratiocinia eadem manent in hujus corollarii hypothese ac in demonstratione & hypothese propositionis.

(m) \* *Quam fieri potest accuratissimis revolvantur*, ut in duobus casibus *prop. 65.* expostum est.

(n) \* *Et contra.* Si vires corporum illorum absolutæ sint ad invicem in ratione corporum, & minora corpora circa maximum in ellipsis umbilicum commu-

nem in maximi illius centro habentibus; quam fieri potest, accuratissimis revolvantur, & radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maximè proportionales, corporum illorum seorsim spectatorum vires acceleratrices decrescent in ratione duplicatâ distantiarum aut accuratè aut quam proximè; ut liquet ex *coroll. 2. prop. 58.* collato cum *prop. 64. 65.*

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

*Scholium.*

LIBER  
PRIMUS.

PROP.

LXIX.

THEOR.

XXIX.

His propositionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas, & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi solent. Rationi enim consentaneum est, ut vires, quæ ad corpora diriguntur, pendeant ab eorundem naturâ & quantitate, ut fit in magneticis. Et quoties hujusmodi casus incidunt, æstimandæ erunt corporum attractiones, assignando singulis eorum particulis vires proprias, & colligendo summas virium. Vocem attractionis hic generaliter usurpo pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem: sive conatus iste fiat ab actione corporum vel se mutuo petentium, vel per spiritus emissos se invicem agitantium; sive is ab actione ætheris, aut aëris, mediæ cujuscunque seu corporei seu incorporei oriatur corpora innatantia in se invicem utcunque impellentis. Eodem sensu generali usurpo vocem *impulsus*, non species virium & qualitates physicas, sed quantitates & proportiones mathematicas in hoc tractatu expendens ut in definitionibus explicui. In mathesi investigandæ sunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuscunque positæ consequentur: deinde, ubi in physicam descenditur conferendæ sunt hæ rationes cum phænomenis; ut innotescat quænam virium conditiones singulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium speciebus, causis & rationibus physicis tutius disputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora spherica, ex particulis modo jam exposito attractivis constantia, debeant in se mutuo agere; & quales motus inde consequantur.

SECTIO XII.

*De corporum sphaericorum viribus attractivis.*

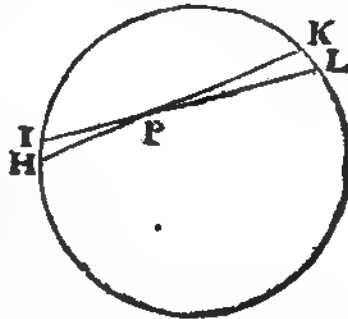
PROPOSITIO LXX. THEOREMA XXX.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXX.

THEOR.  
XXX.

*Si ad sphaericæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis: dico quod corpusculum intra superficiem conſtitutum his viribus nullam in partem attrahitur.*

Sit *HIKL* superficies illa sphaerica, & *P* corpusculum intus constitutum. Per *P* agantur ad hanc superficiem lineæ duæ *HK*, *IL*, arcus quàm minimos *HI*, *KL* intercipientes; & ob triangu-  
la *HPI*, *LPK* (per corol. 3. lem. vii. (°) similia, arcus illi erunt distantis *HP*, *LP* proportionales; & superficiei sphaericæ particulae quævis ad *HI* & *KL*, rectis per punctum *P* transeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicatâ illâ ratione. Ergo vires harum particularum in corpus *P* exercitæ sunt inter se æquales. Sunt enim ut particulae directæ, & quadrata distantiarum inversæ. Et hæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, se mutuo destruent. Et simili argumento, attractiones omnes per totam sphaericam superficiem à contrariis attractionibus destruuntur. Proinde corpus *P* nullam in partem his attractionibus impellitur. *Q. E. D.*



PRO-

(°) \* *Similia &c.* Anguli enim *HPI*, *LPK* ad verticem oppositi, & anguli *HIL*, *LKH* eidem arcui insistentes æquantur (per prop. 27. Lib. 3. Elem.) Nam arcus evanescētes *IH*, *KL*, pro ipsorum chordis usurpari possunt (per cor. 3. Lem. 7.) Quare arcus *HI*, *KL* distantis *HP*, *LP* proportionales sunt, & hinc, si ad superficiem sphaericam per punctum *P* ductæ

intelligentur innumera rectæ ad arcus quæminimos ut *HI*, *KL* terminatæ, rectæ illæ figuras solidas (pyramides vel conos) similes formabunt quorum bases in superficie sphaerica similes erunt, & proinde (per Lem. 5.) rationem habebunt duplicatam laterum *HI*, *HL* seu distantiarum *HP*, *LP*. Ergo vires &c.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

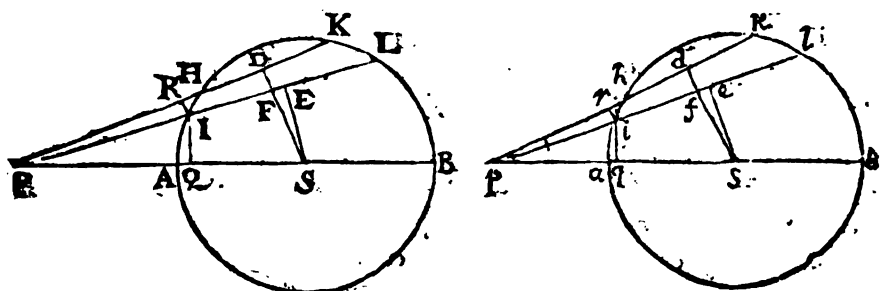
## PROPOSITIO LXXI. THEOREMA XXXI.

LIBER PRIMUS. *Isdem positis, dico quod corpusculum extra sphaericam superficiem constitutum attrahitur ad centrum sphaerae; vi reciproce proportionali quadrato distantiae suae ab eodem centro.*

PROP. LXXI.

THEOR. XXXI.

Sint  $AHKB$ ,  $ahkb$  aequales duae superficies sphaericae, centris  $S$ ,  $s$ , diametris  $AB$ ,  $ab$  descriptae, &  $P$ ,  $p$  corpuscula sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur à corpusculis lineae  $PHK$ ,  $PIL$ ,  $phk$ ,  $pil$ , auferentes à circulis ma-



ximis  $AHB$ ,  $ahb$ , aequales arcus  $HK$ ,  $hk$  &  $IL$ ,  $il$ : Et ad eas demittantur perpendiculara  $SD$ ,  $sd$ ;  $SE$ ,  $se$ ;  $IR$ ,  $ir$ ; quorum  $SD$ ,  $sd$  secant  $PL$ ,  $pl$  in  $F$  &  $f$ : Demittantur etiam ad diametros perpendiculara  $IQ$ ,  $iq$ . Evanescant anguli  $DPE$ ,  $dpe$ : & (p) ob aequales  $DS$  &  $ds$ ,  $ES$  &  $es$ , lineae  $PE$ ,  $PF$  &  $pe$ ,  $pf$  & lineola  $DF$ ,  $df$  pro aequalibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis  $DPE$ ,  $dpe$  simul evanescentibus, (q) est aequalitatis. His itaque constitutis, (r) erit  $PI$  ad  $PF$  ut  $RI$  ad  $DF$ , &  $pf$  ad  $pi$  ut  $df$ , vel  $DF$  ad  $pi$ ; & ex aequo  $PI \times pf$  ad  $PF \times pi$  ut  $RI$  ad  $ri$ , hoc est.

(per.)

(p) \* Es ab aequales  $DS$  &  $ds$ ,  $ES$  &  $es$  &c. (Per Prop. 14. Lib. 3. Elem.). sunt differentiae linearum  $DS$  &  $ES$ ,  $ds$  &  $es$ , ac proinde (ob aequales  $DS$  &  $ds$ ,  $ES$  &  $es$ ) aequantur.  
(q) \* Est aequalitatis. Nam evanescentibus  $DPE$ ,  $dpe$  angulis, puncta  $F$ ,  $f$  coincidunt cum punctis  $E$ ,  $e$ , & iis punctis coincidentibus, aequales sunt lineae  
(r) \* Erat  $PI$  ad  $PF$  &c. Ob parallelas  $RI$ ,  $DF$  &  $ri$ ,  $df$ .

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 467

(<sup>1</sup>) *per corol. 3. lem. VII.* ) (<sup>1</sup>) ut arcus  $I H$  ad arcum  $i h$ . DE MO-  
 (<sup>1</sup>) Rursus  $P I$  ad  $P S$  ut  $I Q$  ad  $S E$ , &  $p s$  ad  $p i$  ut  $s e$  vel TU COR-  
 $S E$  ad  $i q$ ; & ex æquo  $P I \times p s$  ad  $P S \times p i$  ut  $I Q$  ad  $i q$ . PORUM.  
 Et conjunctis rationibus  $P I$  quad.  $\times p f \times p s$  ad  $p i$  quad.  $\times P F \times P S$ , LIBER  
 ut  $I H \times I Q$  ad  $i h \times i q$ ; hoc (<sup>u</sup>) est, ut superficies circularis, PRIMUS.  
 quam arcus  $I H$  convolutione semicirculi  $A K B$  circa diame- L X X I.  
 trum  $A B$  describet, ad superficiem circulem, quam arcus  $i h$  THEOR.  
 convolutione semicirculi  $a k b$  circa diametrum  $a b$  describet. X X I.

Et vires, quibus hæ superficies secundum lineas ad se tenden-  
 tes attrahunt corpuscula  $P$  &  $p$ , sunt (*per hypothefin*) ut ipsæ  
 superficies directè, & quadrata distantiarum superficierum à cor-  
 poribus inversè, hoc est, ut  $p f \times p s$  ad  $P F \times P S$ . Suntque  
 hæ vires ad ipsarum partes obliquas, quæ (*factâ per legum cor-*  
*rol. 2. resolutione virium*) secundum lineas  $P S$ ,  $p s$  ad centra  
 tendunt, ut  $P I$  ad  $P Q$ , &  $p i$  ad  $p q$ ; id est (*ob similia trian-*  
*gula  $P I Q$  &  $P S F$ ,  $p i q$  &  $p s f$* ) ut  $P S$  ad  $P F$ , &  $p s$  ad  $p f$ .  
 Unde, ex æquo, fit attractio corpusculi hujus  $P$  versus  $S$

ad attractionem corpusculi  $p$  versus  $s$ , ut  $\frac{P F \times p f \times p s}{P S}$  ad  
 $\frac{p f \times P F \times P S}{p s}$ , hoc (<sup>2</sup>) est, ut  $p s$  quad. ad  $P S$  quad. Et  
 simili argumento vires, quibus superficies convolutione arcuum  
 $K L$ ,

(<sup>1</sup>) Ut arcus  $I H$  ad arcum  $i h$ . Nam  
 triangula evanescentia  $R H I$ , &  $r h i$  similia  
 sunt ob angulos ad  $R$  &  $r$  rectos (*ex hyp.*)  
 & angulos ad  $H$  &  $h$  æquales, quos nempe  
 metiuntur dimidii arcus æquales  $H K$ ,  
 &  $h k$  (*per prop. 32. lib. 3. Elem.*) arcus  
 enim  $H I$ ,  $h i$  pro tangentibus in  $H$  &  $h$   
 usurpari possunt (*per Cor. 3. Lem. 7.*).  
 Quare  $R I$  est ad  $r i$ , ut arcus  $I H$  ad ar-  
 cum  $i h$ .

(<sup>1</sup>) \* Rursus &c. Ob triangula  $P Q I$ ,  
 $P E S$  &  $p q i$ ,  $p e s$  similia, est  $P I : P S$   
 $= I Q : S E$ .

(<sup>u</sup>) 515. \* Hoc est, ut superficies circula-  
 ris, quam arcus  $I H$  convolutione semicirculi  
 $A K B$  circa diametrum  $A B$  describet. Nam  
 circularis illa superficies æqualis est facto  
 ex peripheriâ circuli cujus radius  $I Q$  in

arcum evanescentem  $I H$ , & similiter su-  
 perficies circularis quam arcus  $i h$ , convò-  
 lutione semicirculi  $a k b$  circa diametrum  
 $a b$ , describet, æquatur facto ex peripheria  
 circuli cujus radius  $i q$ , in arcum evanes-  
 centem  $i h$ , (152). Cum igitur periphe-  
 riæ circulorum sint ut radii, facta illa erunt  
 inter se ut  $I H \times I Q$ , ad  $i h \times i q$ .

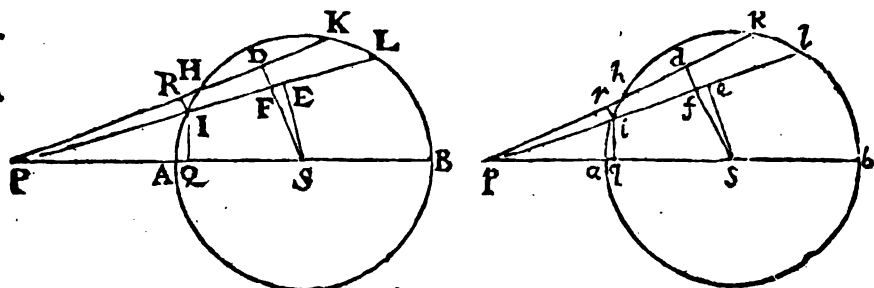
(<sup>x</sup>) \* Hoc est &c. Deleto in utrâ-  
 que quantitate facto  $P F \times p f$ , erunt attra-  
 ctiones ut  $\frac{p s^2}{P S}$  ad  $\frac{P S}{p s}$ , seu reducendo ad

eundem denominatorem, ut  $\frac{p s^2}{P S \times p s}$  ad  
 $\frac{P S^2}{p s \times P S}$ , hoc est, ut  $p s^2$  ad  $P S^2$ .



DE MO *KL*, *kl* descriptæ trahunt corpuscula, erunt ut *ps quad.* ad  
 TU COR- *PS quad.* inque eâdem ratione erunt vires superficierum omnium  
 PORUM. circularium in quas utraque superficies sphaerica, capiendò sem-

LIBER  
 PRIMUS.  
 PROP.  
 LXXI.  
 THEOR.  
 XXXI.



per *s d* æqualem *SD* & *se* æqualem *SE*, distingui potest.  
 Et, per compositionem, vires totarum superficierum sphaerica-  
 rum in corpuscula exercitæ erunt in eâdem ratione. *Q. E. D.*

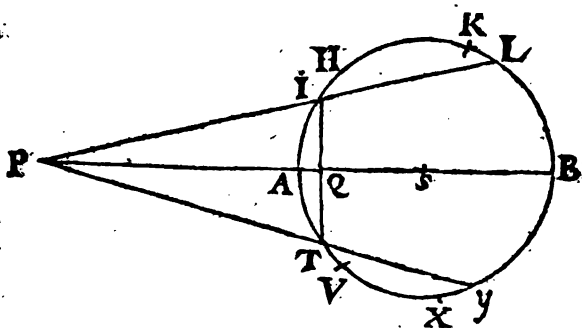
### PROPOSITIO LXXII. THEOREMA XXXII.

*Si ad sphaeræ cujuscvis puncta singula tendant vires æquales centri-  
 petæ decrescientes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis ;  
 ac detur tum sphaeræ densitas, tum ratio diametri sphaeræ ad di-  
 stantiam corpusculi à centro ejus: dico quod vis quâ corpusculum  
 attrahitur, proportionalis erit semidiametro sphaeræ.*

Nam concipe corpuscula duo seorsim à (*y*) sphaeris duabus  
 attrahi, unum ab unâ & alterum ab alterâ, & distantias eo-  
 rum:

518. Scholium. Si ex alterâ  
 parte diametri *AB* cariatur ar-  
 cus *AT=AI*, & arcus *TV=IH*,  
 vires obliquæ & æquales *IQ*,  
*TQ* sibi mutuo opponuntur, nul-  
 lumque motum in corpusculo *P*  
 producent. Unde patet vires inte-  
 gras in corpusculum *P* ab utroque  
 hemisphaerio *AHB*, *ATB* seu  
 à totâ superficie sphaericâ exer-  
 citas esse omnino viribus ad cen-  
 trum *S* tendentibus æquales.

(*y*) \* *A sphaeris duabus homogeneis; quantitates ubique contineantur; & vis  
 ejusdemque densitatis ita nempe ut sub absoluta attrahens sit semper ut quantitas  
 æqualibus voluminibus æquales. materiae materiae.*



# PRINCIPIA MATHEMATICA. 469

rum à sphaerarum centrīs proportionales esse diametris sphæ- DE MO-  
rarum respectivè , sphæras autem resolvi in particulas similes TU COR-  
& similiter positas ad corpuscula. Et attractiones corpusculi PORUM.  
unius , factæ versus singulas particulas sphærae unius , erunt LIBER.  
ad attractiones alterius versus analogas totidem particulas sphæ- PRIMUS.  
ræ alterius , in ratione compositâ ex ratione particularum di- PROP.  
rectè & ratione duplicatâ distantiarum inversè. Sed particu- LXXII.  
læ sunt ut sphærae , hoc est , in ratione triplicatâ diametrorum, THEOR.  
& distantiae sunt ut diametri ; & ratio prior directè unâ cum XXXII.  
ratione posteriore bis inversè est ratio diametri ad diametrum.

Q. E. D.

*Corol. 1.* Hinc si corpuscula in circulis , circa sphæras ex ma-  
teriâ æqualiter attractivâ constantes , revolvantur ; sintque distan-  
tiæ à centrīs sphaerarum proportionales earumdem diametris :  
Tempora periodica erunt æqualia.

*Corol. 2.* Et vicè versâ , si tempora periodica sunt æqualia ;  
distantiæ erunt proportionales diametris. Constant hæc duo per

*corol. 3. prop. IV.*

*Corol. 3.* Si ad solidorum duorum quorumvis , similium & æqualiter den-  
sorum , punctâ singula tendant vires æquales cen-  
tripetæ decrecentes in duplicatâ ratione distantiarum à punc-  
tis ; vires , quibus corpuscula , (\*) ad solida illa duo similiter  
sita , attrahentur ab iisdem ; erunt ad invicem ut diametri so-  
lidorum.

PRO.

(\*) \* Ad solida illa duo similiter sita , ita ut distantiae corpusculorum à similibus solidorum duorum particulis sint ut eorum solidorum diametri.

117. *Scholium.* Hinc si huiusmodi sphæra per centrum perforetur , æqualia erunt tempora omnia , quibus corpus de locis qui-

busvis ad centrum usque cadit ; ( per cor. 2. prop. 38. ) & corpusculorum in huiusmodi sphæra per spatia libera minima revolvendi tempora periodica erunt æqualia ( per cor. 3. prop. 4. ) atque ad huius generis sphæram pertinent quæ in prop. 51. 52. huiusque corollariis demonstrata sunt.

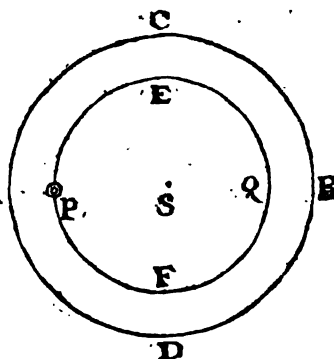
DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

PROPOSITIO LXXIII. THEOREMA XXXIII.

**LIBER PRIMUS.** Si ad sphaeræ alicujus datæ puncta singula tendant æquales vires centripetæ decrecentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis: dico quod corpusculum intra sphaeram constitutum attrahitur vi proportionali distantia suæ ab ipsius centro.

**THEOR. XXXIII.**

In sphaerâ  $ABCD$ , centro  $S$  descriptâ, locetur corpusculum  $P$ ; & centro eodem  $S$ , intervallo  $SP$ , concipe sphaeram internam  $PEQF$  describi. Manifestum est, (per prop. LXX.) quod sphaericæ superficies concentricæ, ex quibus sphaerarum differentia  $AEBF$  componitur, attractionibus suis per attractiones contrarias destructis, nil agunt in corpus  $P$ . Restat sola attractio sphaeræ interioris  $PEQF$ . Et (per prop. LXXII.) hæc est ut distantia  $PS$ .  $Q.E.D.$



*Scholium.*

Superficies, ex quibus solida componuntur, hic non sunt purè mathematicæ, sed orbes adeo tenues, ut eorum crassitudo instar nihili sit; nimirum orbes evanescentes, ex quibus sphaera ultimò constat, ubi orbium illorum numerus augetur & crassitudo minuitur in infinitum. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, superficies & solida, componi dicuntur, intelligendæ sunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

PROPOSITIO LXXIV. THEOREMA XXXIV.

*Iisdem positis; dico quod corpusculum extra sphaeram constitutum attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantia suæ ab ipsius centro.*

Nam distinguatur sphaera in superficies sphaericas innumeras concentricas.

centricas, & attractiones corpusculi à singulis superficiebus oriun- DE MO-  
da erunt reciproce proportionales quadrato distantiae corpusculi TU CER-  
à centro (per prop. LXXI.). Et componendo fiet summa attrac- PORUM:  
tionum, hoc est attractio corpusculi in sphaeram totam, in eâ LIBER  
dem ratione. Q. E. D. PRIMUS.  
PROP.

Corol. 1. Hinc in æqualibus distantis à centris homogenea- LXXIV.  
rum sphaerarum attractiones sunt ut sphaeræ. Nam (per prop. THEOR.  
LXXII.) si distantiae sunt proportionales diamettris sphaerarum, XXXIV.  
vires erunt ut diametri. Minuatur distantia major in illâ ratio-  
ne; & distantis jam factis æqualibus, augebitur attractio in du-  
plicatâ illâ ratione; ideoque erit ad attractionem alteram in tri-  
plicatâ illâ ratione, hoc est, in ratione sphaerarum.

Corol. 2. In distantis quibuscumque attractiones sunt ut sphaeræ  
applicatae ad (\*) quadrata distantiarum.

Corol. 3. Si corpusculum, extra sphaeram homogeneam posi-  
tam, trahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiae suæ  
ab ipsius centro, consistet autem sphaera ex particulis attractivis;  
(b) decrescet vis particulæ cujusque in duplicatâ ratione distan-  
tiae à particulâ.

# PROPOSITIO LXXV. THEOREMA XXXV.

Si ad sphaera data puncta singula tendant vires æquales cen-  
tripetae, decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum à punc-  
tis; dico quod sphaera quævis alia similis ab eadem at-  
trahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiae centro-  
rum.

Nam particulæ cujusvis attractio est reciproce ut quadratum  
distan-

(a) \* Ad quadrata distantiarum. Nam quævis vis attractrix absolu-  
ta quantitati materiæ proportionalis sup-  
ponatur, si vis particularum sphaeræ in ma-  
jori vel minori ratione quam duplicatâ  
distantiarum à particulis decresceret, cor-  
pusculum extra sphaeram constitutum ma-  
jori vel minori vi traheretur quam reci-  
procè proportionali quadrato distantiae à  
centro sphaeræ.

(b) \* Decrescit vis particulæ cujusque  
quævis. Nam dum vis attractrix absolu-  
ta quantitati materiæ proportionalis sup-  
ponatur, si vis particularum sphaeræ in ma-  
jori vel minori ratione quam duplicatâ  
distantiarum à particulis decresceret, cor-  
pusculum extra sphaeram constitutum ma-  
jori vel minori vi traheretur quam reci-  
procè proportionali quadrato distantiae à  
centro sphaeræ.

# 472. PHILOSOPHIÆ NATURALIS

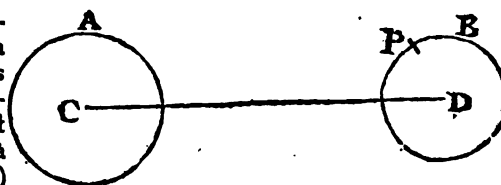
DE MO- distantia suæ à centro sphæræ trahentis, ( *per prop. LXXIV.* ) &  
TU COR- propterea eadem est, ac si vis tota attrahens manaret de corpus-  
PORUM. culo unico sito in centro hujus sphæræ. Hæc autem attractio  
LIBER tanta est, quanta foret vicissim attractio corpusculi ejusdem,  
PRIMUS. si modo illud à singulis sphæræ attractæ particulis eadem vi tra-  
PROP. heretur, quâ ipsas attrahit. Foret autem illa corpusculi attractio  
LXXV. ( *per prop. LXXIV.* ) reciprocè proportionalis quadrato distantia  
THEOR. suæ à centro sphæræ; ideoque huic æqualis attractio sphæræ est  
XXXV. in eadem ratione. ( *c* ) Q. E. D.

( *d* ) Corol. 1. Attractiones sphærarum; versus alias sphæ-  
ras homogeneas, sunt ut sphæræ trahentes applicatæ ad qua-  
drata distantiarum centrorum suorum à centris earum, quas  
attrahunt.

Corol. 2. Idem valet, ubi sphæra attracta etiam attrahit.  
Namque hujus puncta singula trahent singula alterius eadem vi,  
quâ ab ipsis vicissim trahuntur; ideoque cum in omni attractio-  
ne urgeatur ( *per legem 3.* ) tam punctum attrahens, quam punc-  
tum

( *c* ) \* Q. E. D. Demonstratio cla-  
rius intelligitur appositâ figurâ. Sphæra  
A sphærâh similarem B attrahat, & vis  
acceleratrix quâ sphæræ B particula quæ-  
vis P in centrum C sphæræ A urgetur est  
reciprocè ut quadratum distantia P C à  
centro sphæræ trahentis ( *per prop. 74.* )  
& propterea eadem est ac si vis tota at-  
trahens manaret de corpusculo unico C  
sito in centro sphæræ trahentis A; vis au-  
tem tota acceleratrix quâ sphæra integra  
B à corpusculo C trahitur, tanta est  
quanta foret vicissim attractio ejusdem cor-  
pusculi C versus centrum D sphæræ B, si  
modò illud corpusculum C à singulis sphæ-  
ræ B particulis eadem vi traheretur quâ  
ipsas attrahit, ut manifestum est. Foret  
autem ( in hac hyp. ) illa corpusculi C  
versus centrum D attractio ( *per prop. 74.* )  
reciprocè proportionalis quadrato distan-  
tia suæ C D à centro D sphæræ B; Qua-  
rè attractio sphæræ B versus C ut pote  
æqualis attractioni suppositæ corpusculi C  
versus D, est in eadem ratione inversâ  
quadrati distantia C D. Q. E. D.

( *d* ) \* Cor. 1. Vis acceleratrix quâ



sphæræ B particula quævis P versus cen-  
trum C sphæræ A urgetur, est ut sphæra  
A applicata ad quadratum distantia C P,  
( *per cor. 2. prop. 74.* ) & propterea  
eadem est ac si vis tota attrahens quæ  
esset ut sphæra A manaret de cor-  
pusculo unico C sito in centro sphæræ  
trahentis A; & similiter sphæra tota B  
ad centrum C trahitur ut corpusculum  
unicum in centro D situm ( *per prop.  
75.* ) vis autem acceleratrix quâ corpi-  
culum in centro D positum versus C tra-  
hitur, est ut vis absoluta corpusculi C seu  
ut sphæra A directè & quadratum distan-  
tia C D inversè. Quare attractiones sphæ-  
rarum acceleratrices versus alias sphæras  
homogeneas sunt ut sphæra trahente appli-  
cata &c.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 473

um attractum, (e) geminabitur vis attractionis mutue, con-  
servatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum cir-  
ca umbilicum conicarum sectionum (f) demonstrata sunt, obti-  
nent, ubi sphaera attrahens locatur in umbilico: & corpora mo-  
ventur extra sphaeram.

Corol. 4. Ea verò, quæ de motu corporum circa centrum  
conicarum sectionum (g) demonstrantur, (h) obtinent ubi mo-  
tus peraguntur intra sphaeram.

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXXXV.  
THEOR.  
LXXXV.

## PRO-

(e) \* Geminabitur vis attractionis mu-  
tue &c. Si sphaera A sphaeram B vi pro-  
pria attrahente destitutam trahat, erit vis  
acceleratrix sphaerae B versus centrum C

sphaerae trahentis A, ut  $\frac{A}{CD^2}$ , (per cor.

prop. 75.) jam si sphaera B vi pro-  
pria attrahens tribuatur, vis acceleratrix

sphaerae A versus B inde genita, erit ut  $\frac{B}{CD^2}$ ,

& vis illius motrix (15) ut  $\frac{B \times A}{CD^2}$ , quæ

(per Leg. 3.) æquatur vi motrici sphae-  
rae B versus sphaeram A ex reactione sphae-  
rae A genitæ. Quare dividendo per B, vis

acceleratrix sphaerae B, versus centrum C

sphaerae A, rursus erit ut  $\frac{A}{CD^2}$ , ideoque

attractio tota acceleratrix sphaerae B, ver-

sus centrum sphaerae A; erit in distantia  
datâ ut sphaera ipsa A, & in distantia va-  
riabili ut sphaera A ad quadratum distan-  
tiæ applicata. Quod similiter dicendum  
est de attractione sphaerae A versus cen-  
trum sphaerae B. Observandum verò est  
quod si, ut hic supponitur, vires absolute  
particularum utriusque sphaerae A & B  
æquales sint & utraque vi propria attrahi-  
vâ quantitati materiae proportionali prædi-  
ta sit, attractio mutua dupla evadit.

(f) \* Demonstrata sunt. (In Sect.  
3â. 6â. 7â. 9â. 11â.

(g) \* Demonstrantur. (Prop. 10. 38.  
47. 51. 52. 64.)

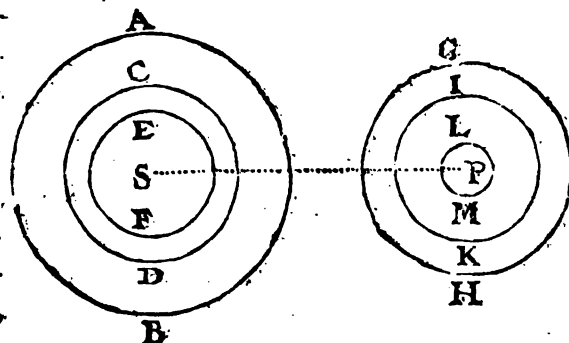
(h) \* Obiinent &c. (per prop. 73.)  
ubi motus peraguntur intra sphaeram, hoc  
est, ubi intra sphaeram solidam via corpo-  
ribus motis libera conceditur.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

PROPOSITIO LXXVI. THEOREMA XXXVI.

**LIBER PRIMUS** Si sphaera in progressu à centro ad circumferentiam ( quoad materiae densitatem & vim attractivam ) utcumque dissimilares ,  
**PROP. LXXVI.** in progressu verò per circuitum ad datam omnem à centro distantiam sunt undique similes ; & vis attractiva puncti cujusque decrescit in duplicatâ ratione distantiae corporis attracti : dico quod vis tota , quâ hujusmodi sphaera una attrahit aliam , sit reciproce proportionalis quadrato distantiae centrorum .

Sunto sphaerae quocunque concentricae similes  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$ , &c. quarum interiores. additae exterioribus component materiam densiorem versus centrum , vel subductae relinquant tenuiorem ; & haec ( per prop. LXXV. ) trahent sphaeras alias quocunque concentricas similes  $GH$ ,  $IK$ ,  $LM$ , &c. singulae singulas , viribus reciproce proportionalibus quadrato distantiae  $SP$ . Et ( i ) componendo vel dividendo , summa virium illarum omnium , vel excessus aliquarum .



supra alias ; hoc est , vis , quâ sphaera tota , ex concentricis quibuscunque vel concentricarum differentiis composita  $AB$  , trahit totam ex concentricis quibuscunque vel concentricarum differentiis compositam  $GH$  ; erit in eadem ratione. Augeatur

( i ) \* Et componendo vel dividendo &c. Hoc est , in datâ distantia centrorum communium  $S$ ,  $P$ , sit attractio sphaerarum  $GH$ ,  $IK$ ,  $LM$  à sphaera  $AB$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ; à sphaera  $CD$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$  ; à sphaera  $EF$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $i$  ; variante verò illâ distantia communium centrorum  $S$ ,  $P$  vires omnes illae mutabuntur , respectivè secundum rationem .

illam inversam quadrati distantiae Centrorum , ergo summa vel differentia virium quibus omnes sphaerae  $GH$ ,  $IK$ ,  $LM$  à sphaeris  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$  attrahuntur in primâ distantia , erit ad summam vel differentiam virium in altero casu inversè ut quadrata distantiarum .

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 475

tur numerus sphaerarum concentricarum in infinitum sic, ut **DE MO-**  
 materiae densitas una cum vi attractiva, in progressu à circum-**TU COR-**  
 ferentiâ ad centrum, secundum legem quamcunque crescat vel **FORUM.**  
 decreascet; & addita materiâ non attractivâ, compleatur ubivis **LIBER**  
 densitas deficiens, eo ut sphaerae acquirant formam quamvis op- **PRIMUS.**  
 tatam; & vis, quâ harum una attrahet alteram, erit etiam **PROP.**  
 num, per argumentum superius, in eadem illâ distantiae qua- **LXXVI.**  
 dratae ratione inversâ. **Q. E. D.** **THEOR.**  
**XXXVI.**

*Corol. 1.* Hinc si ejusmodi sphaerae complures sibi invicem  
 per omnia similes, se mutuo trahant; attractiones acceleratrices  
 singularum in singulas erunt, in æqualibus quibuscunque centrorum  
 distantis, ut sphaerae attrahentes.

(\*) *Corol. 2.* Inque distantis quibuscunque inæqualibus, ut sphae-  
 rae attrahentes applicatae ad quadrata distantiarum inter centra.

*Corol. 3.* Attractiones verò motrices, seu pondera sphaerarum  
 in sphaeras erunt, in æqualibus centrorum distantis, ut sphaerae  
 attrahentes & attractae conjunctim, id est, ut contenta sub sphae-  
 ris per multiplicationem producta.

(1) *Corol. 4.* Inque distantis inæqualibus, ut contenta illa  
 directè & quadrata distantiarum inter centra inversè.

*Corol. 5.* Eadem valent, ubi attractio oritur à sphaera  
 utriusque virtute attractiva mutuo exercita in sphaeram alte-  
 ram.

(\*) \* *Cor. 2.* Attractiones accelera-  
 trices sphaerarum GH, IK, LM &c. in  
 sphaeras AB, CD, EF, &c. singularum  
 versis singulas sunt (per cor. 1. prop. 75.)  
 ut sphaerae trahentes applicatae ad quadra-  
 ta distantiarum inter centra S, P. Qua-  
 ré componendo vel dividendo summa at-  
 tractionum illarum omnium vel excessus  
 aliquarum supra alias, hoc est, tota  
 attractio acceleratrix sphaerae compositae  
 GIMH versis sphaeram compositam ACFB  
 erit ut summa vel differentia sphaerarum con-  
 centricarum similium AB, CD, EF,  
 &c. ad quadratum distantiae SP applicata.  
 Sed si sphaerae trahentes sunt sibi invicem  
 per omnia similes, summae illae vel differ-  
 entiae sunt ut sphaerae ipsae. Quare patet  
 veritas Coroll. 1. & 2.

(1) \* *Cor. 4.* Corollaria 3<sup>um</sup>. & 4<sup>um</sup>.  
 ex corollariis 1<sup>o</sup>. & 2<sup>o</sup>. manifesta sunt;  
 Nam attractionis quantitas motrix, seu  
 pondus sphaerae attractae in sphaeram tra-  
 hentem aequipollet facto ex vi accelera-  
 ce ducta in quantitatem materiae, seu in  
 massam sphaerae attractae; vis autem acce-  
 leratrix (per cor. 2. prop. hujus) est ut  
 sphaera attrahens applicata ad quadratum  
 distantiae inter centra, & quantitates ma-  
 teriae in sphaeris per omnia similibus, sunt  
 ut voluimus, seu ut sphaerae ipsae. Qua-  
 ré attractiones motrices seu pondera sphae-  
 rarum in sphaeras, sunt ut contenta sub  
 sphaeris per multiplicationem producta di-  
 rectè & quadrata distantiarum inter cen-  
 tra inversè.



# 476 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo-ram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportionem  
TU COR- servatâ.

LIBER  
PRIMUS.  
PROPO- Corol. 6. Si hujusmodi sphaeræ aliquæ circa alias quiescen-  
LXXVI. tes revolvantur, singulæ circa singulas; sintque distantiae inter  
centra revolventium & quiescentium proportionales quiescen-  
tium diametris; æqualia erunt tempora periodica.

THEOR.  
XXXVI. Corol. 7. Et vicissim, si tempora periodica sunt æqualia; di-  
stantiæ erunt (<sup>m</sup>) proportionales diametris.

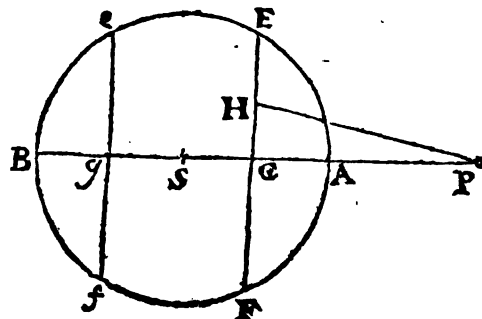
Corol. 8. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum  
circa umbilicos conicarum sectionum demonstrata sunt, obtinent;  
ubi sphaera attrahens formæ & conditionis cujusvis jam descrip-  
tæ locatur in umbilico.

Corol. 9. (<sup>n</sup>) Ut & ubi gyrationia sunt etiam sphaeræ attrahen-  
tes, conditionis cujusvis jam descriptæ.

## PROPOSITIO LXXVII. THEOREMA XXXVII.

*Si ad singula sphaerarum puncta tendant vires centripetæ proportio-  
nales distantis punctorum à corporibus attractis: dico quod vis  
composita, quâ sphaeræ duæ se mutuo trahent, est ut distantia  
inter centra sphaerarum.*

Cas. 1. Sit *AEBF* sphæ-  
ra; *S* centrum ejus; *P* cor-  
pusculum attractum, *PASB*  
axis sphæræ per centrum cor-  
pusculi transiens; *EF*, *ef* *B*  
plana duo, quibus sphaera  
secatur, huic axi perpendi-  
cularia, & hinc inde æqua-  
liter distantia à centro sphæ-  
ræ; *G*, *g* intersectiones planorum & axis; & *H* punctum quod-  
vis in plano *EF*. Puncti *H* vis centripeta in corpusculum *P*,  
secundum lineam *PH* exercita, est ut distantia *PH*; & (per  
le-



(m) \* Proportionales diametris. Cor. 6.  
& 7. constant per cor. 3. prop. 4<sup>a</sup>.

(n) \* Ut & ubi gyrationia &c. Patet  
per Cor. 2. Prop. 5<sup>a</sup>.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 477

legum corol. 2.) secundum lineam  $P G$ , seu versus centrum  $S$ , De Mo-  
ut longitudo  $P G$ . Igitur punctorum omnium in plano  $E F$ , TU COR-  
hoc est plani totius vis, quâ corpusculum  $P$  trahitur versus FORUM.  
centrum  $S$ , est ut distantia  $P G$  multiplicata per numerum punc- LIBER  
torum, id est, ut solidum quod continetur sub plano ipso  $E F$  PRIMUS.  
& distantia illa  $P G$ . Et similiter vis plani  $e f$ , quâ corpuscu- PRO P.  
lum  $P$  trahitur versus centrum  $S$ , est ut planum illud ductum LXXVII.  
in distantiam suam  $P g$ , sive ut huic æquale planum  $E F$  duc- THEOR.  
tum in distantiam illam  $P g$ ; & summa virium plani utrius- XXXVII.  
que ut planum  $E F$  ductum in summam distantiarum  $P G + P g$ ,  
id est, ut planum illud ductum in duplam centri & (°) cor-  
pusculi distantiam  $P S$ , hoc est, ut duplum planum  $E F$  duc-  
tum in distantiam  $P S$ , vel ut summa æqualium planorum  $E F$   
+  $e f$  ducta in distantiam eandem. Et simili argumento, vires  
omnium planorum in sphaerâ totâ, hinc inde æqualiter à cen-  
tro sphaeræ distantium, sunt ut summa planorum ducta in di-  
stantiam  $P S$ , hoc est, ut sphaera tota & ut distantia  $P S$  con-  
junctim. Q. E. D. (P)

Cas. 2. Trahat jam corpusculum  $P$  sphaeram  $A E B F$ . Et  
eodem argumento probabitur quod vis, quâ sphaera illa trahitur,  
erit ut distantia  $P S$ . Q. E. D.

Cas. 3. Componatur jam sphaera altera ex corpusculis innu-  
meris  $P$ ; & quoniam vis, quâ corpusculum unumquodque tra-  
hitur, est ut distantia corpusculi à centro sphaeræ primæ, & (°)  
ut sphaera eadem conjunctim, atque ideo eadem est, ac si pro-  
diret tota de corpusculo unico in centro sphaeræ; vis tota,  
quâ corpuscula omnia in sphaera secunda trahuntur, hoc est, quâ  
sphaera illa tota trahitur, eadem erit, ac si sphaera illa traheretur  
vi prodeunte de corpusculo unico in centro sphaeræ primæ,  
& (°) propterea proportionalis est distantiae inter centra sphæ-  
rarum. Q. E. D. Cas.

(°) \* Et corpusculi distantiam  $P S$ .  
Est enim  $P g = P G + 2 G S$ , adeoque  $P g$   
+  $P G = 2 P G + 2 G S = 2 P S$ .

(P) \* Q. E. D. Observandum est vi-  
res obliquas  $G H$ , in plano quovis  $E F$ ,  
ex utraq; axis  $P B$  parte in æqualibus  
distantiis sumptas esse æquales & opposi-

tas, nullumque proinde motum produce-  
re.

(q) \* Et ut sphaera eadem conjunctim,  
per cas. 1.

(r) \* Et propterea proportionalis est di-  
stantia &c. Si data est sphaera prima tra-  
hens per cas. 2.

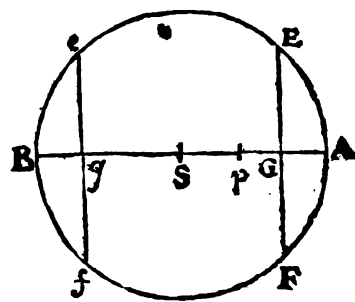
# 478. PHILOSOPHIÆ NATURALIS

**DE MOTU CORP. PORUM.** *Cas. 4.* Trahant sphaeræ se mutuo, & vis geminata proportionem priorem servabit.

**LIBER PRIMUS. PROP. LXXVII.** *Cas. 5.* Locetur jam corpusculum  $p$  intra sphaeram  $AEBF$ ; & quoniam vis plani  $ef$  in corpusculum est ut solidum contentum sub plano illo & distantia  $pg$ ; & vis contraria plani  $EF$  ut solidum contentum sub plano illo & distantia  $pG$ ; (1) erit vis ex utrâque composita ut differentia solidorum, hoc est, ut summa æqualium planorum ducta in semissem differentia distantiarum, id est, ut summa illa ducta in  $pS$  distantiam corpusculi à centro sphaeræ. Et simili argumento, attractio planorum omnium  $EF$ ,  $ef$  in sphaerâ totâ, hoc est, attractio sphaeræ totius, est conjunctim ut summa planorum omnium, seu sphaerâ tota, & ut  $pS$  distantia corpusculi à centro sphaeræ.

*Q. E. D.*

*Cas. 6.* Et si ex corpusculis innumeris  $p$  componatur sphaera nova, intra sphaeram priorem  $AEBF$  sita; probabitur ut prius quod attractio, sive simplex sphaeræ unius in alteram, sive mutua utriusque in se invicem, erit ut distantia centrorum  $pS$ . *Q. E. D.*



## PROPOSITIO LXXVIII. THEOREMA XXXVIII.

*Si sphaeræ in progressu à centro ad circumferentiam sint utcumque dissimilares & inæquabiles, in progressu vero per circuitum ad datam omnem à centro distantiam sint undique similes; & vis attractiva puncti cujusque sit ut distantia corporis attracti: dico quod vis tota quâ hujusmodi sphaeræ duæ se mutuo trahunt sit proportionalis distantia inter centra sphaerarum.*

Demonstratur ex propositione præcedente eodem modo; quo

(1) \* Erit vis ex utrâque composita ut differentia solidorum, hoc est, ut  $ef \times pg - EF \times pG$ . Est autem  $Sg = SG$ , adeoque  $pg - pG = pS + SG - pG = 2pS$ ; Quare cum sit etiam  $EF = ef$ , erit  $ef \times pg - EF \times pG = ef \times pg - pG = 2ef \times pS = ef + EF \times pS$ . Si punctum  $G$  est inter  $p$  &  $S$  situm, vis tota erit ut  $ef \times pg + EF \times pG$ , & quoniam est semper  $Sg = SG$ , atque in hoc casu  $pg + pG = pS + SG + pG = 2pS$ , similiter invenietur vis tota ut  $ef = EF \times pS$ .

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 479

quo propositio LXXVI. ex propositione LXXV. demonstrata fuit. (§)

*Corol.* Quæ superius in propositionibus X. & LXIV. de motu corporum circa centra conicarum sectionum demonstrata sunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi corporum sphaericorum conditionis jam descriptæ, & attracta corpora sunt sphaeræ conditionis ejusdem.

DE MOTU CORP. PORUM.  
LIBER PRIMUS.  
PROP. LXXVIII.  
THEOR. XXXVIII.

## Scholium.

Attractionum casus duos insigniores jam dedî expositos; nimirum ubi vires centripetæ decrescunt in duplicatâ distantiarum ratione, vel crescunt in distantiarum ratione simplici; efficientes in utroque casu ut corpora gyrentur in conicis sectionibus, & componentes corporum sphaericorum vires centripetas eâdem lege, in recessu à centro, decrescentes vel crescentes cum seipsis; Quod est notatu dignum. Casus cæteros, qui conclusiones minus elegantes exhibent, sigillatim percurrere longum esset. Malim cunctos methodo generali simul comprehendere ac determinare ut sequitur.

## LEM-

(§) Quæ in corollariis prop. 78. ubi attractio sphaeræ versùs sphaeram erat quadrato distantiarum centrorum reciproce proportionalis, demonstrata sunt, ea, mutatis mutandis, ad casum hujus propositionis 78. transferri possunt. Nimirum si ejusmodi sphaeræ complures per omnia similes se invicem trahant, attractiones acceleratrices.

singularum in singulas erunt ut sphaeræ trahentes & distantie inter centra conjunctim; attractiones vero motrices ut sphaera attrahentes & attractæ & distantie inter centra conjunctim, eademque valent ubi attractio oritur à sphaeræ utriusque virtute attractivâ manû exercitâ in sphaeram alteram.

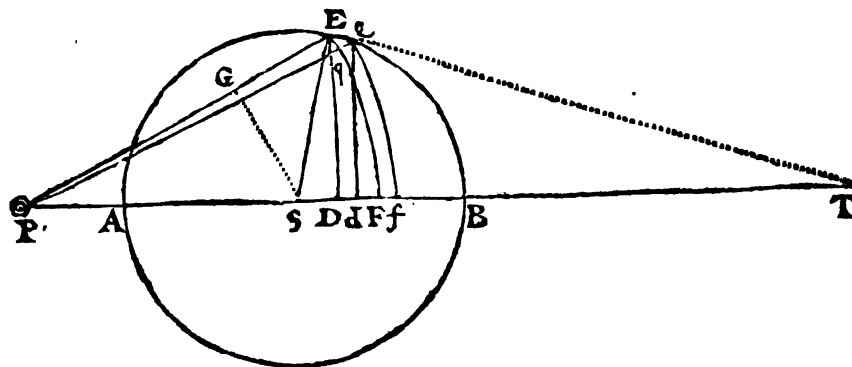
DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

LEMMA XXIX.

**LIBER PRIMUS.** Si describantur centro  $S$  circulus quilibet  $AEB$ , & centro  $P$  circuli duo  $EF$ ,  $ef$ , secantes priorem in  $E$ ,  $e$ , lineamque  $PS$  in  $F$ ,  $f$ ; & ad  $PS$  demittantur perpendiculara  $ED$ ,  $ed$ : dico quod, si distantia arcuum  $EF$ ,  $ef$  in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evanescentis  $Dd$  ad lineam evanescentem  $Ff$  ea sit, quæ lineæ  $PE$  ad lineam  $PS$ .

**PROP. LXXVIII. LEMMA XXIX.**

Nam si linea  $Pe$  secet arcum  $EF$  in  $q$ ; & recta  $Ee$ , quæ cum arcu evanescente  $Ee$  coincidit, producta occurrat rectæ  $PS$  in  $T$ ; & ab  $S$  demittatur in  $PE$  normalis  $SG$ : ob (\*) similia triangula  $DTE$ ,  $dTe$ ,  $DES$ ; erit  $Ed$  ad  $Ee$ , ut  $DT$



ad  $TE$ , seu  $DE$  ad  $ES$ ; & ob (u) triangula  $Eeq$ ;  $ESG$  (per lem. VIII. & corol. 3. lem. VII.) similia, erit  $Ee$  ad  $eq$  seu  $Ff$  ut  $ES$  ad  $SG$ ; & ex æquo,  $Dd$  ad  $Ff$  ut  $DE$  ad  $SG$ ; hoc est (ob similia triangula  $PDE$ ,  $PGS$ ) ut  $PE$  ad  $PS$ .  
**Q. E. D. PRO-**

(\*) \* Ob similia triangula  $DTE$ ,  $dTe$ ;  $DES$ . Ob parallelas  $DE$ ,  $de$ , triangula  $DTE$ ,  $dTe$  similia sunt; & quoniam recta  $TE$  circulum  $AEB$  tangit in  $E$ , erit angulus  $SET$  rectus, & proinde demisso ex puncto  $E$  ad basim  $ST$  perpendicularo  $ED$ , erit triangulum  $DES$  simile triangulo  $DTE$  (prop. 8. Lib. 6. Elem.).

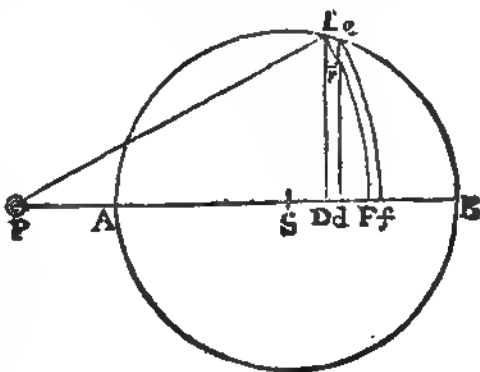
(u) \* Et ob triangula  $Eeq$ ,  $ESG$  &c. Anguli ad  $G$  &  $q$  recti sunt & proinde æquales; & quoniam anguli  $PEq$ ,  $SEe$  sunt quoque recti & æquales, (ex naturâ circuli) detracto communi angulo  $SEq$ , anguli residui  $GES$ ,  $qEe$ , erunt etiam æquales. Quare triangula  $Eeq$ ,  $ESG$  sunt similia (prop. 4. lib. 6. Elem.).

PROPOSITIO LXXIX. THEOREMA XXXIX.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXXIX.  
THEOR.  
XXXIX.

Si superficies ob latitudinem infinitè diminutam jamjam evanescens  $E F f e$ , convolutione sui circa axem  $P S$ , describat solidum sphaericum concavo-convexum, ad cujus particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod vis, quâ solidum illud trahit corpusculum situm in  $P$ , est in ratione compositâ ex ratione solidi  $D E q \times F f$ , & ratione vis quâ particula data in loco  $F f$  traheret idem corpusculum.

Nam si primò consideremus vim superficiiei sphaericæ  $F E$ , quæ convolutione arcus  $F E$  generatur, & à linea  $d e$  ubivis secatur in  $r$ ; erit superficiiei pars annularis, convolutione arcus  $r E$  genita, ut lineola  $D d$ , manente sphaeræ radio  $P E$  (uti (2) demonstravit Archimedes in lib. de Sphaerâ & Cylindro.) Et hujus vis, secundum lineas  $P E$  vel  $P r$  undique in (1) superficie conicâ fitas exercita, ut hæc ipsa superficiiei pars annularis; hoc est, ut lineola  $D d$ , vel, quod perinde est, ut rectangulum sub dato sphaeræ radio  $P E$  & lineola illa  $D d$ : at secundum lineam  $P S$  ad centrum  $S$  tendentem minor in ratione  $P D$  ad  $P E$ , (2) ideoque ut  $P D \times D d$ . Dividi jam intelligatur



(x) §18. Uti demonstravit Archimedes &c. Facilis est demonstratio. Quoniam enim angulus  $P E r$  rectus est (ex naturâ circuli) erit angulus  $D E r$  æqualis angulo  $D P E$ , ob summam angulorum  $D P E + P E D$  recto  $P E r$  æqualem. Unde si ex puncto  $r$  in lineam  $D E$  demissum intelligatur perpendicularum quod æquale erit lineæ  $D d$ , constituetur triangulum evanescens simile triangulo  $E P D$ , eritque adeo  $D E : P E :: D d : E r :: \frac{P E \times D d}{D E}$ , sed

(§15) zona circularis convolutione arcus  $r E$  genita, est ut rectangulum  $r E \times D E$ ; Quare si in hoc rectangulo loco  $r E$  substituaturs valor ipsius modò inventus, erit zona ut  $P E \times D d$ , hoc est, ob datum radium  $P E$ , ut  $D d$ . Q. E. D.

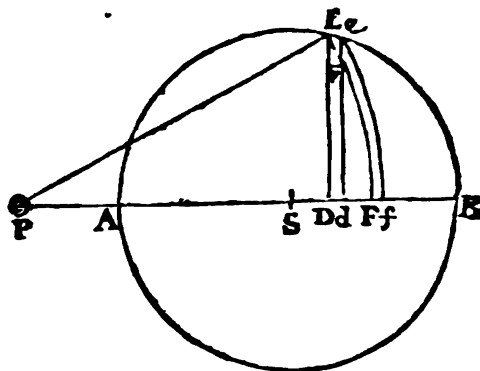
(y) \* In superficie conicâ. Nam in convolutione puncti  $E$ , linea  $P E$  superficiem conicam describit.

(z) \* Ideoque ut  $P D \times D d$ . Nam si vis secundum directionem  $P E$  agens per lineam  $P E$  exponatur, vis illius pars quæ

DE MO TUR linea  $DF$  in particu-  
 TU COR- las innumeras æquales, quæ  
 PORUM. singulæ nominentur  $Dd$ ; &  
 LIBER superficies  $FE$  dividetur (a)  
 PRIMUS. in totidem æquales annulos,  
 PROP. quorum vires erunt ut sum-  
 LXXIX. ma omnium  $PD \times Dd$ , hoc  
 THEOP. est, ut  $\frac{1}{2} PFq - \frac{1}{2} PDq$ ,  
 XXXIX. ideoque ut (b)  $DE$  quad.

Ducatur jam superficies  $FE$   
 in altitudinem  $Ff$ ; & fiet

solidi  $EFfe$  vis exercita in corpusculum  $P$  ut  $DEq \times Ff$ : putâ  
 si detur vis quam particula aliqua data  $Ff$  in distantia  $PF$  exer-  
 cet



agit secundum directionem  $PS$ , exponetur  
 per lineam  $PD$ ; erit  $PE$  ad  $P$   $D$  ut rec-  
 tangelum  $PE \times Dd$  ad rectangelum  $PD$   
 $\times Dd$ , quod proinde vim illam secundum  
 directionem  $PD$  exhibebit, vires autem  
 obliquæ  $ED$  ab utraq; axis  $PB$  parte  
 se mutuo destruunt.

(a) \* Dividitur in totidem æquales  
 annul. s. (Per not. 518. ).

(b) \* Et superficies  $FE$  dividitur in  
 totidem æquales annulos, quorum vires  
 erunt ut summa omnium  $PD \times Dd$ , hoc  
 est, ut  $\frac{1}{2} PFq - \frac{1}{2} PDq$ , ideoque ut  $DE$   
 quad. Scilicet omnes  $PD$ , dum ex  $P$   $D$ .  
 in  $P$   $F$  mutantur uniformiter crescendo  
 progressionem Arithmeticam faciunt, quo-  
 nam omnes partiulæ  $Dd$  quibus lineæ  
 $PD$  successive augentur sunt æquales: er-  
 go omnium  $PD$  summa eâ ratione inve-  
 nitur quâ summæ progressionum Arithme-  
 ticarum obtinentur, nempe primum & ul-  
 timum progressionis terminum simul jun-  
 ctis multiplicando per numerum termino-  
 rum progressionis, & dimidium facti su-  
 mendo; Progressionis verò hujus primus  
 terminus est  $P$   $D$ , ultimus  $P$   $F$  numerus  
 vero terminorum  $DF$ , siquidem  $DF$  est  
 summa incrementorum æqualium evanes-  
 centium lineæ  $PD$ , ergo summa omnium

$PD$  est  $\frac{PF + PD \times DF}{2}$  sive (quia  $DF$

est differentia linearum  $PF$  &  $PD$ ) est  
 summa omnium  $PD = \frac{PF + PD \times PF - PD}{2}$

sed (per 6. 2. Elem.) factum summæ &  
 differentiarum linearum æquatur dif-  
 ferentiæ quadratorum ipsorum, ergo

$\frac{PF + PD \times PF - PD}{2} = \frac{1}{2} PF^2 - \frac{1}{2} PD^2$

& summa omnium  $PD \times Dd = \frac{1}{2} PF^2 - \frac{1}{2} PD^2$   
 $\times Dd$ , sed  $Dd$  est particula quæ in om-  
 nibus hisce casibus ut eadem assumitur,  
 ergo vires totius superficiæ  $FE$  quæ sunt  
 ut summa omnium  $PD \times Dd$  sunt ut  
 $\frac{1}{2} PF^2 - \frac{1}{2} PD^2$  sive ut  $PF^2 - PD^2$   
 sed  $PF^2$  est æquale  $PE^2$  per constr. &  
 $PE^2 - PD^2 = DE^2$  (per 47. 1. El.)  
 ergo vires superficiæ  $FE$ , sunt ut  $DE^2$ .  
 Q. E. D.

Idem aliter. Sit radius datus  $PE = a$ ;  
 variabilis  $FD = x$ , erit fluxio  $Dd = dx$ , &  
 $PD = a - x$ , atque adeo  $PD \times Dd =$   
 $a dx - x dx$ , & sumptis utrinque fluenti-  
 bus (165) S.  $PD \times Dd = a x - \frac{1}{2} x x =$   
 $\frac{2ax - xx}{2} = \frac{DE^2}{2}$ , (prop. 13. lib. 6.

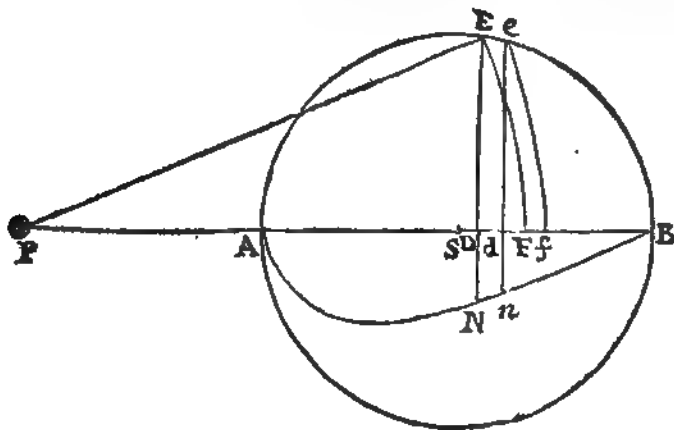
Elem.). Quare vis superficiæ convolutio-  
 ne arcus  $FE$  genitæ erit ut  $DE^2$ .

DE MO-  
TU COR-  
PORUM,  
LIBER

PRIMUS.

PROP.  
LXXX.  
THEOR.

ut quantitas  $\frac{PE \cdot Q \cdot 2 \cdot P \cdot S}{P \cdot E}$  & vis, quam sphaera particula sita in axe ad distantiam P E exercet in corpusculum P, conjunctim: dico quod vis tota, qua corpusculum P trahitur versus sphaeram, est ut area A N B comprehensa sub axe sphaerae A B, & linea curva A N B, quam punctum N perpetuo tangit.



con-

lineam P S minor erit in ratione P D ad PE, ideoque erit ut P D  $\times$  D d  $\times$  F f  $\times$  V. Et quoniam variante P D, manet factum F f  $\times$  V quod nimirum vis V in singulis particulis datis F f, æqualis supponatur; Si sumantur fluentes, ut supra, erit vis tota solidi E F f e, in corpusculum P secundum lineam P S exercita ut D E<sup>2</sup>  $\times$  F f  $\times$  V.



TDs Mo constucta sunt, concipe axem sphæræ  $AB$  dividi in particulas  
 PU COR- innumeras æquales  $Dd$  & sphæram totam dividi in totidem  
 ORUM laminas sphæricas concavo-convexas  $EFfe$ , & erigatur perpen-  
 LIBER diculum  $dn$ . Per theorema superius vis, quâ lamina  $EFfe$   
 PRIMUS. trahit corpusculum  $P$ , est ut  $DEq \times Ff$  & vis particulæ unius  
 PROP. ad distantiam  $PE$  vel  $PF$  exercita conjunctim. Est autem (per  
 LXXX. THEOR. lemma novissimum)  $Dd$  ad  $Ff$  ut  $PE$  ad  $PS$ , & inde  $Ff$  æqua-  
 XL.

$$\text{lis } \frac{PS \times Dd}{PE}; \text{ \& } DEq \times Ff \text{ æquale } Dd \text{ in } \frac{DEq \times PS}{PE}, \text{ \&}$$

propterea vis laminæ  $EFfe$  est ut  $Dd$  in  $\frac{DEq \times PS}{PE}$  & vis

particulæ ad distantiam  $PF$  exercita conjunctim, hoc est (ex  
 hypothesi) ut  $DN \times Dd$ , seu area evanescens  $DNnd$ . Sunt  
 igitur laminarum omnium vires, in corpus  $P$  exercitæ, ut areæ  
 omnes  $DNnd$ , hoc est, sphæræ vis tota ut area tota  $ANB$ .  
 Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si vis centripeta, ad particulas singulâs ten-  
 dens, eadem semper maneat in omnibus distantis, & fiat  $DN$   
 ut  $\frac{DEq \times PS}{PE}$ ; erit vis tota, quâ corpusculum à sphæra attrahi-  
 tur, (d) ut area  $ANB$ .

Corol. 2. Si particularum vis centripeta sit reciprocè ut di-  
 stantia corpusculi à se attracti, & fiat (e)  $DN$  ut  $\frac{DEq \times PS}{PEq}$ ; erit vis,  
 quâ corpusculum  $P$  à sphærâ totâ attrahitur, ut area  
 $ANB$ .

Corol. 3. Si particularum vis centripeta sit reciprocè ut cubus  
 distantiae corpusculi à se attracti, & fiat  $DN$  ut  $\frac{DEq \times PS}{PEqq}$ ; erit vis,  
 quâ corpusculum à totâ sphærâ attrahitur, ut area  
 $ANB$ .

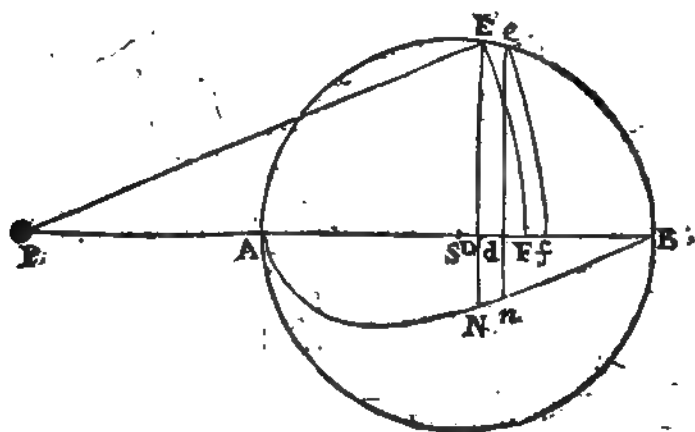
Co-

(d) \* Ut area  $ANB$ . Nulla enim habenda est ratio vis particulæ  $Ff$  quæ eadem in omnibus distantis maneat, ex hypo-  
 (e) \* Fiat  $DN$  &c. Substituatur quan-  
 titate  $\frac{1}{PE}$  loco vis particulæ  $Ff$ .

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 485

*Corol. 4.* Et universaliter si vis centripeta ad singulas sphaerae De Mo-  
particulas tendens ponatur esse reciproce ut quantitas  $V$ , fiat

De Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXXX.  
THEOR.  
XL.



autem  $DN$  ut  $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$ ; erit vis; qua corpusculum  $a$   
sphaera tota attrahitur, ut area  $ANB$ .

PROP. 3.

PRO.

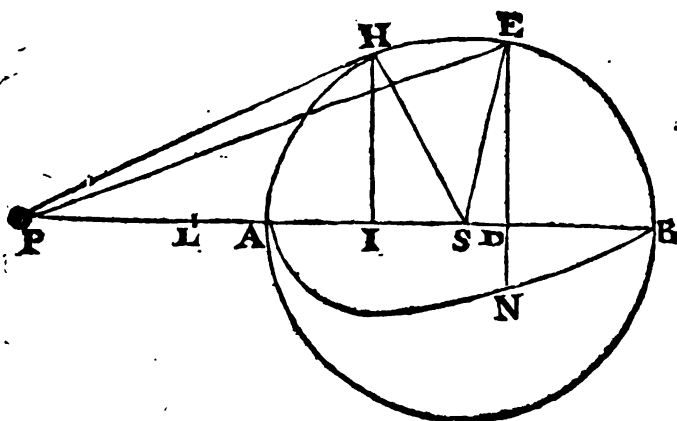
# 486 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO.  
TU COR.  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

## PROPOSITIO LXXXI. THEOREMA XLI.

*Stantibus jam positis, mensuranda e<sup>st</sup> area A N B.*

PROP. A puncto *P* ducatur recta *PH* sphæram tangens in *H*, &  
LXXXI. ad axem *PAB* demissa normali *HI*, bisecetur *PI* in *L*: &  
THEOR. erit ( per prop. XII. lib. 2. elem. )  $PE^2$  æquale  $PS^2 + SE^2$   
XLI.  $+ 2 PSD$ . Est autem  $SE^2$  seu  $SH^2$  ( ob (f) similitudinem



triangulorum  $SPH$ ,  $SHI$ ) æquale rectangulo  $PSI$ . Ergo  
 $PE^2$  æquale est contento sub  $PS$  &  $PS + SI + 2SD$ , hoc  
(g) est, sub  $PS$  &  $2LS + 2SD$ , id est, sub  $PS$  &  $2LD$ .  
Porro  $DE$  quad. æquale est  $SE^2 - SD^2$ , seu (†)  $SE^2 -$   
 $LS^2 - SE^2$  seu  $LS^2 - SA^2$  ( per prop. VI. lib. 2. elem. )  
æquatur rectangulo  $ALB$ . Scribatur itaque  $2SLD - LD^2 - ALB$   
pro  $DE^2$ ; & quantitas  $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$ , quæ secundum corollarium  
quar-

(f) \* Ob similitudinem triangulorum  
etc. ( Per prop. 13. lib. 6. Elem. )  
(g) \*\* Hoc est sub  $PS$  &  $2LS +$   
 $2SD$ . Ob  $PS + SI = PI + 2SI = 2LI$   
 $+ 2SI = 2LS$ .

(†) \* Seu  $SE^2 - LS^2$  etc. Ob  $SD$   
 $= LD - LS$ , adeoque  $SD^2 = LD^2 -$   
 $2SLD + LS^2$ .

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 487

quartum propositionis præcedentis est ut longitudo ordinatim applicatæ  $DN$ , resolvat sese in tres partes  $\frac{2SLD \times PS}{PF \times V}$  —

$\frac{LDq \times PS}{PE \times V}$  —  $\frac{ALB \times PS}{PE \times V}$ : ubi si pro  $V$  scribatur ratio inver-

sa vis centripetæ, & pro  $PE$  medium proportionale inter  $PS$  &  $2LD$ ; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, ( $h$ ) quarum areae per methodos vulgatas innotescunt. *Q. E. F.*

*Exem-*

( $h$ ) 119. Quarum areae per methodos vulgatas innotescunt. Sint variables  $PE = x$ ,  $LD = z$ , adeoque  $Dd = dx$ , sint constantes  $PA = a$ ,  $PB = b$ ,  $PS = c$ , &  $LS = m$ ,  $LA = p$ ,  $LB = q$ , & erit arcus  $AND$

fluxio  $DN \times dx$  ut  $\frac{2mcx dx}{xV} - \frac{cx dx}{xV}$

$= \frac{pqcdx}{xV}$ : quoniam verò  $PE^2 (xz) = 2PS \times LD (2cz)$ , est  $x = \frac{2z}{c}$  &  $dx = \frac{dz}{c}$ , quibus valoribus loco  $x$  &  $dx$  in

formula substitutis illa in hanc mutatur  $\frac{mz^2 dz}{cV} - \frac{z dz}{4c^2V} - \frac{pqdz}{V}$ .

Sic vis attractiva ut distantie  $z$  dignitas  $\frac{1}{z^n}$  erit  $V = z^n$  (quo valore loco  $V$  in

formula posito, fiet  $DN \times dx$  ut  $\frac{mz^{2-n} dz}{c}$

$\frac{z^{4-n} dz}{4c^2} - pqz^{1-n} dz$ , unde sumptis

singulorum terminorum fluentibus (165), erit  $S. DN \times dx$ , seu area  $AND$ , ut

$\frac{mz^{3-n}}{3-n} - \frac{z^{2-n}}{2-n} - \frac{pqz^{1-n}}{1-n} +$

$\frac{3-n \times c}{5-n \times 4c^2} - \frac{1-a}{1-a} +$

$Q. constant.$  Sed fluens illa evanescere debet dum fit  $PE(z) = PA(a)$  est ergo  $Q = \frac{a^{1-n}}{5-n \times 4c^2} + \frac{pq a^{1-n}}{1-n} - \frac{m a^{1-n}}{3-n \times c}$

ac proinde fluens accurata ubi  $PE(z) =$

$$PB(b) \text{ erit } \frac{mb^{1-n}}{3-n \times c} - \frac{b^{1-n}}{5-n \times 4c^2} - \frac{pq b^{1-n}}{1-n} + \frac{m a^{1-n}}{3-n \times c}$$

120. Cum sit semper  $PE^2 = 2PS \times LD$ ; & ubi  $PE$  fit  $PB$  sit  $LD = LB$ , ubi verò  $PE$  fit  $PA$  sit  $LD = LA$ , erit  $PB^2 (b^2) = 2PS \times LB (2cq)$  &  $PA^2 (a^2) = 2PS \times LA (2cp)$  quibus valoribus loco,  $b^2$  &  $a^2$  substitutis, formula fit  $\frac{2mqb^{1-n}}{3-n} - \frac{q^2 b^{1-n}}{5-n} - \frac{pq b^{1-n}}{1-n} + \frac{p^2 a^{1-n}}{5-n} + \frac{pq a^{1-n}}{1-n} - \frac{2mp a^{1-n}}{3-n}$ .

& restitutis litteris figuræ  $\frac{2SLB \times PB^{1-n}}{3-n} - \frac{LB^2 \times PB^{1-n}}{5-n} - \frac{ALB \times PB^{1-n}}{1-n} + \frac{AL^2 \times PA^{1-n}}{5-n} + \frac{ALB \times PA^{1-n}}{1-n} - \frac{2SLA \times PA^{1-n}}{3-n}$

121. Cor. 1. Hinc liquet aream  $ANB$ , seu attractionem cui proportionalis est, semper posse algebraice inveniri, tribus tantum casibus exceptis in quibus est  $n = 1$  vel  $3$ , vel  $5$ , seu in quibus vis attractiva decrescit in ratione distantie simplici, vel triplicata vel quintuplicata. In his enim casibus tribus divisiones  $1-n$ ,  $3-n$ ,  $5-n$ , evanescunt; sed tunc fluens per logarithmos, aut quod idem est, per quadraturam hyperbolæ obtinetur, ut exemplis infra positis patebit.

DE MO  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

PROP.  
LXXXI.

THEOR.  
XLI.

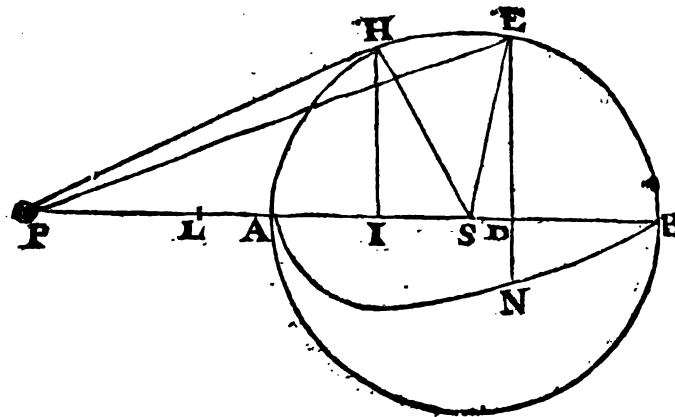
*Exempl. 1.* Si vis centripeta ad singulas sphaeræ particu-  
las tendens sit reciprocè ut distantia; pro V scribe distantiam  
P E; dein  $2 PS \times LD$  pro P E q, & fiet D N ut S L —

$\frac{1}{2} LD - \frac{ALB}{2LD}$ . Pone D N æqualem ejus duplo  $2 SL - LD$

—  $\frac{ALB}{LD}$ ; & ordinatæ pars data  $2 SL$  ducta in longitudinem

AB describet aream rectangulam  $2 SL \times AB$ ; & pars indefi-  
nita LD ducta normaliter in eandem longitudinem per mo-  
tum continuum, eâ lege ut inter movendum crescendo vel de-  
crescendo æqueur semper longitudini LD, (i) describet aream  
 $\frac{LBq - LAq}{2}$ , (†) id est, aream  $SL \times AB$ ; quæ subducta de areâ

priore



(i) 522. Describet aream  $\frac{LBq - LAq}{2}$ .

Area, quam describet, erit trapezium,  
nam si à puncto L in longitudinem A B  
semper erigantur perpendiculara æqualia LD,  
omnes terminabuntur in recta linea ducta  
à puncto L in terminum perpendiculari in  
B erecti & æquali LB, sicque formabitur  
Triangulum cujus pars secundum A B sita  
est area quæsitâ, & ea erit Trapezium cu-  
jus latera in A & B perpendicularia, in-  
ter se parallela sunt, & latus puncto A

insistens erit æquale LA; latus verò op-  
positum in B erectum erit æquale LB;

hujus ergo trapezii superficies erit  $\frac{LA + LB}{2}$ .

$\times AB$ , sed  $AB = LB - LA$ , ergo per 6.

2. El.  $\frac{LA + LB}{2} \times LB - LA = \frac{LB^2 - LA^2}{2}$ :

(quod trapezium est æquale Trapezio  
A a b B in figurâ Newtonianâ descripto,  
ut liquet per ejus figuræ const. ).

(†) Id est, aream  $SL \times AB$ , cum enim hæc area  
sit

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 489

priori  $2SL \times LAB$  relinquit aream  $SL \times AB$ . Pars autem tertia  $\frac{ALB}{LD}$ , ducta itidem per motum localem normaliter in

eandem longitudinem, describet aream hyperbolicam; quæ subducta de areâ  $SL \times AB$  relinquet aream quæsitam  $ANB$ . Unde talis emergit problematis constructio. Ad puncta  $L, A, B$  erige perpendiculara  $Ll, Aa, Bb$ , quorum  $Aa$  ipsi  $LB$ , &  $Bb$  ipsi  $LA$  sequetur. Asymptotis  $Ll, LB$  per puncta  $a, b$  describatur hyperbola  $ab$ . Et acta chorda  $ba$  claudet aream  $aba$  areæ quæsitæ  $ANB$  æqualem.

*Exempl. 2.* Si vis centripeta ad singulas sphaeræ particulas tendens sit reciproce ut cubus distantiae, vel (quod perinde est) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; scribe  $PE$  cub.

$2ASq$  pro  $V$ , dein  $2PS \times LD$  pro  $PEq$ ; & fiet  $DN$

$$= \frac{LA+LB}{2} \times AB, \text{ sitque } LB = LA + 2AS$$

$$\text{erit } LA+LB = 2LA + 2AS = 2LS$$

$$\text{unde } \frac{LA+LB}{2} \times AB = LS \times AB. \text{ Un-}$$

de etiam sequitur Trapezium  $AabB$  rectangulo  $LS \times AB$  esse æquale.

Cæterum per methodos vulgares casus iste sequenti ratione solvitur. Sit  $AD = x, Dd = dx$  erit areæ  $AND$  fluxio  $DN \times Dd =$

$$2SL \times dx - LA \times dx = \frac{ALB \times dx}{LD}$$

Primi termini  $2SL \times dx$ , fluens (scilicet) est  $2SL \times x = 2SL \times AB$ , ubi  $AD$ , seu  $x = AB$ . Secundi termini  $LA \times dx + x \times dx$ ,

$$\text{fluens est } LA \times x + \frac{1}{2}x^2 = \frac{2LA+AB \times AB}{2}$$

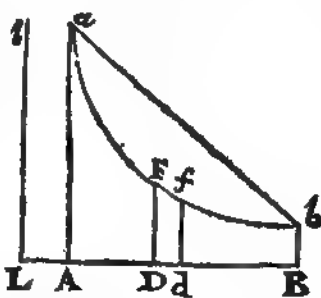
$$= LS \times AB, \text{ quandò } x, \text{ seu } AD, \text{ fit } AB.$$

Quare duorum priorum terminorum fluens est  $2SL \times AB - LS \times AB$  sive  $SL \times AB$ .

$$\text{Jam ut tertii termini } \frac{ALB \times dx}{LD} \text{ fluens}$$

inveniat describatur hyperbola  $AB$ , prout NEWTONUS præscribit, & super asymptoto  $LB$  erigantur perpendiculara duo infi-

Tom. I.



nité propinqua;  $DF, df$ , hyperbolæ occurrentia in  $F$  &  $f$ , sitque  $AD = x, Dd = dx$ , & erit (per theor. 4. de hyperbolâ)  $LA \times Aa = LD \times DF$ , adeoque  $DF = \frac{LA \times Aa}{LD} = \frac{ALB}{LD}$ , &  $DF \times Dd$ , seu

$$\text{fluxio areæ } AaFD = \frac{ALB \times dx}{LD}. \text{ Quare,}$$

area hyperbolica  $AaFD$ , æqualis est fluenti tertii termini, & area hyperbolica  $AabB$ , est ejusdem termini fluens, ubi  $x$ , seu  $AD = AB$ . Hæc igitur subducta de rectangulo  $SL \times AB$ , sive de trapezio  $AabB$  ipsi æquali, relinquet aream quæsitam  $ANB$ . Relinquitur autem area  $aFba$ ; undè patet constructio.

523. Cor. 1. Si distantia corpusculi  $P$  à sphaerâ evanescat, erit  $Bb = LA = 0$  ideoque hyperbola  $Afb$  cum suis asymptotis  $Ll, LB$  congruet nullaque erit ejus area. Quare corpusculo posito in  $A$ , seu in contactu sphaeræ attractio erit ut rectangulum  $SL \times AB = 2AS^2$ , ut etiam demonstrari posset eodem modo ac demonstrata fuit Prop. 72.

DE MOTU CORP. PRIMUS. PROP. LXXXI. PROBL. XLII.

# 490. PHILOSOPHIÆ NATURALIS.

DE MO-  
TU COR- ut  $\frac{SL \times ASq}{PS \times LD} - \frac{ASq}{2PS} - \frac{ALB \times ASq}{2PS \times LDq}$ , id (k) est (ob con-

FORUM.  
LIBER  
PRIMUS. tinuè proportionales  $PS, AS, SI$ ) ut  $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2} SI -$

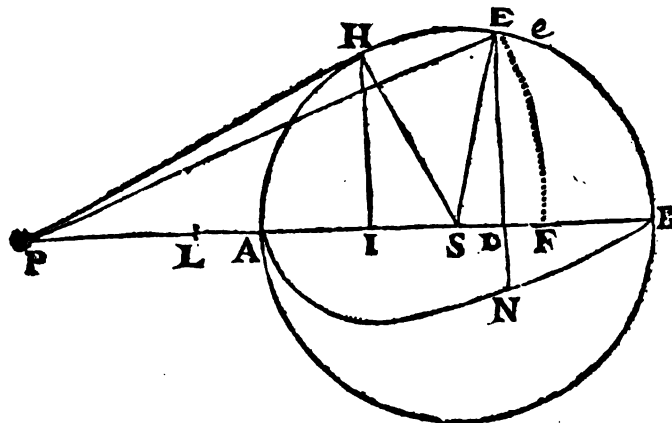
PROP.  $\frac{ALB \times SI}{2LDq}$ . Si ducantur hujus partes tres in longitudi-

LXXXI.  
PROBL. nem  $AB$ , prima  $\frac{LSI}{LD}$  generabit aream hyperbolicam; se-

cunda  $\frac{1}{2} SI$  aream  $\frac{1}{2} AB \times SI$ ; tertia  $\frac{ALB \times SI}{2LDq}$  aream

$\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$ , id est  $\frac{1}{2} AB \times SI$ . De primâ sub-

du-



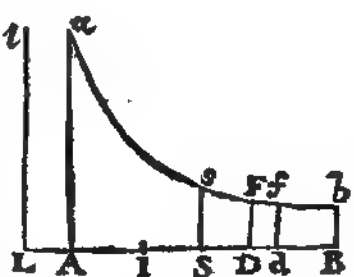
524. Cor. 2. Vis quâ corpusculum P, versùs portionem sphaeræ convolutione superficiæ AEF, genitam trahitur est ut  $LB - \frac{1}{2} x \times x - AaFD$ ; Nam (per not. 522.) vis illa est ut  $2SL \times x - LA \times x - \frac{1}{2} x \times x - AaFD$ , &  $2SL = 2LA + 2AS$  &  $2SL - LA = LA + 2AS = LB$ , unde vis illa est  $LB - \frac{1}{2} x \times x - AaFD$ ; sed P posito in contactu sphaeræ est  $LB = AB$  & areâ hyperbolicâ evanescit, vis ergo fit in contactu  $AB - \frac{1}{2} x \times x$ , sive  $AB - \frac{1}{2} AD \times AD$ .

525. Cor. 3. Quoniam attractio cor-

pusculi P versùs sphaeram totam est ut  $SL \times AB - AaBB$ , ejusdem attractio versùs portionem sphaeræ convolutione superficiæ FEeB (fig. prop. 80.) genitam, erit ut  $SL \times AB - LB \times x + \frac{1}{2} x \times x + AaFD - AaBB = SL \times AB - LB \times AD + \frac{1}{2} AD^2 - DFbB$ , sive substitutis  $LA + \frac{1}{2} AB$  pro  $SL$ ,  $LA + AB$  loco  $LB$ , & pro  $AB - AD$  posito  $BD$  fiet ut  $LA + \frac{1}{2} BD \times BD - DFbB$ , & corpusculo in contactu posito, erit ut  $\frac{1}{2} BD^2$ .

(k) \* Id est, ob continuè proportionales &c. Per prop. 8, l. 6, EL. undè  $AS^2 = PS \times SL$ .

scatur summa secundæ & tertiæ, & anebit area quæsitæ  $ANB$ . (1) Unde talis emergit problematis constructio. Ad puncta  $L, A, S, B$  eriguntur perpendiculara  $Ll, Aa, Ss, Bb$ , quorum  $Ss$  ipsi  $SI$  æquetur, perque punctum  $s$  asymptotis  $Ll, LB$  describitur hyperbola  $asb$  occurrens perpendicularis  $Aa, Bb$  in  $a$  &  $b$ ; & rectangulum  $2ASI$  subtractum de area hyperbolica  $AasbB$  relinquet aream quæsitam  $ANB$ .



DE MOTU CORPORUM.  
LIBER PRIMUS.  
PROP. LXXXI.  
PROP. XLII.

(1) 526. \* Unde talis emergit problematis constructio. Sit, ut supra  $AD = x, Dd = dx$ , sit areæ  $AND$ , fluxio  $DN \times Dd$ , ut  $SI \times dx = \frac{1}{2} SI \times dx = \frac{ALB \times SI \times dx}{2LA + x^2}$

ut primi termini  $\frac{LSI \times dx}{LD}$ , fluens

beatur, describatur hyperbola  $asb$ , eo modo quo jubet NEWTONUS, erectisque perpendicularis  $DF, df$ , sit  $AD = x, d = dx$ , & quoniam (per theor. 4. de hyperbolâ)  $LS \times SI = LD \times DF$ , erit  $\frac{LSI}{LD} = \frac{LSI \times dx}{LD \times DF}$ , &  $DF \times Dd = \frac{LSI \times dx}{LD}$

tatet igitur (ut in not. 522.) aream Hyperbolicam  $AasbB$ , æqualem esse fluens primi termini, dum  $AD$  seu  $x = AB$ ; secundi termini  $\frac{1}{2} SI \times dx$ , fluens est  $\frac{1}{2} SI \times AD = \frac{1}{2} SI \times AB$ , dum sit  $AD = AB$ ; tertii tandem termini fluens hoc modo invenitur. Quantitatis  $\frac{dx}{(LA + x)^2}$  fluens

(525) est  $-\frac{1}{LA + x} + Q$  constans; & quoniam fluens illa evanescere debet ubi  $x = 0$ , erit  $Q = \frac{1}{LA}$ . Quare fluens

accurate est  $\frac{1}{LA} - \frac{1}{LD} = \frac{1}{LA} - \frac{1}{LB}$ ; ubi  $x = AB$ . Est igitur tertii termini  $\frac{ALB \times SI \times dx}{LA + x^2}$  fluens  $= \frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB} = \frac{1}{2} LB \times SI - \frac{1}{2} LA \times SI$

$= \frac{1}{2} AB \times SI$ , unde summa 2<sup>a</sup> & 3<sup>a</sup> termini est  $AB \times SI = 2AS \times SI$ . Quare rectangulum  $2ASI$  subtractum de areâ hyperbolica  $AasbB$  relinquet aream quæsitam  $ANB$ .

527. Cor. 1. Si corpus  $P$  sphaeram tangat in  $A$ , attractio evadet infinita, nam in hoc casu  $LA = 0$  &  $Aa$  cum asymptoto  $Ll$  coincidit, ac proinde attractio per aream hyperbolæ infinitam  $BLaasb$  exponitur.

528. Coroll. 2. Vis quâ corpusculum  $P$  in sphaeræ portionem convolutione superficiei  $AEF$ , genitam trahitur, est ut  $AaFD = \frac{1}{2} SI \times AD =$

$\frac{1}{2} LB \times SI + \frac{ALB \times SI}{2LD}$ , ut ex notâ

526. manifestum est. Quare in contactu ubi  $LA = 0$ , erit vis illa ut area infinita  $AaFD$ , cujus respectu aliæ finitæ quantitates evanescunt.

529. Cor. 3. Et quoniam corpusculi  $P$  attractio in sphaeram totam est ut area hyperbolica  $AasbB = 2ASI$ , ejusdem attractio versùs portionem concavo convexam, convolutione superficiei  $FEeB$ , genitam, erit ut  $AasbB = AaFD = 2ASI + \frac{1}{2} AD \times SI + \frac{1}{2} LB \times SI =$

$\frac{ALB \times SI}{2LD} = DFbB + \frac{1}{2} LA - \frac{1}{2} BD \times SI$

$= \frac{ALB \times SI}{2LD}$ , ponendo  $A$  pro  $2AS$ ,  $\frac{1}{2} LA + \frac{1}{2} AB$  pro  $\frac{1}{2} LB$ , &  $\frac{1}{2} BD$  pro  $\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AD$ .



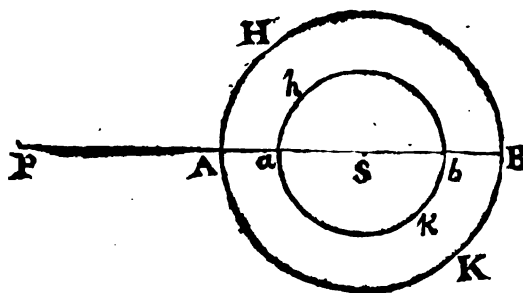
DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

LIBER  
PRIMUS.

**PROP.**

LXXXI  
PROBL

XLI.



§ 30. *Cor. 4.* Simili modo inveniri potest vis quæ corpus P trahitur versùs sphæram concavam A a H B K a, si ex attractione in sphæram totam solidam detrahatur attractio in sphæram interiorem a h b k. Patet autem corpusculi P in A, seu in contactu positi attractionem versùs sphæram concavam A a H B K a, interiori concentricam, infinitam esse; Nam si ex vi infinita quæ versùs sphæram solidam A H B K S, trahitur, subducatur vis finita quæ versùs sphæram interiorem a h b k s urgetur, relinquetur attractio infinita versùs sphæram concavam A a H B K a; quin imò, si ex sphærà concavâ detrahatur pars quævis à contactu remota ut H h B K k, attractio corpusculi in contactu A positi versùs residuum H h A a K k, adhuc infinita erit, ut patet (*per cor. 2. & 3.*).

(m) \*  $\text{Pro P E. Erit P E} : = 4 \text{ PS}^2 \times \text{LD}$   
 $\times \sqrt{2 \text{ PS} \times \text{LD}}, \& \text{AS} : = \text{PS} \times \text{SI} \times \sqrt{\text{PS} \times \text{SI}}$

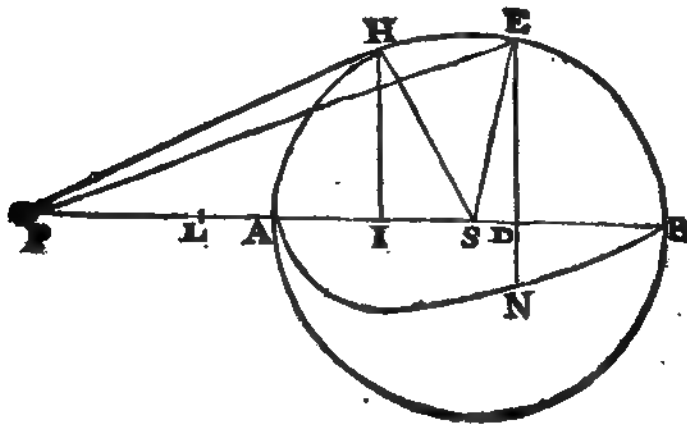
$$\text{Unde fiet } \frac{SLD \times PS}{PE \times V} = \frac{4SLD \times PS \times AS_2}{PE_1} = \frac{4SL \times LD \times PS_1 \times SI \sqrt{PS \times SI}}{4PS^2 \times LD^2 \times \sqrt{2PS \times LD}} = \frac{SL \times SI \sqrt{SI}}{LD \sqrt{2LD}} = \frac{SL \times SI^2}{LD \sqrt{2SI \times LD}} = \frac{SI^2 \times SI}{2\sqrt{2S}} \times \frac{1}{\sqrt{LD_2}}. \text{ Et ita de ceteris terminis}$$

(n)\* *Cujus tres partes &c.* Sit  $AD =$   
fluxio  $AD = dx$ , & erit areæ  $AN$   
fluxio  $DN \times dx$ , ut  $\frac{SI^2 \times SL}{\sqrt{2} SI}$ ;  
 $\frac{dx}{LA+x}^{\frac{3}{2}} - \frac{SI^2}{2\sqrt{2} SI} \times \frac{dx}{LA+x}^{\frac{1}{2}} -$   
 $\frac{SI^2 \times ALB}{2\sqrt{2} SI} \times \frac{dx}{LA+x}^{\frac{1}{2}}$ , quantitat  
 $\frac{dx}{LA+x}^{\frac{3}{2}}$  seu  $\frac{dx}{LA+x} - \frac{1}{2} dx$  fluens e

**L A**

longitudinem  $AB$ , producant areas totidem, viz,  $\frac{2 SI q \times SL}{\sqrt{2 SI}}$  DE MO-

TU COR-  
FORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXXXI.  
PROBL.  
XLI.



$$\text{in } \frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}; \frac{SI q}{\sqrt{2 SI}} \text{ in } \sqrt{LB} - \sqrt{LA}; \& \frac{SI q \times ALB}{2 \sqrt{2 SI}} \text{ in}$$

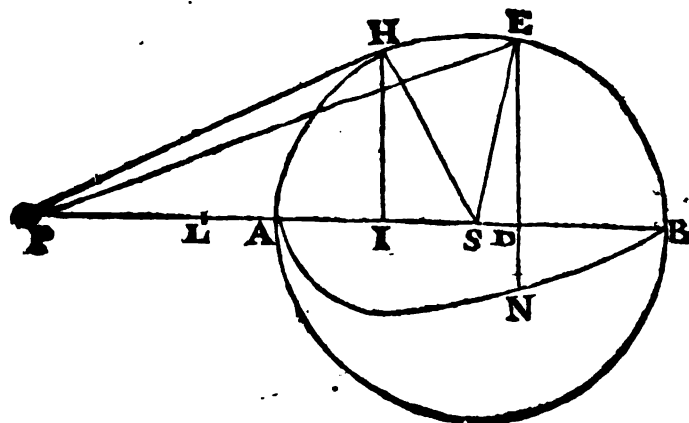
$\frac{2}{LA+x} \frac{1}{2} + Q \text{ const. (165) }^{\circ}$  quæ eva-  
nescere debet ubi  $x = 0$ ; Quare erit  $Q$   
 $= \frac{2}{\sqrt{LA}}$ , & fluens accurata  $\frac{2}{\sqrt{LA}} -$   
 $\frac{2}{\sqrt{LB}}$ , dum fit  $x = AB$ . Primi igitur ter-  
mini fluens erit  $\frac{2 SI \times SL}{\sqrt{2 SI}}$ , in  $\frac{1}{\sqrt{LA}} -$   
 $\frac{1}{\sqrt{LB}}$ . Quantitatis  $\frac{dx}{LA+x} \frac{1}{2}$ , fluens est  
 $2(LA+x) \frac{1}{2} + Q \text{ const.}$  & facta  $x = 0$ ;  
invenitur  $Q = -2\sqrt{LA}$ ; quare fluens  
accurata est  $2\sqrt{LB} - 2\sqrt{LA}$ , dum  
 $x = AB$ . Secundi igitur termini fluens

erit  $\frac{SI^2}{\sqrt{2 SI}}$ ; in  $\sqrt{LB} - \sqrt{LA}$   
Quantitatis  $\frac{dx}{LA+x} \frac{1}{2}$ , fluens est  $\frac{-x}{3(LA+x)}$   
 $+ Q$ , &  $Q = \frac{2}{3\sqrt{LA}}$ , unde fluens in-  
tegra erit  $\frac{2}{3\sqrt{LA}} - \frac{2}{3\sqrt{LB}}$ , ubi  
 $x = AB$ , & proinde tertii termini fluens est  
 $\frac{SI^2 \times ALB}{3\sqrt{2 SI}}$  in  $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$ .

DE Mo-  
TU COR- in  
FORVM.

LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXXXI.  
PROBL.  
XLII.

$\frac{1}{\sqrt{LA \text{ cub.}}} - \frac{1}{\sqrt{LB \text{ cub.}}}$ . Et (°) hæ post debitam re-



ductionem fiunt  $\frac{2 SI q \times SL}{LI}$ ,  $SI q$ ; &  $SI q + \frac{2 SI \text{ cub.}}{3 LI}$ .  
Hæ vero; subductis posterioribus de priore, evadunt  $\frac{4 SI \text{ cub.}}{3 LI}$   
Proin-

(°) \* Es hæ post debitam reductionem  
etc. Est  $PS \times SI = AS^2$  (per prop. 8.  
Lib. 6. Elem.) sed  $PS = LS + LI$ , ob  
 $PL = LI$ , (per constr.) &  $SI = LS - LI$ ,  
ergo  $PS \times SI = LS^2 - LI^2 = AS^2$ , &  
hinc  $LI^2 = LS^2 - AS^2 = LS + AS \times$   
 $LS - AS = LB \times LA$ . Quare  $LI$  five  
 $LS - LI = \sqrt{LA \times LB}$ , &  $2 LS -$   
 $2 SI = 2 \sqrt{LA \times LB}$ , &  $2 SI = 2 LS$   
 $- 2 \sqrt{LA \times LB} = LB - 2 \sqrt{LB \times LA} +$   
 $LA$ , & extracta utrinque radice quadra-  
ta  $\sqrt{2 SI} = \sqrt{LB} - \sqrt{LA}$ . His posi-  
tis, facilis est terminorum reductio; erit  
enim  $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}} = \frac{\sqrt{LB} - \sqrt{LA}}{\sqrt{LB \times LA}}$

$= \frac{\sqrt{2 SI}}{LI}$ . Quare patet primum fluentis  
terminum esse  $\frac{2 SI^2 \times SL}{LI}$ ; secundum ve-  
rò esse  $SI^2$ . Tertius terminus, reduc-  
tione ad communem denominatorem facta,  
est  $\frac{SI^2 \times LA \times LB}{3 \sqrt{2 SI}} \times \frac{\sqrt{LB} - \sqrt{LA}}{LA \times LB \sqrt{LA \times LB}}$ .  
 $= \frac{SI^2 \times \sqrt{LB} - \sqrt{LA}}{3 LI \times \sqrt{LB} - \sqrt{LA}}$ . Peracta di-  
visione invenitur  $\frac{LB^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{3}{2}}}{LB^{\frac{1}{2}} - LA^{\frac{1}{2}}} = LB +$

LB

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 495

Proinde vis tota, quâ corpusculum  $P$  in sphaeræ centrum  $S$  DE MO-  
trahitur, est ut  $\frac{SI^3 cub.}{P I}$ , ( $v$ ) id est, reciprocè ut  $P S cub. \times P I$ . TU COR-  
PORUM.

Q. E. I. Eadem methodo determinari potest attractio corpusculi siti in- LIBER  
tra sphaeram, sed expeditius per theorema sequens. PRIMUS.  
PROP.

PRO. XL L

$$LB^{\frac{1}{2}} + LA^{\frac{1}{2}} + LA = LB + LI + LA \\ = 2 SI + 3 LI, \text{ ob } LB + LA = 2 LS \\ = 2 SI + 2 LI. \text{ Quare tertius terminus} \\ \text{est } \frac{SI^2 \times 2 SI + 3 LI}{3 LI} = SI^2$$

$$+ \frac{2 SI^2}{3 LI}; \text{ unde tres fluentes ad} \\ \text{communem denominatorem reducti fiunt} \\ \frac{6 SI^2 \times SL - SI^2 \times 3 LI - SI^2 \times 3 LI - 2 SI^2}{3 LI}$$

$$= \frac{6 SI^2 \times SL - 6 SI^2 LI}{3 LI}, \text{ sed quia } SL - LI$$

$$= SI \text{ fiunt } \frac{6 SI^2 \times SI - 6 SI^2 LI}{3 LI} = \frac{2 SI^3}{LI}$$

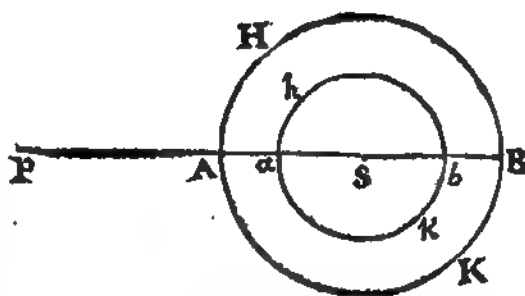
( $p$ ) \* Id est reciprocè ut  $PS \times P I$   
Nam cum sit  $PS \times SI = AS^2$ , ideòque  
 $SI = \frac{AS^2}{PS}$ , hinc, dato radio  $AS$ , est  $SI$

$$\text{ut } \frac{1}{PS}, SI, \text{ ut } \frac{1}{PS}; \text{ Est verò } = \frac{1}{2} P I$$

ideòque etiam &  $LI$  ut  $P I$ , unde erit  
 $\frac{4 SI^2}{3 LI} \text{ ut } \frac{1}{PS} \times P I$ , neglectâ frac-

$$\text{tione } \frac{4}{3}$$

531. Cor. 1. In accessu corporis  $P$   
ad sphaeram, ita crescit illius attrac-  
tio, ut in contactu infinita evadat, dum  
eum coincidit  $P$  cum  $A$ , puncta  $H$  &  $I$   
cum eodem puncto  $A$  coincidunt, sit-  
que  $P I = 0$ , & proinde quantitas  $\frac{1}{PS \times P I}$   
infinita.



532. Cor. 2. Attractio corpusculi in  
contactu  $A$  positi versùs sphaeram cavam  
 $A a H B K a$ , infinita est. Hæc enim at-  
tractio habetur, si ex attractione infinitâ  
versùs sphaeram solidam  $A H B K S$ , sub-  
ducatur attractio finita versùs sphaeram in-  
teriorem  $a h b k S$ .

533. Hic adjuvamus solutionem ca-  
sus tertii qui pendet à quadraturâ hyper-  
bolæ, ubi nempe vis est ut  $PE$ , reci-  
procè (520). Scribe igitur  $\frac{PE}{2 AS^2}$ , pro

$$V; \text{ dein } 8 PS \times LD; \text{ pro } \frac{PE \times PS}{SI^2}, \text{ \& } PS$$

$$\times SI \text{ pro } AS^2, \text{ unde est } \frac{PS \times V}{PE \times V} = \frac{SI^2}{4 LD}$$

$$\text{\& fiet } DN, \text{ ut } \frac{SL \times SI^2}{2 LD^2} - \frac{SI^2}{4 LD} - \frac{ALB \times SI^2}{4 LD}$$

$$\text{seu, ut } \frac{SL \times SI^2}{LD^2} - \frac{1}{2} \frac{SI^2}{LD} - \frac{ALB \times SI^2}{LD};$$

$$\text{unde fluxio } DN \times Dd, \text{ erit ut } \frac{SL \times SI^2 \times dx}{LA + x^2}$$

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM

LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXXXII.  
THEOR.  
XLI.

## PROPOSITIO LXXXII. THEOREMA XLI.

*In sphaerâ centro S intervallo S A descriptâ, si capiantur SI, S A, S P continuè proportionales: dico quod corpusculi intra sphaeram, in loco quovis I, attractio est ad attractionem ipsius extra sphaeram, in loco P, in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione distantiarum à centro I S, P S, & subduplicatâ ratione virium centripetarum, in locis illis P & I, ad centrum tendentium.*

Ut, si vires centripetæ particularum sphaeræ sint reciproce ut distantiae corpusculi à se attracti; vis, quâ corpusculum situm in *I* trahitur à sphaerâ totâ, erit ad vim, quâ trahitur in *P*, in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione distantiae *SI* ad distantiam *SP*, & ratione subduplicatâ vis centripetæ in loco *I*, à particulâ aliquâ in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco *P* ab eâdem in centro particulâ oriundam, id est, ratione subduplicatâ distantiarum *SI*, *SP* ad invicem

reci-

$$-\frac{1}{2} \frac{SI^2 \times dx}{LA+x} = -\frac{1}{2} \frac{ALB \times SI \times dx}{LA+x}, \text{ po-}$$

sita  $AD = x$ .

$$\text{Quantitatis } \frac{dx}{LA+x^2}, \text{ fluentem supra}$$

$$(526) \text{ invenimus esse } \frac{1}{LA} - \frac{1}{LB} \frac{LB-LA}{LA \times LB}$$

$$= \frac{AB}{LI^2} \text{ ubi } x \text{ seu } AD = AB. \text{ Quare primi}$$

$$\text{termini fluens erit } \frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$$

$$\text{Quantitatis } \frac{dx}{LA+x^2} \text{ fluens} = \frac{-x}{2LA+x^2}$$

$$+ Q \text{ const. quæ evanescere debet posi-}$$

$$ta x, \text{ seu } AD = 0, \text{ quare erit } Q = \frac{1}{2LA^2}$$

$$\text{et fluens accurata, ubi } AD = AB, \text{ erit}$$

$$\frac{1}{2LA^2} - \frac{1}{2LB^2} = \frac{LB^2-LA^2}{2LA^2 \times LB^2} = \frac{2SL \times AB}{2LI^4}$$

$$= \frac{SL \times AB}{LI^4}; \text{ undè tertii termini fluens erit}$$

$$\frac{1}{2} \frac{ALB \times SI^2 \times SL \times AB}{LI^4} = \frac{1}{2} \frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2},$$

$$\text{et differentia fluentium primi & tertii ter-}$$

$$\text{mini erit } \frac{1}{2} \frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}. \text{ Secundi}$$

$$\text{termini } \frac{1}{2} SI^2 \times \frac{dx}{LA+x}, \text{ fluens est area}$$

$$\text{hyperbolæ quæ ita describitur. Ad punc-}$$

$$\text{ta } L, A, B, (\text{vid. fig. exempli 21.}) \text{ erige}$$

$$\text{perpendiculara } Ll, Aa, Bb, \text{ \& asymptotis}$$

$$Ll, LB, \text{ describe Hyperbolam æquilateram}$$

$$\text{cujus sit dignitas } \frac{1}{2} SI^2, \text{ \& quoniam est}$$

$$(\text{theor. 4. Hyp.}) LD \times DF = \frac{1}{2} SI^2 \text{ ideòque}$$

$$DF = \frac{1}{2} \frac{SI^2}{LD}, \text{ erit } DF \times Dd = \frac{1}{2} \frac{SI^2 \times dx}{LA+x}$$

$$\text{positâ } AD = x. \text{ Quapropter area hyper-}$$

$$\text{bolica } AabB, \text{ æqualis est fluenti secundâ}$$

$$\text{termini ubi } AD = AB. \text{ Hæc igitur area}$$

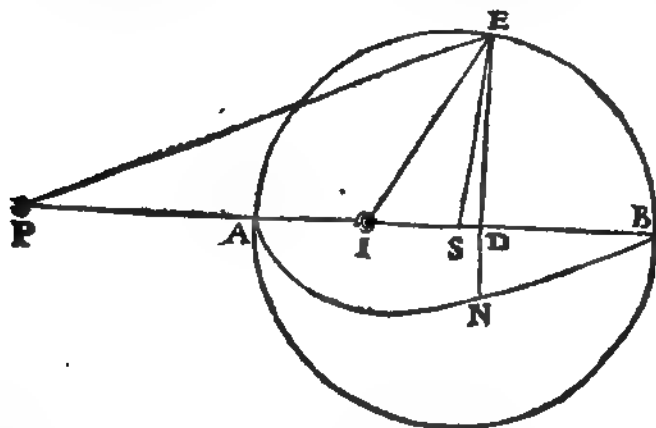
$$\text{subducta de rectangulo } \frac{1}{2} \frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$$

$$\text{relinquet aream quæsitam } ANB.$$

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 497

reciprocè. Hæ duæ rationes subduplicatæ componunt ratio-  
nem æqualitatis, & propterea attractiones in *I* & *P* à sphærâ  
totâ factæ æquantur. Simili computo, si vires particularum  
sphæræ sunt reciprocè in duplicatâ ratione distantiarum, collige-  
tur quod attractio in *I* sit ad attractionem in *P*, ut distantia  
*SP* ad sphæræ semidiametrum *SA*: si vires illæ sunt reciprocè

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXXXII.  
THEOR.  
XLI.



in triplicatâ ratione distantiarum; attractiones in *I* & *P* erunt  
ad invicem ut *SP quad.* ad *SA quad.*: Si in quadruplicatâ, ut  
*SP cub.* ad *SA cub.* Unde cùm attractio in *P*, in hoc ultimo  
casu, inventa fuit reciprocè ut *PS cub. × PI*, attractio in *I* erit  
reciprocè ut *SA cub. × PI*, id est (ob datum *SA cub.*) recipro-  
cè ut *PI*. Et (\*) similis est progressus in infinitum. Theorema  
verò sic demonstratur.

Stan;

(\*) \* Similis est progressus in infinitum:  
Vires centripetæ acceleratrices à particu-  
lâ aliquâ in centro positâ oriundæ, sint  
inter se in distantis *IS*, *PS* reciprocè ut  
harum distantiarum potestates *IS<sup>n</sup>*, *PS<sup>n</sup>*,  
& vis quâ corpusculum situm in *I* tra-  
hitur à sphærâ totâ, erit ad vim quâ tra-  
hitur in loco *P* ut *IS<sup>1/n</sup>* ad *PS<sup>1/n</sup>* &  
*PS<sup>n/n</sup>* ad *IS<sup>n/n</sup>* conjunctim, hoc est,  
ut *PS<sup>n-1</sup>* ad *IS<sup>n-2</sup>*. Quare cùm  
sit, (ex Hyp.) *PS:AS = AS:SI*, adeo-  
que

$$que IS = \frac{AS^2}{PS}, \& IS^{\frac{n-1}{2}} = \frac{AS^{\frac{n-1}{2}}}{PS^{\frac{n-1}{2}}}, vi-$$

$$res illæ erunt ad invicem ut  $\frac{PS^{\frac{n-1}{2}}}{AS^{\frac{n-1}{2}}}$  ad  $\frac{AS^{\frac{n-1}{2}}}{PS^{\frac{n-1}{2}}}$ , seu ut  $PS^{\frac{n-1}{2}}$  ad  $AS^{\frac{n-1}{2}}$ .$$

Hinc si  $n=1$ ; vires erunt in ratione æqua-  
litaris, si  $n=2$ , erunt ut  $PS$  ad  $AS$ ; Si  
 $n=3$  ut  $PS^2$  ad  $AS^2$ , si  $n=4$  ut  $PS^3$   
ad  $AS^3$ , & ita porro in infinitum.

R r r

# 498 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO- Stantibus jam ante constructis, & existente corpusculo in loco  
TU COR- quovis  $P$ , ordinatim applicata  $DN$  (r) inventa fuit ut  $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$ .  
PORUM. LIBER  
PRIMUS. Ergo si agatur  $IE$ , ordinata illa pro alio quovis corpusculi loco  
PROP. co  $I$ , (r) mutatis mutandis, evadet ut  $\frac{DEq \times IS}{IE \times V}$ . Pone  
LXXXII. THEOR.  
XLI. vires centripetas, è sphæræ puncto quovis  $E$  manantes, esse ad  
invicem in distantiiis  $IE$ ,  $PE$ , ut  $PE^n$  ad  $IE^n$  (ubi nu-  
merus  $n$  designet indicem potestatum  $PE$  &  $IE$ ) & (r) ordi-  
nata illæ fient ut  $\frac{DEq \times PS}{PE \times PE^n}$  &  $\frac{DEq \times IS}{IE \times IE^n}$ , quarum ratio  
ad invicem est ut  $PS \times IE \times IE^n$  ad  $IS \times PE \times PE^n$ . Quo-  
niam ob continuè proportionales  $SI$ ,  $SE$ ,  $SP$ , (u) similia  
sunt triangula  $SPE$ ,  $SEI$ , & inde fit  $IE$  ad  $PE$  ut  $IS$   
ad  $SE$  vel  $SA$ ; pro ratione  $IE$  ad  $PE$  scribe rationem  $IS$   
ad  $SA$ ; & ordinarum ratio evadet  $PS \times IE^n$  ad  $SA \times PE^n$ .  
(x) Sed  $PS$  ad  $SA$  subduplicata est ratio distantiarum  $PS$ ,  $SI$ ;  
&

(r) \* *Ordinatim applicata DN inventa fuit &c.* (cor. 4. prop. 80.)

(r) \* *Mutatis mutandis.* Nempè corpore in  $I$  sito, radio  $IE$ , describendus arcus circuli, & in formulâ attractionis  $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$ , loco  $PS$  &  $PE$ , scribe  $IS$ , &  $IE$ .

(t) \* *Et ordinata illæ &c.* Si loco  $V$  scribantur  $PE^n$ , &  $IE^n$ , quæ sunt reciproce ut vires acceleratrices in locis  $P$  &  $I$ , (per cor. 4. prop. 80.)

(u) \* *Similia sunt triangula SPE, SEI*, per prop. 6. Lib. 6. Elem.

(x) \* *Sed PS ad SA subduplicata est ratio distantiarum PS, SI*, ob continuè proportionales  $PS$ ,  $SA$ ,  $SI$ . Porro vires in distantiiis  $PS$ ,  $IS$ , sunt ad invicem ut  $IS^n$ , ad  $PS^n$  (ex Hyp.) &  $IS$ :  $PS = IS^2$ :  $AS^2 = IE^2$ :  $PE^2$ , (ob proportionales  $IE$ :  $PE = IS$ :  $AS$ ), atque adeò  $IS^n$ :  $PS^n = IE^2$ :  $PE^2$ , &  $IS^n$

$PS^n = IE^n$ :  $PE^n$ . Quare  $IE^n$  est ad  $PE^n$  in ratione subduplicatâ virium in distantiiis  $PS$ ,  $IS$ , & ordinarum ratio  $PS \times IE^n$ , ad  $SA \times PE^n$  æqualis est rationi  $PS^{\frac{1}{2}} \times IS^{\frac{1}{2}}$ , ad  $IS^{\frac{1}{2}} \times PS^{\frac{1}{2}}$ .

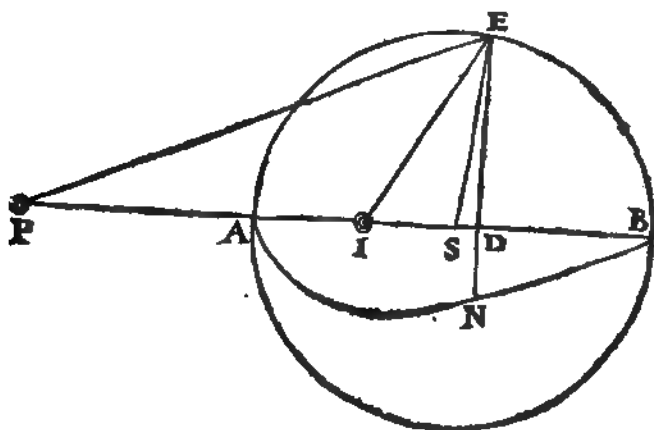
534. *Scholium.* Iisdem positis quæ in prop. 82. si centro  $I$  radio  $IA$  sphæra  $ACMD$  descripta sit, vis quâ corpusculum in  $I$  situm à totâ sphærâ majore  $AHBK$  versùs centrum  $S$  trahitur, æqualis est vi quâ subductâ sphærâ minore  $ACMD$  traheretur. Nam corpusculum in centro  $I$  sphæræ  $ACMD$  positum, æqualiter undiquè ab hujus sphæræ minoris partibus trahitur.

535. *Cor. 1.* Si centro  $S$  radio  $SI$  descripta sit sphæra  $Ihbk$ , & vis centripeta in recessu corporis attracti decrescat in triplicatâ ratione distantiarum à particulis materiæ trahentibus, corpusculum in  $I$  situm seu in contactu sphæræ cavæ  $AIBKI$ , subductâ sphærâ interiore  $Ihbk$ , vi infinitâ retrahitur à centro  $S$  versùs  $A$ . Nam vis quâ corpusculum

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 499

&  $IE^2$  ad  $PE^2$  (ob proportionales  $IE$  ad  $PE$  ut  $IS$  ad  $SA$ ) DE Mo-  
subduplicata est ratio virium in distantis  $PS$ ,  $IS$ . Ergo ordina-

TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS,  
PROP.  
LXXXII.  
THEOR.  
XLI.

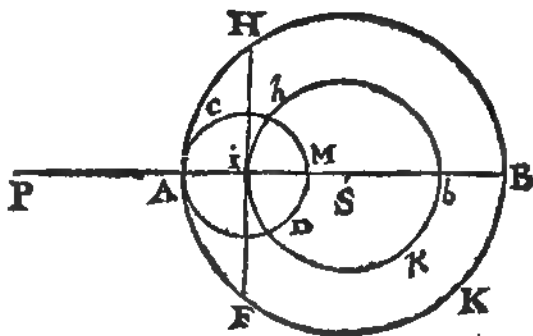


tæ; & propterea areae quas ordinatæ describunt; hisque propor-  
tionales attractiones, sunt in ratione compositâ ex subduplicatis  
illis rationibus. Q. E. D.

P R O

lum in contactu I à sphaerâ interiore I h b k  
versus centrum S trahitur, infinita est  
(520. 527.) respectu vis illius quâ extrâ  
contactum traheretur. Sed vis quâ à sphæ-  
râ totâ solidâ A H B K S, versus idem cen-  
trum S trahitur finita est, ut potè quæ ra-  
tionem finitam habeat ad vim finitam,  
quâ corpusculum in loco P urgeretur (prop.  
82.) ergò vis quâ à sphæra cavâ A I H B K I,  
retrahitur à centro versus A infinita est;  
vis enim quâ in centrum S, à sphæra soli-  
dâ A H B K S in centrum trahitur, æqua-  
lis est vi sphære interioris I h b k, demp-  
tâ vi contrariâ sphære cavæ A I H B K I.

536. Cor. 2. Ductâ per I rectâ H F ad  
A B perpendiculari & sphære occurrente  
in H & F vis quâ sphære segmentum  
A H F corpusculum in contactu, I fitum  
versus A trahit, est etiam infinita in eadem  
virium hypothesi. Nam partes omnes seg-  
menti cavæ I H b B K F I, corpus in I po-



fitum ad centrum S trahunt; ideoque à  
solo segmento A H F à centro versus A  
retrahitur, sed vi infinitâ à centro retra-  
hitur 535. Ergo &c.

R r r



DE MO-  
TU COR-  
PORUM.LIBER  
PRIMUS.

PROP.

LXXXIII.

PROB.

XLII.

## PROPOSITIO LXXXIII. PROBLEMA XLII.

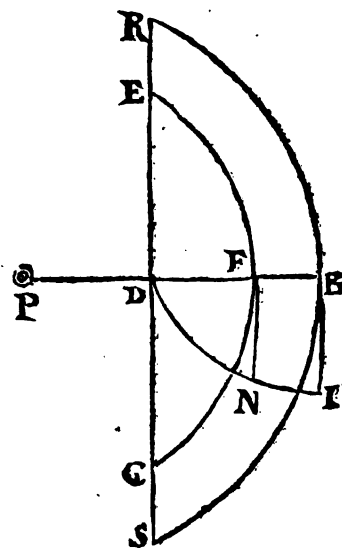
*Invenire vim quâ corpusculum in centro sphaeræ locatum ad ejus segmentum quodcunque attrahitur.*

Si  $P$  corpus in centro sphaeræ, &  $RBSD$  segmentum ejus plano  $RDS$  & superficie sphaericâ  $RBS$  contentum. Superficie sphaericâ  $EFG$  centro  $P$  descriptâ secetur  $DB$  in  $F$ , ac distinguatur segmentum in partes  $BREFGS$ ,  $FEDG$ . Sit autem superficies illa non purè mathematica, sed physica, profunditatem habens quàm minimam. Nominetur ista profunditas  $O$ , & erit hæc superficies (per (\*) demonstrata Archimedis) ut  $PF \times DF \times O$ . Ponamus præterea vires attractivas particularum sphaeræ esse reciprocè ut distantiarum dignitas illa, cujus index est  $n$ ; & vis, quâ superficies  $EFG$  trahit corpus  $P$ , erit (per

prop. LXXIX.) ut  $\frac{DEq \times O}{PF^n}$ , id

(\*) est, ut  $\frac{2DF \times O}{PF^n - 1} - \frac{DFq \times O}{PF^n}$ .

Huic proportionale sit perpendicularum  $FN$  ductum in  $O$ ; & (a) area curvilinea  $BDI$ , quam ordinatim applicata  $FN$  in



(\*) \* Per demonstrata Archimedis. Nam (515.) elementum superficiei  $EFG$ , est ut  $PF$  ducta in elementum lineæ  $DF$ , adeoque ob datam  $PF$ , respectu superficiei totius  $EFG$ , superficies illa (165.) erit ut  $PF \times DF$ , & proinde lamina ex hac superficie & profunditate  $O$ , genita erit ut  $PF \times DF \times O$ .

(2) \* Id est &c. Nam (per prop. 13. Lib. 6. Elem.)  $DE^2 = 2PF - DF \times DF$   
 $= 2PF \times DF - DF^2$ . Quare  $\frac{DE^2 \times O}{PF^n}$

$$= \frac{2DF \times O}{PF^n - 1} - \frac{DF^2 \times O}{PF^n}$$

(a) 537. \* Es area curvilinea &c. Si segmentum  $RBSDR$ , in laminas innumeras profunditatis evanescentis  $O$  divisum intelligatur, & capiatur semper perpendicularum  $FN$ , vi singularum laminarum proportionale; manifestum est (per Lem. 4.) summam elementorum  $FN \times O$ , seu aream curvilineam  $DNIB$ , proportionalem fore summæ virium. Sit igitur  $PD = a$ ,  $PF = x$ .

$$= x \cdot 2$$

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 501

in longitudinem  $DB$  per motum continuu[m] ducta describit, erit De Mo-  
ut vis tota quâ segmentum totum  $RBSD$  trahit corpus  $P$ . TU COR-  
Q. E. I. PORUM.

LIBER

PRIMUS.

PROP.

LXXXIII.

PROBL.

XLII.

$=x$ ;  $DF=x-a$ , & erit laminae sphaericae  
EFG vis attractiva ut  $\frac{2x dx - 2a dx}{x^{n-1}}$

$\frac{2x dx - 2a dx + a dx}{x^n} = \frac{dx}{x^{n-1}}$

$\frac{a dx}{x^n} = x^{2-n} - dx - a x^{1-n} = dx$ , cujus  
fluens  $= \frac{x^{3-n}}{3-n} - \frac{a x^{2-n}}{2-n} + Q \text{ const.}$

Sed posita  $x=a$ , segmentum & vis illius  
evanescunt; ergo erit  $Q = -\frac{a^{1-n}}{3-n} +$

$\frac{a^{2-n}}{2-n} - \frac{2a^{1-n}}{3-n \times 1-n}$ , & fluens accu-  
rata  $= \frac{x^{3-n}}{3-n} - \frac{a x^{2-n}}{2-n} + \frac{2a^{1-n}}{3-n \times 1-n}$

538. Cor. Hinc patet vim quâ corpus  
in  $P$  locatum, à segmento trahitur sem-  
per posse algebraicè exponi, duobus casu-  
bus exceptis in quibus  $n$  est 1 vel 3. tunc  
autem per logarithmos vel areas hyperbo-  
licas habetur. In 1.º casu area DNI, fluxio  
erit  $x dx = \frac{a dx}{x}$ . Primi termini fluens  
est  $\frac{1}{2} x x + Q$ , quæ evanescere debet posi-  
tâ  $x=a$ , quare erit  $Q = -\frac{1}{2} a a$ , & fluens  
accurata  $= \frac{1}{2} x x - \frac{1}{2} a a$ . Ut secundi ter-  
mini fluens obtineatur, per punctum  $P$   
agatur  $PM$  ad  $PF$  normalis, & asympto-  
tis  $PM$ ,  $PF$ , describatur Hyperbola equi-  
laterâ cujus sit dignitas  $PD^2$ ; per puncta  
 $D$ ,  $F$ ,  $f$  erigantur perpendiculara  $DH$ ,  
 $FK$ ,  $ff$  hyperbolæ occurrentia in  $H$ ,  $F$ ,  
 $f$ , sintque puncta  $F$ ,  $f$ , infinitè propin-  
qua, & erit area hyperbolica  $DHKE$

æqualis fluenti secundi termini; nam (per  
theor. 4. de hyperbolâ)  $PD \times DH = PD^2$

$= PF \times FK$ , & ideo  $FK = \frac{PD^2}{PF}$ , ac

$FK \times Ff = \frac{PD^2 \times dx}{x}$  & area  $DHKE$

evanescit, ubi  $PF$  seu  $x = PD$ .

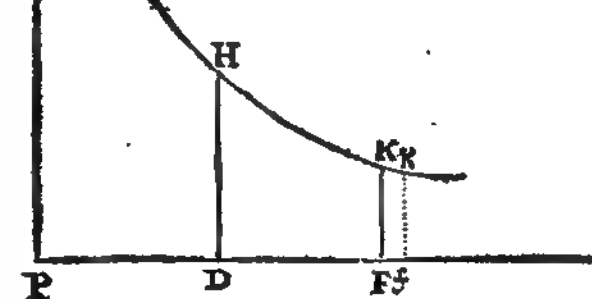
In 2.º casu area DNI, fluxio est  $\frac{dx}{x}$

$= \frac{a dx}{x^2}$ . Secundi termini fluxio est

$\frac{a dx}{2 x x} + Q$ , & invenitur  $Q = -\frac{1}{2}$ , posita

$x=a$ , atque adeò fluens accurata; erit

$\frac{a dx}{2 x x} - \frac{1}{2}$ . Ponatur  $a=x$ ; & primi ter-



mini  $\frac{dx}{x}$ , fluens; erit area hyperbolica

$DHKE = S. \frac{a dx}{x}$ . Quare area DNI

est ut  $DHKE + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x x$ .

Rit

PRO

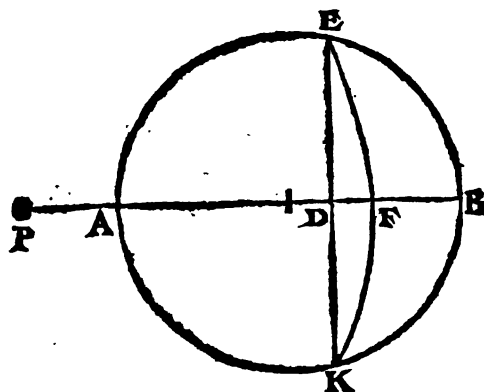
DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

PROPOSITIO LXXXIV. PROBLEMA XLIII:

LIBER PRIMUS. *Invenire vim, qua corpusculum; extra centrum sphaerae in axe segmenti cujuscvis locatum, attrahitur ab eodem segmento.*

PROP.  
LXXXIV.  
PROBL.  
XLIII.

A segmento  $E B K$  trahatur corpus  $P$  in ejus axe  $A D B$  locatum. Centro  $P$  intervallo  $P E$  describatur superficies sphaerica  $E F K$ , qua distinguatur segmentum in partes duas  $E B K F E$  &  $E F K D E$ .  
(<sup>b</sup>) Quærat<sup>r</sup> vis partis prioris per *prop. LXXXI.* & vis partis posterioris per *prop. LXXXIII.*; & summa virium erit vis segmenti totius  $E B K D E$ . *Q. E. I.*



*Scholium.*

Explicatis attractionibus corporum sphaericorum; jam pergere liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis similiter constantium corporum; sed ista particulatim tractare minus ad institutum spectat. Suffecerit propositiones quasdam generales de viribus hujusmodi corporum deque motibus inde oriundis, ob (<sup>c</sup>) earum in rebus philosophicis aliqualem usum, subungere.

SEC.

(<sup>b</sup>) \* *Quærat<sup>r</sup> vis partis prioris:* 525. 529.

(<sup>c</sup>) \* *Ob earum in rebus philosophicis aliqualem usum.* Vide quæstiones Lib. 4. Optices NEWTONI. 30. theorematum ad cal-

cem Astronomiæ Clariss. Keillii, Physicæ Clariss. s'Gravesandii, Dissertationem Clariss. De Maupertuis in Commentariis Paris. 1732. ubi has NEWTONI sectiones clare exponit.

## S E C T I O XIII.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXXXV.  
THEOR.  
XLII.

*De corporum non sphaericorum viribus attractivis.*

## PROPOSITIO LXXXV. THEOREMA XLII.

*Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum est, attractio longè fortior sit, quam cum vel minimo intervallo separantur ab invicem: vires particularum trahentis, in recessu corporis attracti, decrescunt in ratione plusquam duplicatâ distantiarum à particulis.*

Nam si vires decrescunt in ratione duplicatâ distantiarum à particulis; attractio versus corpus sphaericum, propterea quod (per prop. LXXIV.) sit reciproce ut quadratum distantiae attracti corporis à centro sphaerae, haud sensibilibiter augebitur ex contactu; atque adhuc minus augebitur ex contactu, si attractio in recessu corporis attracti decrescat in ratione minore. Patet igitur propositio de sphaeris attractivis. Et (d) par est ratio orbium sphaericorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res constat in orbibus corpora interiora constituta trahentibus, cum attractiones passim per orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per prop. LXX.) tollantur, ideoque vel ipso contactu nullae sunt. Quod si sphaeris hisce orbibusque sphaericis partes quaelibet à loco contactus remotae auferantur, & partes novae ubivis addantur: mutari possunt figurae horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additae vel subductae, cum sint à loco contactus remotae, augebunt notabiliter attractionis excessum, qui ex contactu oritur. Constat igitur propositio de corporibus figurarum omnium. Q. E. D.

## PROPOSITIO LXXXVI. THEOREMA XLIII.

*Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in recessu corporis attracti decrescunt in triplicatâ vel plusquam triplicatâ ratione distantiarum à particulis, attractio longè fortior erit in contactu, quam cum trahens & attractum intervallo vel minimo separantur ab invicem.*

Nam attractionem in accessu attracti corpusculi ad hujus-

(d) \* Et par est ratio orbium sphaericorum concavorum. (Per prop. 71.).

DE MO- modi sphæram trahentem (e) augeri in infinitum, constat per  
TU COR- solutionem problematis XL I. in exemplo secundo ac tertio exhi-  
PORUM. bitam. Idem, per exempla illa & theorema XL I. inter se col-  
LIBER. lata, facile (f) colligitur de attractionibus corporum versus or-  
PRIMUS. bes concavo-convexos, sive corpora attracta collocentur extra  
PRO P. orbes, sive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auge-  
LXXXVI. rendo his sphæris & orbibus ubivis extra locum contactus ma-  
THEOR. teriam quamlibet attractivam, eò ut corpora attractiva induant  
XL I I I. figuram quamvis assignatam, constabit propositio de corporibus  
universis.

### PROPOSITIO LXXXVII. THEOREMA XLIV.

*Si corpora duo sibi invicem similia; & ex materia æqualiter attractivâ constantia, seorsim attrahant corpuscula sibi ipsis proportionalia & ad se similiter posita: attractiones acceleratrices corpusculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpusculorum in eorum particulas totis proportionales, & in totis similiter positas.*

Nam si corpora distinguantur in particulas; quæ sint totis proportionales; & in totis similiter sitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correspondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas singulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas singulas correspondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus (g) ad attractionem in totum secundum. Q. E. D.

Co-

(e) \* Augeri in infinitum constat &c. (521. 527. 531.).

(f) \* Facile colligitur de attractionibus &c. 528. 530. 532. 535. 536.

(g) 539. \* Ad attractionem in totum secundum. Corpora similia A, a, seorsim attrahant corpuscula C, c sibi ipsis proportionalia & ad se similiter posita, sintque P, p particulae totis A, a, proportionales & in totis similiter sitæ & attractio

decreascit in ratione dignitatis distantiarum, cujus sit index n; erit attractio corpusculi C in particulam P ad attractionem corpusculi c in particulam p, ut  $P \times p c^n$ , ad  $p \times P C^n$ . Unde si corpora A & a in particulas innumeras ut P & p divisâ intelligantur, erit, componendo, attractio corpusculi C in totum corpus A ad attractionem corpusculi c in totum corpus a, ut  $P \times p c^n$  ad  $p \times P C^n$ , quod par-

*Corol. 1.* Ergo si vires attractivæ particularum, augendo De Mo-  
distantias corpusculorum attractorum, decreſcant in ratione dig- TU COR-  
nitatis cujuſvis diſtantiarum; attractiones acceleratrices in corpora PORUM.  
tota erunt ut corpora directè, & diſtantiarum dignitates illæ in- LIBER  
verſè. Ut ſi vires particularum decreſcant in ratione duplica- PRIMUS.  
tâ diſtantiarum à corpusculis attractis, corpora autem ſint ut LXXXVII.  
*A cub.* & *B cub.* ideoque tum corporum latera cubica, tum THEOR.  
corpusculorum attractorum diſtantiæ à corporibus, ut *A* & *B*: x LIV.

attractiones acceleratrices in corpora erunt ut  $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ quad.}}$  &

$\frac{B \text{ cub.}}{B \text{ quad.}}$ , id eſt, ut corporum latera illa cubica *A* & *B*. Si

viſes particularum decreſcant in ratione triplicatâ diſtantiarum à

corpusculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota

erunt ut  $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ cub.}}$  &  $\frac{B \text{ cub.}}{B \text{ cub.}}$ , id eſt, æquales. Si viſes decreſcant

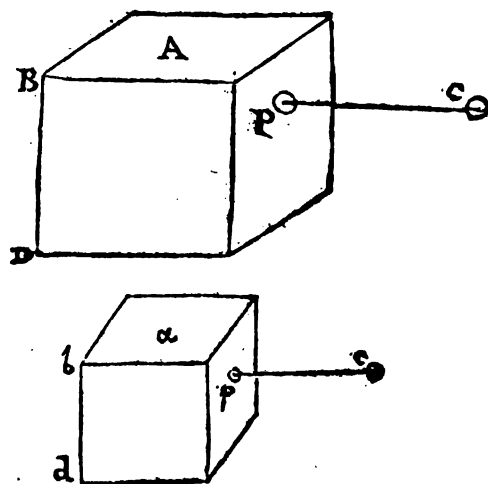
in ratione quadruplicatâ; attractiones in corpora erunt ut  $\frac{A \text{ cub.}}{A q q.}$

&  $\frac{B \text{ cub.}}{B q q.}$ , id eſt, reciprocè ut latera cubica *A* & *B*. Et ſic

in cæteris. Co-

particulæ omnes *P*, *p* ſint ubique totis  
ſimiles & in iis ſimiliter ſitæ, & diſtantiæ  
earum à corpusculis *C*, *c* ſemper maneat  
proportionales diſtantiis *P C*, *p c*. Cum  
igitur ſit *P* ad *p* ut *A* ad *a*, & diſ-  
tantiæ *p c*, *P C* ſint lateribus homo-  
logis *b d*, *B D* proportionales (*ex Hyp.*)  
erit attractio corpusculi *C*, in totum cor-  
pus *A*, ad attractionem corpusculi *c* in to-  
tum corpus *a*, ut  $A \times p c = a \times P C$ ,  
atque etiam ut  $A \times b d = a \times B D$ ,  
& ut  $B D : a b d = a d : B D$ ,  
hoc eſt, ut  $b d = \frac{a}{B D}$ ; ad  $B D = \frac{a}{b d}$ , ob  
proportionales  $A : a = B D : b d$ , (*per*  
*Hyp.*) ex quibus patet corollarium ræ-  
quod ſequitur; Nam ſi  $n = 2$ , erunt at-  
tractiones ut  $B D$  ad  $b d$ ; ſi  $n = 3$ ,  
erunt æquales; ſi,  $n = 4$ , erunt ut  $b d$ ,  
ad  $B D$ , hoc eſt, reciprocè ut latera cu-  
bica corporum.

Tom. I.



s r r

DE MO-  
TU COR-  
PORUM  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXXXVIII.  
THEOR.  
XLV.

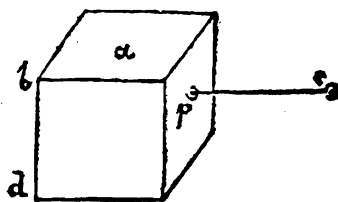
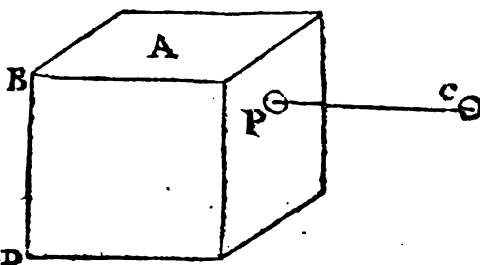
Corol. 2. (h) Unde vicissim, ex viribus, quibus corpora si-  
militer trahunt corpuscula ad se similiter posita, colligi potest ra-  
tio decrementi virium particularum attractivarum in recessu  
corpusculi attracti; si modo decrementum illud sit directè vel  
inversè in ratione aliquâ distantiarum.

PROPOSITIO LXXXVIII. THEOREMA XLV.

*Si particularum æqualium corporis cujuscunque vires attractivæ sint ut  
distantiæ locorum à particulis: vis corporis totius tendet ad ipsius  
centrum gravitatis; & eadem erit cum vi globi ex materiâ consimili  
& æquali constantis, & centrum habentis in ejus centro gravitatis.*

Corporis *RSTV* particulæ *A*, *B* trahant corpusculum ali-  
quod *Z* viribus, quæ, si particulæ æquantur inter se, sint  
ut distantiæ *AZ*, *BZ*; sin particulæ statuatur inæquales, sint  
ut hæ particulæ & ipsarum distantiæ *AZ*, *BZ* conjunctim,

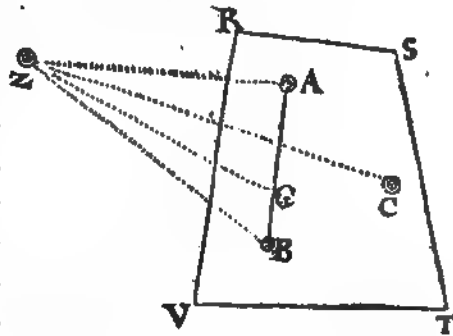
(h) 540. \* Unde vicissim &c. Nam si  
experimentis inventum sit attractionem cor-  
pusculi *C* in corpus *A*, esse ad attraccio-  
nem corpusculi *c*, in corpus *a*, ut est  
*BD* ad *bd*, vel ut *r* ad *1*, vel ut *bd*  
ab *BD*, vires particularum attractivarum  
decrevant in ratione distantiarum duplica-  
tâ, vel triplicatâ, vel quadruplicatâ (§ 39).  
Et generatim, si experimentis inventa fue-  
rit attractio corpusculi *C* in *A* ad attrac-  
tionem corpusculi *c* in *a*, ut numerus *N*  
ad numerum *n*, ponaturque vim particu-  
larum attractivarum in recessu corpusculi  
attracti decreverit in ratione dignitatis  
distantiarum cujus sit index *x* erit (§ 39)  
 $n : N = BD^x : bd^x$ , adeoque (si  
*L* logarithmum significet quantitatis cui  
proponitur) erit  $L. \frac{n}{N} = L. \frac{BD^x}{bd^x}$



$= x - 3 \times L. \frac{BD}{bd}$ . Quare erit  $x \times$   
 $L. \frac{BD}{bd} = L. \frac{n}{N} + 3. L. \frac{BD}{bd}$ , &  $x =$   
 $L. \frac{n}{N} + 3$ . Invenitur itaque dignitatis in-  
dex  $x$ , per tabulas logarithmicas. Exem-  
pli causâ. Si  $\frac{n}{N} = \frac{BD}{bd}$ , erit  $L. \frac{BD}{bd} =$

$- L. \frac{BD}{bd}$ , &  $bd : BD = -1 + 3 = 2$ . Si  
 $\frac{n}{N} = 1$ , erit  $L. \frac{n}{N} = 0$ , & proinde  $x = 3$ .  
Si  $\frac{n}{N} = \frac{BD}{bd}$ , erit  $x = 4$ , prout ut su-  
pra. Si  $\frac{n}{N} = \frac{BD^p}{bd^p}$ , erit  $L. \frac{n}{N} = p \times$   
 $L. \frac{BD}{bd}$ , &  $x = p + 3$ . Sed si  $\frac{n}{N} =$

five ( si ita loquar ) ut hæ particulæ in distantias suas  $AZ$ ,  $BZ$  respectivè ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa  $A \times AZ$  &  $B \times BZ$ . Jungatur  $AB$ , & secetur ea in  $G$  ut sit  $AG$  ad  $BG$  ut particula  $B$  ad particulam  $A$ ; & erit  $G$  commune centrum gravitatis particularum  $A$  &  $B$ . Vis  $A \times AZ$  ( per legem corol. 2. ) resolvitur in vires  $A \times GZ$  &  $A \times AG$ , & vis  $B \times BZ$  in vires  $B \times GZ$  &  $B \times BG$ . Vires autem  $A \times AG$  &  $B \times BG$ , ob proportionales  $A$  ad  $B$  &  $BG$  ad  $AG$ , æquantur; ideoque cum dirigantur in partes contrarias, se mutuo destruunt. Restant vires  $A \times GZ$  &  $B \times GZ$ . Tendunt hæ ab  $Z$  versus centrum  $G$ , & vim  $A + B \times GZ$  componunt; hoc est, vim eandem ac si particulæ attractivæ  $A$  &  $B$  confisterent in eorum communi gravitatis centro  $G$ , globum ibi componentes.



Eodem argumento, si adjungatur particula tertia  $C$ , & componatur hujus vis cum vi  $A + B \times GZ$  tendente ad centrum  $G$ ; vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis globi illius in  $G$  & particulæ  $C$ ; hoc est, ad commune centrum gravitatis trium particularum  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ; & eadem erit, ac si globus & particula  $C$  confisterent in centro illo communi, globum majorem ibi componentes. Et sic pergitur in infinitum. Eadem est igitur vis tota particularum omnium corporis cujuscunque  $RSTV$ ; ac si corpus illud, servato gravitatis centro, (i) figuram globi indueret. *Q. E. D.*

*Corol.* Hinc motus corporis attracti  $Z$  idem erit, ac si corpus attrahens  $RSTV$  effet sphaericum: & propterea si corpus illud

$\frac{b \, d \, r}{B \, D \, r}$ , invenietur  $x = 3 - p$ . Si  $\frac{B \, D}{b \, d} = 10$ , (i) \* Figuram globi indueret. Per prop. 77.

$$\text{erit } x = \frac{L \frac{n}{N}}{1.0000000} + 3 = 2 \frac{n}{N} + 3;$$



DE Mo-  
TU COR-  
PORUM. *lud attrahens vel quiescat, vel progrediatur uniformiter in di-  
rectum; corpus attractum (<sup>k</sup>) movebitur in ellipsi centrum ha-  
bente in attrahentis centro gravitatis.*

LIBER

PRIMUS.

PROP.

LXXXIX.

THEOR.

XLVI.

## PROPOSITIO LXXXIX. THEOREMA XLVI.

*Si corpora sint plura ex particulis æqualibus constantia, quarum vires sunt ut distantie locorum à singulis: vis ex omnium viribus composita, quâ corpusculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis; & eadem erit, ac si trahentia illa, servato gravitatis centro communi, coirent & in globum formarentur.*

Demonstratur eodem modo, atque propositio superior.

*Corol.* Ergo motus corporis attracti idem erit, ac si corpora trahentia, servato communi gravitatis centro, coirent & in globum formarentur: Ideoque si corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quiescit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; corpus attractum movebitur in ellipsi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

## PROPOSITIO XC. PROBLEMA XLIV.

*Si ad singula circuli cujuscunque puncta tendant vires æquales centripetæ, crescentes vel decrescentes in quâcunque distantiarum ratione: invenire vim, quâ corpusculum attrahitur ubivis positum in rectâ, quæ plano circuli ad centrum ejus perpendiculariter insistit.*

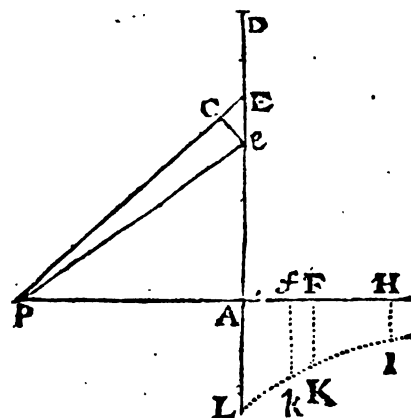
Centro *A* intervallo quovis *AD*, in plano, cui recta *AP* perpendicularis est, describi intelligatur circulus; & invenienda sit vis, quâ corpusculum quodvis *P* in eundem attrahitur. A circuli puncto quovis *E* ad corpusculum attractum *P* agatur recta *PE*. In rectâ *PA* capiatur *PF* ipsi *PE* æqualis, &c.

(<sup>k</sup>). \* Movebitur in ellipsi &c. Per cor. prop. 78. & per cor. prop. 109.



# 510 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO-  $\frac{AP \times FK}{PE}$  conjunctim, id est,  
TU COR-  
FORUM.  $\frac{AP \times FK}{PE}$  ut contentum  $Ff \times FK \times AP$ ,  
LIBER ut contentum  $Ff \times FK \times AP$ ,  
PRIMUS. five ut area  $FKkf$  ducta in  
PROB.  $AP$ . Et ( $^{\circ}$ ) propterea summa  
X C. virium, quibus annuli omnes in  
PROBL. circulo, qui centro  $A$  & inter-  
XLIV. vallo  $AD$  describitur, trahunt  
corpus  $P$  versus  $A$ , est ut area  
tota  $AHIKL$  ducta in  $AP$ .  
 $Q: E. D.$



*Corol. 1.* Hinc si vires punctorum decrescunt in duplicatâ distantiarum ratione, hoc est, si sit  $FK$  ut  $\frac{1}{PF \text{ quad.}}$  ( $^p$ ) atque ideo area  $AHIKL$  ut  $\frac{1}{PA} \frac{1}{PH}$ ; erit attractio corpusculi  $P$  in circulum ut  $1 - \frac{PA}{PH}$ , id est, ut  $\frac{AH}{PH}$ .

*Corol. 2.* Et universaliter, si vires punctorum ad distantias  $D$  sint reciprocè ut distantiarum dignitas quælibet  $D^n$ , hoc est, si sit  $FK$  ut  $\frac{1}{D^n}$ , ( $^q$ ) ideoque area  $AHIKL$  ut  $\frac{1}{PA^{n-1} PH}$ .

angulus  $PEA$  utrique triangulo  $CEc$ ,  $AEP$  communis est, adeoque triangula hæc similia sunt, & latera habent proportionalia. (Per prop. 4. lib. 6. Elem.)

( $^o$ )\* Et propterea summa virium &c. Per cor. lem. 4.

( $^p$ )\* Atque ideo area &c. Sit enim  $PF = x$ ,  $Ff = dx$ , & erit  $FK \times Ff$  ut  $\frac{dx}{x^2}$

(ex hyp.) cujus fluens est  $-\frac{1}{x} + Q. \text{const.}$  (165); Et quoniam area  $ALKF$  evanescere debet, ubi  $PE = PA$ , erit  $Q = \frac{1}{PA}$

& area  $ALKF$  ut  $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PF} = \frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$

ubi  $PF = PH$ . Cum igitur attractio corpusculi  $P$ , in circulum sit ut  $AHIKL \times PA$ , erit quoque ut  $1 - \frac{PA}{PH} = \frac{AH}{PH}$

( $^q$ )\* Ideoque area &c. Si enim  $D$  dicatur  $x$ , erit  $PK \times Ff$  ut  $\frac{dx}{x^n}$ , (ex hyp.)

& (165.) area  $AFKL$ , ut  $\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + Q. \text{const.}$  posita  $x$  seu  $PF = PA$ , invenitur  $Q = \frac{1}{(n-1)PA^{n-1}}$ , idcoque area

$AFKL$ , ut  $\frac{1}{(n-1)PA^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$  hoc

$\frac{1}{PH^{n-1}}$ ; erit attractio corpusculi  $P$  in circulum ut  $\frac{1}{PA^{n-2}}$  DE MO.  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

$$\frac{PA}{PH^{n-1}}$$

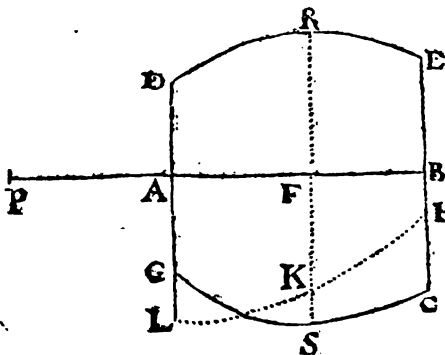
Corol. 3. Et si diameter circuli augeatur in infinitum, & nu- PRO P.  
merus  $n$  sit unitate major; attractio corpusculi  $P$  in planum totum X C.  
infinitem erit reciproce ut  $PA^{n-2}$ , propterea quod (1) termi PROBL.  
X LIV.

nus alter  $\frac{PA}{PH^{n-1}}$  evanescet.

### PROPOSITIO XCI. PROBLEMA XLV.

*Invenire attractionem corpusculi sit in axe solidi rotundi, ad cu-  
jus puncta singula tendunt vires æquales centripetæ in quacun-  
que distantiarum ratione decrecentes.*

In solidum (1)  $DECG$  trahatur corpusculum  $P$ , situm in  
ejus axe  $AB$ . Circulo quo-  
libet  $RFS$  ad hunc axem per-  
pendiculari secetur hoc soli-  
dum, & in ejus semidiame-  
tro  $FS$ , in plano aliquo  
 $PALKB$  per axem trans-  
eunte, capiatur (per prop.  
X C.) longitudo  $FK$  vi, quâ  
corpusculum  $P$  in circulum  
illum attrahitur, proportio-  
nalis. Tangat autem punctum  $K$  curvam lineam  $LKI$ ,  
planis extimorum circularum  $AL$  &  $BI$  occurrentem in  $E$   
&  $I$ ; & erit attractio corpusculi  $P$  in solidum ut (1) area  
 $LABI$ . Q. E. I.



hoc est, ob datam quantitatem  $n-1$ , ut

$$\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}, \text{ ubi } PF = PH.$$

(1) \* Terminus alter evanescet. Ob  
PH, infinitam.

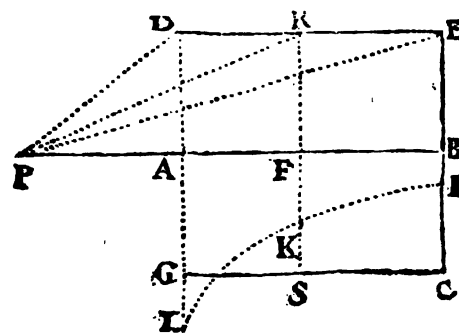
(1) \* In solidum  $DECG$  &c. Cen-  
volutione superficiæ  $ADREB$  circa axem  
 $AB$  genitum.

(1) \* Ut area  $LABI$ . Patet per cor-  
lem. 4. Nam area illa est ut summa vi-  
rium singulorum circularum, qui per om-  
nia puncta lineæ  $AB$  describi possunt.

141. Scholium. Sit abscissa  $PF = x$ ,  
ejus fluxio  $d x$ , ordinatim applicata  $FR$   
 $= y$ ,  $PR = \sqrt{xy + xx}$ , & vis reciproca

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROB-  
LEMA  
XCV.

Corol. 1. Unde si soli-  
dum cylindrus sit, paralle-  
logrammo  $ADEB$  circa  
axem  $AB$  revoluto descrip-  
tus, & vires centripetæ in  
singula ejus puncta tenden-  
tes sint reciproce ut qua-  
drata distantiarum à punc-  
tis: (u) erit attractio cor-  
pusculi  $P$  in hunc cylin-  
dram ut  $AB - PE + PD$ . Nam ordinatim applicata  $FK$



(per corol. 1. prop. XC.) erit ut  $a - \frac{PF}{PR}$ . Hujus pars 1 duc-  
ta in longitudinem  $AB$ , describit aream  $a \times AB$ : & pars al-  
tera  $\frac{PF}{PR}$  ducta in longitudinem  $PB$ , describit aream 1 in  
 $PE - AD$ , id quod ex curvæ  $LKI$  quadraturâ facile ostendi  
potest; & similiter pars eadem ducta in longitudinem  $PA$   
describit aream 1 in  $PD - AD$ , ductaque in ipsarum  $PB$ ,  
 $PA$  differentiam  $AE$  describit arearum differentiam 1 in  
 $PE - PD$ . De contento primo  $1 \times AB$  auferatur contentum  
postremum 1 in  $PE - PD$ , & restabit area  $LABI$  æqualis  
1 in  $AB - PE + PD$ . Ergo vis, huic areæ proportionalis,  
est ut  $AB - PE + PD$ . Co-

ut distantie dignitas ejus index  $n$ , erit

$$FK \text{ ut } \frac{1}{PF^{n-2}} - \frac{PF}{PR^{n-1}} = \frac{1}{x^{n-2}} - \frac{x}{(yy+xx)^{\frac{n-1}{2}}} \text{ (per cor. 2. prop. 90.)}$$

Quare areæ  $AFKL$  fluxio erit ut  $\frac{dx}{x^{n-2}}$

$$- \frac{x dx}{(yy+xx)^{\frac{n-1}{2}}}, \text{ & hujus fluens ut vis}$$

quâ corpusculum  $P$  in solidum  $DRSG$   
trahitur. Datâ verò curvæ  $DRE$  natu-  
râ, inveniendus est valor ordinatæ  $y$  per  
abscissam  $x$ , & inde fluens determinanda.

(u) \* Erit attractio corpusculi  $P$  &c. Si  
ordinatim applicata  $FR$ , dicatur  $b$ , patet  
(419) areæ  $AFKL$ , elementum fore ut

$$dx = \frac{x dx}{(bb+xx)^{\frac{1}{2}}}. \text{ Fiat } bb+xx=zz$$

& erit  $x dx = z dz$ , & proinde elementum  
prædictum ut  $dx = dz$ . Quare  $AFKL$   
erit ut  $x - z + Q$ , & quoniam hæc area  
evanescit, ubi  $PF$ , seu  $x = PA$ , &  $PR$   
seu  $z = PD$ , erit  $Q = PD - PA$ , & area  
 $AFKL$ , seu attractio corpusculi  $P$ , in  
cylindrum  $DRSG$ , ut  $PF - PR + PD$   
 $- PA = AF - PR + PD = AB - PE +$   
 $PD$ , ubi fit  $PF = PB$ , &  $PR = PE$ .

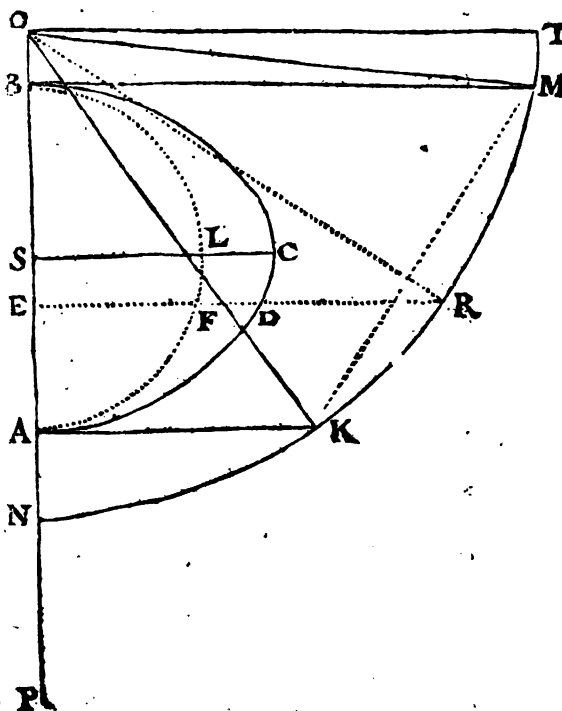
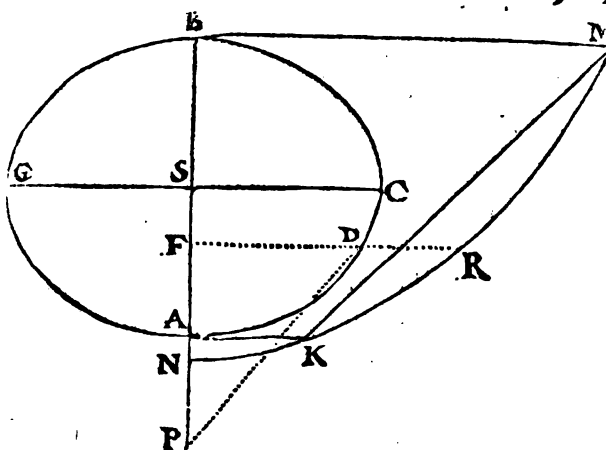
*Corol. 2.* Hinc etiam vis innotescit, quâ sphærois *AGBC* attrahit corpus quodvis *P*, exterius in axe suo *AB* situm. (r) Sit *NKRM* sectio conica cujus ordinatim applicata *ER*, ipsi *PE* perpendicularis, æquetur semper longitudini *PD*, quæ ducitur ad punctum illud *D*, in quo applicata ista sphæroidem fecat.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XCI.  
PROBL  
XLV.

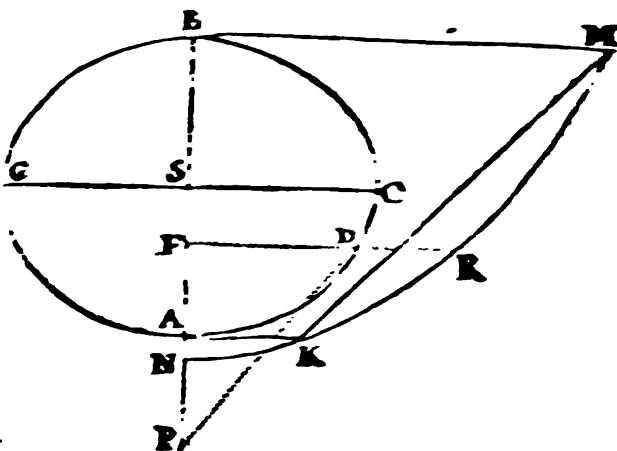
( x ) 542. Sit  $N K R M$  sectio conica cujus ordinatim applicata  $ER$  aequetur semper longitudini  $P D$  &c. Sit  $AP = a$ , curvæ datæ  $ACB$  cujus convolutione generatur sphærois sit semiaxis  $AS = b$ , alter semiaxis  $SC = c$ ,  $AE = x$ , erit  $PE = a + x$ , & ( ex natura Ellipseos ) erit  $ED^2 = \frac{c}{b} \frac{c}{b} \times 2bx - xx$  unde quadratum  $ER$  ordinatæ ad curvam  $N K R M$  five  $PD^2 = PE^2 + ED^2 = a^2 + 2ax + xx + \frac{c}{b} \frac{c}{b} \times 2bx - \frac{c}{b} \frac{c}{b} xx$ ; cum ergo hæc Æquatio ad curvam  $N K R M$ , ultra secundum gradum non assurgat constat eam curvam esse ex Sectionibus Conicis : erit autem Ellipsis si quantitas  $xx - \frac{c}{b} \frac{c}{b} xx$  sit negativa, quod evenit ubi  $SC$  ( five  $c$  ) major est quàm  $AS$  ( five  $b$  ) ; Erit verò Parabola si ea quantitas evanescat, ideoque si  $c = b$  quod evenit ubi curva  $ACB$  est circulus ; Denique erit Hyperbola si ea quantitas sit positiva, hoc est, si  $AS$  sit longior axis.

543. Sit A C B Ellipsis cujus axis C S  
sit major axi A S, quo casu curva N K R M  
erit Ellipsis, hac ratione ejus curvæ N K R M  
determinabuntur Axes & Vertex. Dica-  
tur ejus Ellipseos N K R M semiaxis O N =,  
alter semiaxis O T dicatur, distantia verti-  
cis N à vertice A curvæ A C B, dicatur

**Torn. I.**



DE MOLECULIS A sphaeroidis  
 IN CON-verticibus A, B ad  
 PORTY. ejus axem AB tri-  
 LIBER gantur perpendicula  
 PRIMA AK, BM ipsa AP,  
 XCI. BP aequalia respective,  
 PROBL. & propterea sectioni  
 XLY. conicæ occurrentia in  
 K & M; & jun-  
 gatur KM auferens  
 ab eadem segmentum  
 KMRK. Sit autem.



$p$ , abscissa NE sit  $= p + x$ , & ordinata  
 ER quadrata erit ex Ellipseos natura

$\frac{ss}{ss} \times 2sp + 2sx - pp^2 p - sx$ , quod ex  
 constructionis Hypothesi fuit repositum

$$(542) = a^2 + 2ax + xx + \frac{cc}{bb} 2bx - \frac{cc}{bb} sx$$

Conferantur horum valorum termini ho-  
 mogenei, scilicet constantes cum constan-  
 tibus, eos qui unam variabilem includunt  
 eam similitus &c. fiet tres istæ Equatio-

$$nes (variabilibus deletis) a^2 = \frac{ss}{ss} \times 2sp - pp^2$$

$$a + \frac{cc}{b} = \frac{ss}{ss} \times s - p; s - \frac{cc}{b} = \frac{ss}{ss}$$

Ex hac tertiâ Equazione, mutatis signis utrin-  
 que, reducto primo membro ad communem  
 denominatorem, & in versis terminis fit

$$= \frac{bb}{cc - bb} & ss = \frac{bb}{cc - bb} \times s$$

$$Tum secundæ Equationis  $a + \frac{cc}{b} = \frac{ss}{ss} \times s - p$  mul-$$

tiplicatis terminis per  $\frac{ss}{ss}$ , reductione fa-

cta primi membri ad eundem deno- minato-

rem, & substitutione factâ valoris  $\frac{ss}{ss}$  su-

$$pra inventi fit  $s - p = \frac{b}{cc - bb} \times ba + c$$$

spha-

Denique, primæ Equationis  $a^2 = \frac{ss}{ss} \times$

$2sp - pp^2$  multiplicatis membris per  $\frac{ss}{ss}$ ,  
 substituto ejus valore, utriusque mutatis

signis & additis ss, fit tandem  $ss - \frac{b^2}{c^2 - b^2} a^2$

$= ss - 2sp + pp^2$ , in qua novâ E-  
 quatione cum secundum membrum fit ip-  
 sum quadratum quantitatis  $s - p$ , substitu-  
 to ejus valore prius reposito, & loco ss  
 in primo membro substituto etiam ejus va-

lore, fit  $c^2 - b^2 \times s^2 - a^2 = \frac{cc}{c^2 - b^2} \times$

$ba + cc^2$  & diviso utroque membro per

$\frac{b^2}{c^2 - b^2}$  transponendo  $a^2$ , & redactado.

secundum membrum ad communem deno-

minatorem, deletisque terminis sese do-

fluentibus est  $s^2 = \frac{c^2}{c^2 - b^2} \times a^2 + 2ab + c^2$ ,

sive quia PS = a + b est PS<sup>2</sup> = b<sup>2</sup> + a<sup>2</sup> + 2ab,

ideoque est  $s^2 = \frac{c^2}{c^2 - b^2} \times PS^2 - b^2 + c^2$ .

neque OT<sup>2</sup> =  $\frac{CS^2}{CS^2 - AS^2 \times PS^2 - AS^2 + CS^2}$

qui termini sunt omnes dati, hoc ergo  
 invento cætera ad Ellipsim pertinentia com-  
 modè inveniuntur.

In gratiam notæ sequentis, ex his va-  
 loribus







# PRINCIPIA MATHEMATICA. 517

ius ordinatæ singulo puncto E applicatæ sint æquales vi quâ corpus P à circulo cuius radius est E D trahitur; ea vis est

per Cor. 1. Prop. xc. ut  $z = \frac{PE}{PD}$ , sic C E

huius curvæ abscissa sumpta à puncto O (centro curvæ N K R M juxta notam 543. determinatæ) dicaturque z, ejus fluxio erit dz, fluxio itaque areæ curvæ quæ exhibet

vim sphaeroidis erit  $dz = \frac{PE}{PD} dz$ , cumque sit PE = PO - OE = PO - z & PD =

ER ordinatæ curvæ N K R M, per constructionem, sitque ER (ut facile deducitur ex n<sup>o</sup>. 543) =  $\frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}$ , fluxio

eius areæ erit  $dz = \frac{PO dz}{\frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}} + \frac{z dz}{\frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}}$

Terminorum positivorum  $dz + \frac{z dz}{\frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}}$

fluens est  $z = \frac{s}{s} \sqrt{ss - zz}$  (165) sed ut  $z =$

$OE$  &  $\frac{s}{s} \sqrt{ss - zz} = \frac{s}{s} \times \frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}$

$= \frac{ss}{ss} ER$  fluxio terminis positivis respondens

est  $OE - \frac{ss}{ss} ER$ , & area toti lineæ OA respondens est OA  $\frac{s^2}{s^2} AK$ , ex qua demenda

area parti OB respondens secundum quam curva quæ vim sphaeroidis exprimit non ducitur quæque est OB  $\frac{s^2}{s^2} BM$ , utque per

constructionem AK = AP, & BM = PB = BA + AP erit vera fluens OA - OB =

$\frac{s^2}{s^2} \times AB - BA - AP = AB - \frac{s^2}{s^2} AB$

$= AB \times \frac{s^2 + z^2}{s^2}$

Tertii termini  $\frac{PO dz}{\frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}}$  fluens sic invenitur, Sectoris Elliptici TOK fluxio est (124)

$\frac{1}{2} s^2 dz$  multiplicata per  $\frac{2 PO}{s^2}$  nascetur

terminus propositus  $\frac{PO dz}{\frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}}$  node fluens

termini propositi erit Sector ille Ellipticus TOK per  $\frac{2 PO}{s^2}$  multiplicatus, sed

quoniam area quaesita non respondet toti OA, sed tantum ejus parti AB, vera fluens areæ quaesitæ ex tertio termino inveniendo est sector TOK  $\times \frac{2 PO}{s^2}$  demp-

to sectore TOM  $\times \frac{2 PO}{s^2}$  five sector MOK  $\times \frac{2 PO}{s^2}$ ; Dividitur autem sector

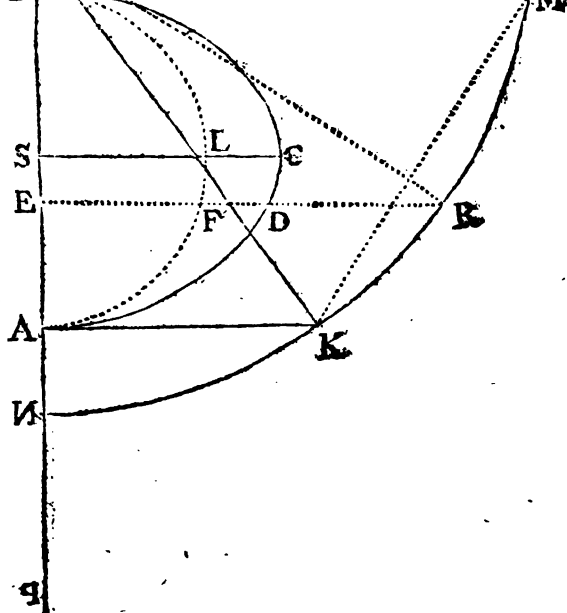
MOK in figuram rectilineam MOK & mixtilineam MRK; Triangulum MOK valet  $\frac{1}{2} PO \times AB$ , nam producat recta MK pertinet ad P, propter PA = AK & PB = BM, totam verò Triangulum OMP =  $\frac{1}{2} OP \times BM = \frac{1}{2} OP \times PB$ , & Triangulum OKP =  $\frac{1}{2} OP \times AK = \frac{1}{2} OP \times AP$ , unde sublato Triang. OKP ex Triang. OMP, remanet Triang. OMK

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROPOSITIO XI. PROBLEMA LV.

terminus propositus  $\frac{PO dz}{\frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}}$  node fluens

termini propositi erit Sector ille Ellipticus TOK per  $\frac{2 PO}{s^2}$  multiplicatus, sed

quoniam area quaesita non respondet toti OA, sed tantum ejus parti AB, vera fluens areæ quaesitæ ex tertio termino inveniendo est sector TOK  $\times \frac{2 PO}{s^2}$  demp-



to sectore TOM  $\times \frac{2 PO}{s^2}$  five sector MOK  $\times \frac{2 PO}{s^2}$ ; Dividitur autem sector

MOK in figuram rectilineam MOK & mixtilineam MRK; Triangulum MOK valet  $\frac{1}{2} PO \times AB$ , nam producat recta MK pertinet ad P, propter PA = AK & PB = BM, totam verò Triangulum OMP =  $\frac{1}{2} OP \times BM = \frac{1}{2} OP \times PB$ , & Triangulum OKP =  $\frac{1}{2} OP \times AK = \frac{1}{2} OP \times AP$ , unde sublato Triang. OKP ex Triang. OMP, remanet Triang. OMK

terminus propositus  $\frac{PO dz}{\frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}}$  node fluens

termini propositi erit Sector ille Ellipticus TOK per  $\frac{2 PO}{s^2}$  multiplicatus, sed

quoniam area quaesita non respondet toti OA, sed tantum ejus parti AB, vera fluens areæ quaesitæ ex tertio termino inveniendo est sector TOK  $\times \frac{2 PO}{s^2}$  demp-

to sectore TOM  $\times \frac{2 PO}{s^2}$  five sector MOK  $\times \frac{2 PO}{s^2}$ ; Dividitur autem sector

MOK in figuram rectilineam MOK & mixtilineam MRK; Triangulum MOK valet  $\frac{1}{2} PO \times AB$ , nam producat recta MK pertinet ad P, propter PA = AK & PB = BM, totam verò Triangulum OMP =  $\frac{1}{2} OP \times BM = \frac{1}{2} OP \times PB$ , & Triangulum OKP =  $\frac{1}{2} OP \times AK = \frac{1}{2} OP \times AP$ , unde sublato Triang. OKP ex Triang. OMP, remanet Triang. OMK

DE MO- =  $\frac{1}{2} OP \times PB - AP = \frac{1}{2} OP \times AB$ . Un-  
TU COR- de tandem fluens quaesita hujus tertii ter-  
PORUM. mini est  $\frac{2 PO}{s^2} \times \frac{1}{2} OP \times AB + \frac{2 PO}{s^2} \times$

LIBER PRIMUS.  $MRK = \frac{PO^2}{s^2} \times AB + \frac{2 PO}{s^2} \times MRK$ ,  
PROP. quæ detracta ex fluente terminorum positivo-

XCI. rum  $AB \times \frac{s^2 + s^2}{s^2}$  fit  $AB \times \frac{s^2 + s^2 - PO^2}{s^2}$   
PROBL. XLV.

$$= \frac{2 PO}{s^2} \times MRK, \text{ cum ergo sit } \frac{s^2 + s^2 - PO^2}{s^2} \\ = \frac{CS^2}{PS^2} \times \frac{PO}{PS} = \frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{PS^2} \times \frac{PS}{PS} \\ (543) \text{ est fluens quaesita (quia } AB = AS) \\ \frac{2 AS \times CS^2 - 2 PS \times MRK}{PS^2 - AS^2 + CS^2}.$$

Si autem curva ACB sit circulus, sphaeroidis in sphaeram veram mutatur, fit  
CS = AS & segmentum MRK fit  $\frac{2 AS^3}{3 PS}$   
(544) ideoque mutatur hæc formula in  
istam  $2 AS \times AS^2 = \frac{2 PS \times 2 AS^3}{3 PS}$

$$\frac{PS^2 - AS^2 + AS^2}{PS^2} = \frac{2 AS^3}{3 PS^2} \text{ quæ expri-}$$

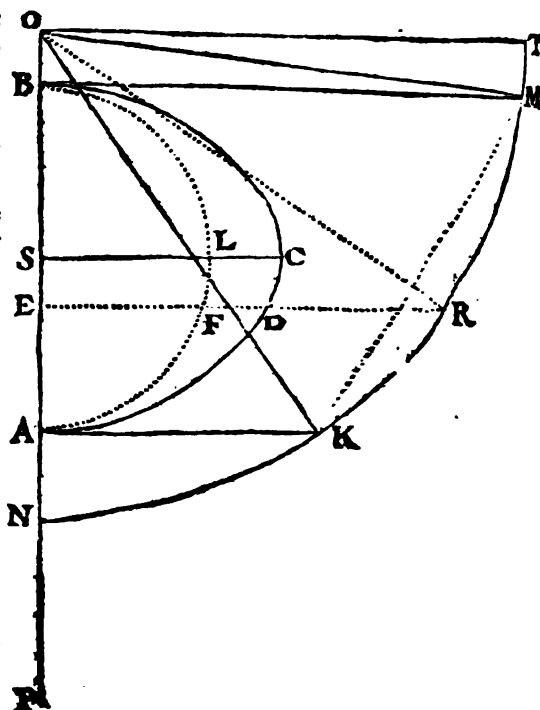
met vim sphaeræ; itaque divisa expressio-  
ne vis sphaeroidis & vis sphaeræ per com-  
munem multiplicatorem 2; Erit vis sphae-  
roidis ad vim sphaeræ ut  $\frac{AS \times CS^2 - PS \times MRK}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$

ad  $\frac{AS^3}{3 PS^2}$ . Q. E. D.

Restat etiam determinari vis sphaeræ,  
hoc calculo, sit ut prius PA = a, AB  
= 2b, abscissa AE = x, PF = v, erit PE<sup>2</sup>  
= a<sup>2</sup> + 2ax + xx, & EF<sup>2</sup> = 2bx - xx  
(ex naturâ circuli) ideoque PF<sup>2</sup> (vv)  
= a<sup>2</sup> + 2ax + 2bx, unde invenitur x =  
 $\frac{vv - a^2}{2a + b}$  & dx =  $\frac{v dv}{2a + b} = \frac{v dv}{a + b}$  & PE  
= a + x =  $\frac{a^2 + 2ab + vv}{2a + b}$  &  $\frac{dx}{PF} = \frac{dv}{a + b}$

Itaque, cum fluxio areæ quæ exprimit vim  
sphaeræ sit per Cor. I. Prop. xc. ut dx =  
PEdx, erit ea fluxio ut dx  $\frac{a^2 + 2ab + vv}{2a + b^2} dv$   
cujus fluens est x =  $\frac{a^2 v + 2abv + \frac{1}{3}v^3}{2a + b^2}$

+ Q const., quæ evanescere debet ubi x = 0



$$\& v = a \text{ ideoque est } \frac{a^3 + 2a^2b + \frac{1}{3}ab^3}{2 \times a + b^2}$$

$$+ Q = 0, \& Q = \frac{\frac{4}{3}a^3 + 2a^2b}{2 \times a + b^2}; \text{ Vis au-}$$

$$\text{tem totius Sphaeræ obtinetur si fiat } x = AB \\ (2b) \& v = PB (a + 2b), \text{ estque ideo } 2b + \\ \frac{4}{3}a^3 + 2a^2b - a - 4ab^2 - 4ab^3 - \frac{1}{3}a^3 - 2a^2b - 4ab^3 - \frac{1}{3}b^3 \\ \frac{2 \times a + b^2}{4a^2b + 8ab^2 + \frac{1}{3}b^3} = 2bx -$$

$$\frac{2a^2 + 4ab + \frac{1}{3}b^3}{2 \times a + b^2}, \& \text{ reducen-}$$

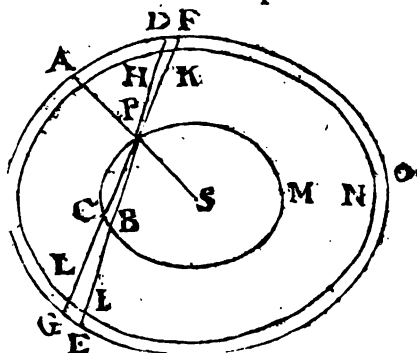
$$\text{do ad eundem denominatorem } = 2b \times \\ \frac{2a^2 + 4ab + 2b^2 - 2a^2 - 4ab - \frac{1}{3}b^3}{2 \times a + b^2}$$

$$= 2b \times \frac{\frac{2}{3}b^3}{2 \times a + b^2} \text{ sive ponendo } AS \text{ pro } b,$$

$$\& PS \text{ pro } a + b \text{ dividendoque numerato-}$$

$$\text{rem \& denominatorem per 2, vis tota} \\ \text{Sphaeræ est } \frac{2 AS^3}{3 PS^2}. \text{ Q. E. I.}$$

*Corol.* 3. Quod si corpusculum intra sphæroidem in axe col-  
 locetur, attractio erit ut ipsius distantia à centro. Id quod faci-  
 lius hoc argumento colligitur, siue particula in axe sit, siue in  
 aliâ quâvis diametro datâ. Sit  $AGO$  sphæroidis attrahens,  $S$  cen-  
 trum ejus, &  $P$  corpus attractum. Per corpus illud  $P$  agantur  
 tum semidiameter  $SPA$ , tum rectæ duæ quævis  $DE$ ,  $FG$   
 sphæroidi hinc inde occurrentes in  $D$  &  $E$ ,  $F$  &  $G$ ; sintque  
 $PCM$ ,  $HLN$  superficies sphæroidum duarum interiorum, ex-  
 teriori similium & concentricarum, quarum prior transeat per  
 corpus  $P$ , & secet rectas  $DE$  &  $FG$  in  $B$  &  $C$ , posterior se-  
 cet easdem rectas in  $H$ ,  $I$  &  $K$ ,  $L$ . Habeant autem sphæroi-  
 des omnes axem communem, & erunt rectarum partes hinc  
 inde interceptæ  $DP$  &  $BE$ ,  $FP$   
 &  $CG$ ,  $DH$  &  $IE$ ,  $FK$  &  $LG$   
 sibi mutuò æquales; (1) prop-  
 terea quod rectæ  $DE$ ,  $PB$  &  
 $HI$  bisecantur in eodem pun-  
 to, ut & rectæ  $FG$ ,  $PC$  &  
 $KL$ . Concipe jam  $DPF$ ,  $EPG$   
 designare conos oppositos, angu-  
 lis verticalibus  $DPF$ ,  $EPG$



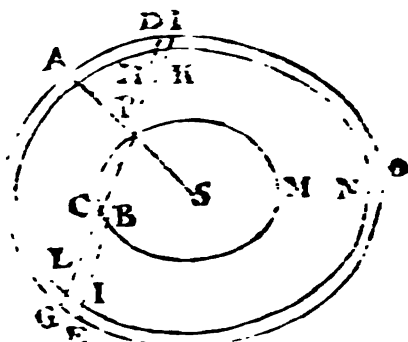
infinitè parvis descriptos, & lineas etiâ  $DH$ ,  $EI$  infinitè par-  
 vas esse; & conorum particulae sphæroidum superficiebus abscis-  
 sæ  $DHKE$ ,  $GLIE$ , ob æqualitatem linearum  $DH$ ,  $EI$ , (2)  
 erunt ad invicem ut quadrata distantiarum suarum à corpus-  
 culo

(1) Propterea quod rectæ  $DE$ ,  $PB$ ,  
 &c. Cum enim tres ellipses  $AGO$ ,  
 $HLN$ ,  $PCM$  similes sint, idemque cen-  
 trum & axes communes ac proinde com-  
 munes etiam diametros homologas habeant,  
 patet lineas  $DE$ ,  $HI$ ,  $PB$  esse in tribus  
 illis ellipsis ad communem diametrum  
 ordinatas, idemque dicendum esse de tri-  
 bus lineis  $FG$ ,  $KL$ ,  $PC$ . Nam si per  
 punctum  $A$ , in ellipsi  $AGO$  homologum  
 puncto  $P$  in ellipsi  $PCM$  ducta intelliga-  
 tur recta ipsi  $PB$ , seu  $DE$  parallela, hæc  
 linea ordinata erit ad eandem ellipsem

$AGO$  diametrum ad quam in ellipsi  $PCM$   
 ordinata est linea  $PB$ , atque adeò rectæ  
 $DE$ ,  $PB$  sunt ad eandem diametrum or-  
 dinatæ, idemque eodem modo de ca-  
 teris lineis ostendi potest. Quare ab il-  
 la communi diametro rectæ  $DE$ ,  $PB$ ,  
 &  $HI$ , bisecantur in eodem puncto, ut  
 & rectæ  $FG$ ,  $BC$ , &  $KL$  à suâ commu-  
 ni diametro.

(2) \* Erunt ad invicem &c. Si ex pun-  
 ctis  $D$  &  $E$  in lineam  $FG$  demissa in-  
 telligantur perpendiculara infinitè parva  $p$ ,  
 &  $p$ , hæc, ob angulos  $DPF$ ,  $EPG$ ,  
 æqua-

DE MO-CULO P, & propterea corpusculum  
TU COR- illud æqualiter trahent. Et pari  
POPUM. ratione, si superficiebus sphæroi-  
LIBER dum innumerarum similium con-  
PRIMIS. centricarum & axem communem  
PROP. habentium dividantur spatia *DPF*,  
XCI. *EGCB* in particulas, hæ omnes  
PROBL. utrinque æqualiter trahent corpus  
XLV.



*EGCB* in particulas, hæ omnes  
utrinque æqualiter trahent corpus  
*P* in partes contrarias. Æquales igitur  
sunt vires conici *DPF* & segmenti conici *EGCB*, & per con-  
trarietatem se mutuo destruunt. Et par est ratio virium ma-  
terix omnis extra sphæroidem intimam *PCBM*. Trahitur igitur  
corpus *P* à sola sphæroide intima *PCBM*, & propterea  
(*per corol. 3. prop. LXXII.*) attractio ejus est ad vim, quæ cor-  
pus *A* trahitur a sphæroide tota *AGOD*, ut distantia *PS* ad  
distantiam *AS*. *Q. E. D.*

## PROPOSITIO XCII. PROBLEMA XLVI.

*Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium cen-  
tripetarum in ejus puncta singula tendentium.*

E corpore dato formanda est sphaera vel cylindrus aliave figu-  
ra regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi con-  
gruens (*per prop. LXXX. LXXXI. & XCI.*) (a) inveniri potest.  
Dein factis experimentis invenienda est vis attractionis in diver-  
sis

æquales, erunt ut distantix *DP*, *EP*,  
Sed quoniam evanescentibus angulis *DPF*,  
*IPG*, lineæ *DH*, *IK* & *GL*, *EI*, sunt  
parallelæ, erit superficies *DHKF*, ad su-  
perficiem *GLIE*, ut rectangulum  $p \times$   
 $\frac{DH + FK}{2}$ , ad rectangulum  $p \times \frac{GL + EI}{2}$ ,  
hoc est, (ob *DH + FK = LG + EI*)  
ut  $p$  ad  $P$ , seu ut *DP* ad *EP*. Quare  
si *LPF*, *EPG* conos vel pyramides in  
sphæroide *AGO* designent, solida *DHKF*,  
*GLIE* erunt ut superficies prædictæ in perpen-  
dicula perpendicularis  $p$ ,  $P$ , similia ductæ, hoc

est, ut quadrata distantiarum *DP*, *EP*. Quo-  
niam igitur vis quæ particula solida *DHKF*  
trahit corpusculum *P* est ad vim quæ illud  
trahitur à particula solida *GLIE*, ut solidum  
 $\frac{DHKF}{DP^2}$ , ad solidum  $\frac{GLIE}{EP^2}$ , hoc est,  
ut  $\frac{DP^2}{DP^2}$ , ad  $\frac{EP^2}{EP^2}$ , manifestum est cor-  
pusculum *P* utrinque æqualiter trahi.

(a) *Inveniri potest.* Hoc est per pro-  
positiones citatas inveniri potest genera-  
lis expressio seu formula attractionis cor-  
puscu-

## 521

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XCII.  
PROB.  
XLVL

PRO-

[illegible]

ut  $\frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{xdx}{y^{n-1}} = \frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{ydy}{y^{n-1}} =$   
 $x^{2-n}dx - y^{2-n}dy$ ; cujus fluens =  
 $\frac{x^{3-n}}{3-n} - \frac{y^{3-n}}{3-n} + Q \text{ const.}$ ; hæc autem eva-

uefcit, ubi  $x = a$ , &  $y = b$ ; Quare erit  
 $Q = b; - n - a; - a$ , & fluens accurata =  
 $b; - n - a; - n + c; - n - c; - a$ , ubi  $x$

$$= e, \text{ \& } y = e. \text{ Iam verò vis quæ corpusculum P in totum cylindrum ADEKG trahitur, experimentis inventa sit ut } b - a + c - e, \text{ \& habebitur æquatio } \frac{b - a + c - e}{3 - n}, \text{ ex}$$

quā determinandus est valor indicis generalis  $n$ . Porro posito  $n = 2$ , æqualia sunt æquationis membra, ergo vis in singulas cylindri particulas tendens erit reciprocè ut quadratum distantie à particulâ, quemadmodum in *cor. 1. prop. XCI.* positum est. Verùm si hâc ratione, varios tentando numeros, non potest indicis generalis  $n$  valor inveniri, ponatur  $3 - n = z$ , & vis corpusculi in cylindrum experimentis reperta sit ut quantitas  $q$ ; & erit  $qz = bz - az + cz - ez$ . Fiat  $az = p$ ,  $bz = v$ ,  $cz = r$ ,

$e^z = r$ , & erit (  $L$  significante Logarithmum )  $L. a^z = L. p$ ,  
 $L. b^z = L. v$ ,  $L. c^z = L. r$ ,  $L. e^z = L. s$ , adeo-  
 que  $z L. a = L. p$ , &  $z = \frac{L. p}{L. a} = \frac{L. v}{L. b} = \frac{L. r}{L. c}$

$$= \frac{L.s}{L.e}. \text{ Unde } \frac{L.a \times L.v}{L.b} = L.p, \text{ atque}$$

adeo  $\frac{L.b}{L.a} = \frac{L.p}{L.c}$ , proindeque  $\frac{L.b}{L.a} = \frac{L.p}{L.c}$

$= p$ , & simili modo invenietur  $\overline{vL.b} = r$ ;  
L. e

&  $\frac{L. e}{L. a} = s.$  Quare æquatio erit  $\frac{q. L. v}{L. b}$

$= v - v \overline{L.b} + v \overline{L.b} - v \overline{L.b}$ , quæ ab  
 exponente indeterminata libera est. Ut au-  
 tem tollatur etiam  $L.v$ , ponatur  $v = t + 1$ ,  
 & (383) erit  $L.v = L.t + 1 = t - \frac{1}{2}t +$   
 $\frac{1}{3}t - \frac{1}{4}t + \frac{1}{5}t - \&c.$  in infinit. Si ita-  
 que in æquatione modo inventa loco  $v$  scri-  
 batur  $t + 1$ , & loco  $L.v$  series  $t - \frac{1}{2}t +$   
 $\frac{1}{3}t - \frac{1}{4}t - \&c.$  cūñebitur æquatio ab expo-  
 nentibus & logarithmis indeterminatis li-  
 bera, ex quâ per reversionem serierum in-  
 venietur valor quantitatis  $t$ , & inde repe-  
 rietur  $L.v$ , atque per  $L.v$  habebitur va-  
 lor

Y y y



Sphaeroidis centrum S & semidiameter maxima SC: & vis, quâ DE Mo-  
sphæ-TU COR-  
FORUM.

lorem quantitatis  $\frac{s^2 + s^2 - PO^2}{s^2}$  deter-  
minabimus, quam esse æqualem quantitati  
 $\frac{CS^2}{CS^2}$

$\frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{CS^2}$ , ita ex valoribus su-

pra inventis statuitur; Est  $s = \frac{bb^2}{c^2 - b^2}$  ex

tertiâ Equatione, unde erit  $s^2 + s^2 =$   
 $\frac{b^2 s^2 + c^2 s^2 - b^2 s^2}{c^2 s^2} = \frac{c^2 - b^2}{c^2}$ , ideoque

$\frac{s^2 + s^2}{c^2} = \frac{CS^2}{CS^2}$

$\frac{s^2}{c^2 - b^2} = \frac{CS^2 - AS^2}{CS^2}$ . Est

verò AO = s - p, & PO = PA + AO

= a + s - p, & cum sit s - p =  $\frac{b}{c}$  ×

$\frac{ba + cc}{b}$  (ex secundâ Equatione) est PO

= a +  $\frac{cc - bb}{cc - bb}$  ×  $\frac{ba + cc}{b}$ , quo valore

reducto ad communem denominatorem,

deletisque terminis sese destruentibus est

PO =  $\frac{cc}{c^2 - b^2} \times a + b$  five =  $\frac{CS^2 - AS^2}{CS^2}$

× PS, cūque sit  $s^2 = \frac{CS^2 - AS^2}{CS^2}$

$\frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{CS^2}$  est  $\frac{PO}{PS} = \frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{PS^2}$

&  $\frac{PO^2}{s^2} = \frac{CS^2 - AS^2}{CS^2} \times \frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{PS^2}$

Unde tandem est  $\frac{s^2 + s^2 - PO^2}{s^2} = \frac{CS^2 - AS^2}{CS^2}$

$\frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} \times \frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{PS^2}$ , five

$\frac{CS^2 - AS^2}{CS^2} \times \frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{PS^2}$

reducendoque ad eundem denominato-

rem, deletisque terminis sese destruentibus

=  $\frac{CS^2 - AS^2}{CS^2} \times \frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{PS^2}$

diviso numeratore &

denominatore per  $CS^2 - AS^2$ . Est ergo

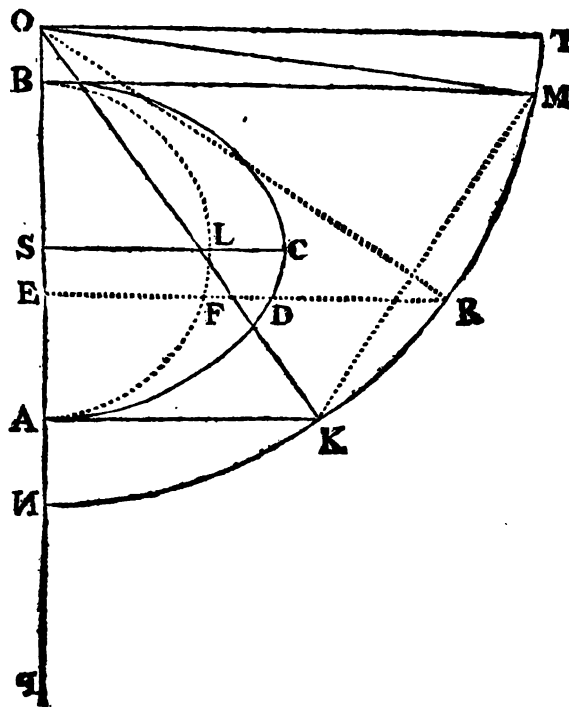
$\frac{s^2 + s^2 - PO^2}{s^2} = \frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{PS^2}$

Q. E. D.

544. Sit autem curva data ACB cir-  
culus, ita ut sphaeroidis ejus convolutione  
genita, sit accurata sphaera, erit curva

NKRM Parabola, stantibus enim quæ in  
no. 542. dicta sunt, erit ut prius PE = a + x, LIBER  
& ex naturâ Circuli EP² = 2bx - xx, unde PRIMUS.  
erit PF² quadratum = PE² + EF² = PROP.  
a² + 2ax + xx + 2bx - xx = a² + 2ax + 2bx; XCI.  
cum ergo ordinata ER ad curvam NKRM PROBL.

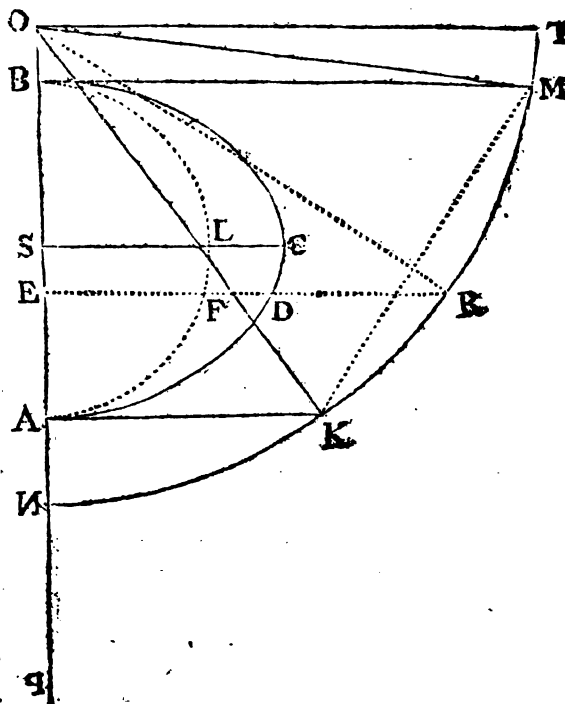
XLV.



sumatur æqualis PF, ejus ordinatæ qua-  
dratum erit æquale abscissæ ipsi per quan-  
titates constantes ductæ, sed ultra primum  
gradum non affingenti, quæ est Parabolæ  
proprietas. Dicatur ergo ejus Parabolæ  
latus rectum l, distantia verticis N à ver-  
tice A curvæ ACB dicatur p, abscissâ NE  
erit p + x & ex Parabolæ natura erit or-  
dinatæ ER quadratum = lp + lx conse-  
ratur hic valor cum valore ejusdem ER a  
supra invento 2a + 2ax + 2bx, termini  
constantes cum constantibus & qui varia-  
bilem includunt cum similibus, fient duæ  
Equationes lp = a², & l = 2a + 2b = 2PS,  
Ttt 2 ideo-







DE MO- =  $\frac{1}{2} OP \times PB - AP = \frac{1}{2} OP \times AB$ . Un-  
TU COR- de tandem fluens quantitas hujus tertii ter-  
PORUM. mini est  $\frac{2PO}{s^2} \times \frac{1}{2} OP \times AB + \frac{2PO}{s^2} \times$

LIBER

PRIMUS.  $MRK = \frac{PO^2}{s^2} \times AB + \frac{2PO}{s^2} \times MRK$ ,  
PROP.

X C I. quæ detracta ex fluente terminorum positivo-

PROBL. rum  $AB \times \frac{s^2 + s^2}{s^2}$  fit  $AB \times \frac{s^2 + s^2 - PO^2}{s^2}$

XLV.  $-\frac{2PO}{s^2} \times MRK$ , cum ergo fit  $\frac{s^2 + s^2 - PO^2}{s^2}$

$$= \frac{CS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2} \& \frac{PO}{PS} = \frac{PS}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$$

(543) est fluens quantitas (quia  $AB = 2AS$ )  
 $2AS \times CS^2 - 2PS \times MRK$ .

Si autem curva  $ACB$  sit circulus,  
sphaeris in sphaeram veram mutatur, fit  
 $CS = AS$  & segmentum  $MRK$  fit  $\frac{2AS^2}{3PS}$   
 (544) adeoque mutatur hæc formula in  
 istam  $2AS \times AS^2 = \frac{2PS \times 2AS^2}{3PS}$

$$= \frac{PS^2 - AS^2 + AS^2}{PS^2} = \frac{2AS^2}{3PS^2}$$

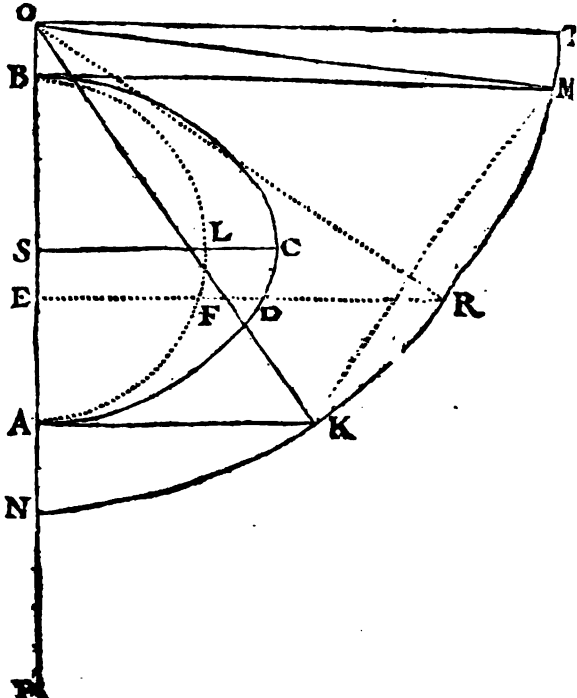
quæ expri-

met vim sphaeræ; itaque divisa expressio-  
ne vis sphaeroidis & vis sphaeræ per com-  
munem multiplicatorem 2; Erit vis sphae-  
 $\frac{AS \times CS^2 - PS \times MRK}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$

ad  $\frac{AS^2}{3PS^2}$ . Q. E. D.

Rotest etiam determinari vis sphaeræ,  
hoc calculo, sit ut prius  $PA = a$ ,  $AB = 2b$ ,  
abscissa  $AE = x$ ,  $PF = v$ , erit  $PE^2 = a^2 + 2ax + xx$ ,  
&  $EF^2 = 2bx - xx$  (ex naturâ circuli) ideoque  $PF^2 (vv) = a^2 + 2ax + 2bx$ ,  
unde invenitur  $x = \frac{vv - a^2}{2v}$  &  $dx = \frac{v dv}{2 \times a + b} = \frac{v dv}{a + b}$  &  $PE$   
 $= a + x = \frac{a^2 + 2ab + vv}{2 \times a + b}$  &  $\frac{dx}{PF} = \frac{dv}{a + b}$

Itaque, cum fluxio areæ quæ exprimit vim  
sphaeræ sit per Cor. 1. Prop. xc. ut  $dx = \frac{PE dx}{PF}$ ,  
erit ea fluxio ut  $dx = \frac{a^2 + 2ab + vv}{2 \times a + b^2} dv$   
cujus fluens est  $x = \frac{a^2 v + 2abv + \frac{1}{3}v^3}{2 \times a + b^2}$   
 $+ Q \text{ const.}$ , quæ evanescere debet ubi  $x = 0$



$$\& v = a \text{ ideoque est } -\frac{a^3 + 2a^2b + \frac{1}{3}a^3}{2 \times a + b^2}$$

$$+ Q - 0, \& Q = \frac{\frac{4}{3}a^3 + 2a^2b}{2 \times a + b^2} : \text{Vis au-}$$

tem totius Sphaeræ obinetur si fiat  $x = AB$   
( $2b$ ) &  $v = PB (a + 2b)$ , estque ideo  $2b +$   
 $\frac{4}{3}a^3 + 2a^2b - a - 4ab^2 - 4ab^2 - \frac{1}{3}a^3 - 2a^2b - 4ab^2 - \frac{8}{3}b^3$

$$= 2b - \frac{4a^2b + 8ab^2 + \frac{8}{3}b^3}{2 \times a + b^2} = 2b \times \frac{2 \times a + b^2}{2 \times a + b^2} - \frac{2a^2 + 4ab + \frac{4}{3}b^2}{2 \times a + b^2}, \& \text{redacen-}$$

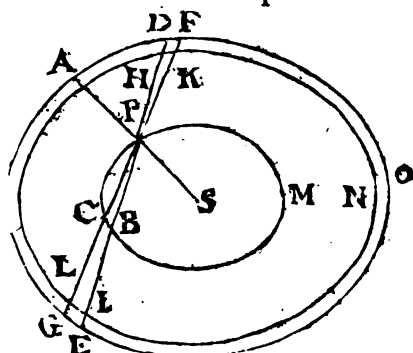
$$\text{do ad eundem denominatorem} = 2b \times \frac{2 \times a + b^2}{2 \times a + b^2} - \frac{2a^2 + 4ab + 2b^2 - 2a^2 - 4ab - \frac{4}{3}b^2}{2 \times a + b^2}$$

$$= 2b \times \frac{\frac{2}{3}b^2}{2 \times a + b^2} \text{ sive ponendo } AS \text{ pro } b;$$

&  $PS$  pro  $a + b$  dividendoque numero-  
rem & denominatorem per 2, vis tota

$$\text{Sphaeræ est } \frac{2AS^2}{3PS^2}. \text{ Q. E. I.}$$

*Corol.* 3. Quod si corpusculum intra sphæroidem in axe collo-  
cetur, attractio erit ut ipsius distantia à centro. Id quod faci-  
lius hoc argumento colligitur, siue particula in axe sit, siue in  
aliâ quâvis diametro datâ. Sit  $AGO$  sphæroidis attrahens,  $S$  cen-  
trum ejus, &  $P$  corpus attractum. Per corpus illud  $P$  agantur  
tum semidiameter  $SPA$ , tum rectæ duæ quævis  $DE$ ,  $FG$   
sphæroidi hinc inde occurrentes in  $D$  &  $E$ ,  $F$  &  $G$ ; sintque  
 $PCM$ ,  $HLN$  superficies sphæroidum duarum interiorum, ex-  
teriori similium & concentricarum, quarum prior transeat per  
corpus  $P$ , & secet rectas  $DE$  &  $FG$  in  $B$  &  $C$ , posterior se-  
cet easdem rectas in  $H$ ,  $I$  &  $K$ ,  $L$ . Habeant autem sphæroi-  
des omnes axem communem, & erunt rectarum partes hinc  
inde interceptæ  $DP$  &  $BE$ ,  $FP$   
&  $CG$ ,  $DH$  &  $IE$ ,  $FK$  &  $LG$   
sibi mutuò æquales; (y) prop-  
tèrea quod rectæ  $DE$ ,  $PB$  &  
 $HI$  bisecantur in eodem punc-  
to, ut & rectæ  $FG$ ,  $PC$  &  
 $KL$ . Concipe jam  $DPF$ ,  $EPG$   
designare conos oppositos, angu-  
lis verticalibus  $DPF$ ,  $EPG$



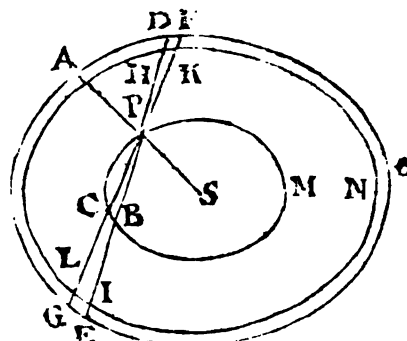
infinîtè parvis descriptos, & lineas etiâ  $DH$ ,  $EI$  infinîtè par-  
vas esse; & conorum particulæ sphæroidum superficiebus abscissæ  
 $DHKF$ ,  $GLIE$ , ob æqualitatem linearum  $DH$ ,  $EI$ , (z)  
erunt ad invicem ut quadrata distantiarum suarum à corpuscu-  
lo

(y) *Proptèrea quod rectæ  $DE$ ,  $PB$ ,  
&c.* Cum enim tres ellipses  $AGO$ ,  
 $HLN$ ,  $PCM$  similes sint, idemque cen-  
trum & axes communes ac proindè com-  
munes etiâ diametros homologas habeant,  
patet lineas  $DE$ ,  $HI$ ,  $PB$  esse in tribus  
illis ellipsis ad communem diametrum  
ordinatas, idemque dicendum esse de tri-  
bus lineis  $FG$ ,  $KL$ ,  $PC$ . Nam si per  
punctum  $A$ , in ellipsi  $AGO$  homologum  
puncto  $F$  in ellipsi  $PCM$  ducta intelliga-  
tur recta ipsi  $PB$ , seu  $DE$  parallela, hæc  
linea ordinatæ erit ad eandem ellipses

$AGO$  diametrum ad quam in ellipsi  $PCM$   
ordinata est linea  $PB$ , atque adeò rectæ  
 $DE$ ,  $PB$  sunt ad eandem diametrum or-  
dinatæ, idemque eodem modo de ca-  
teris lineis ostendi potest. Quare ab il-  
lâ communi diametro rectæ  $DE$ ,  $PB$ ,  
&  $HI$ , bisecantur in eodem puncto, ut  
& rectæ  $FG$ ,  $BC$ , &  $KL$  à suâ commu-  
ni diametro.

(z) \* *Erunt ad invicem &c.* Si ex pun-  
ctis  $D$  &  $E$  in lineam  $FG$  demissa in-  
telligantur perpendiculara infinîtè parva  $p$   
&  $p'$ , hæc, ob angulos  $DPF$ ,  $EPG$ ,  
æqua-

DE Mo- culo  $P$ , & propterea corpusculum  
TU COR- illud æqualiter trahent. Et pari  
PORUM. ratione, si superficiebus sphæroi-  
LIBER dum innumerarum similium con-  
PRIMUS. centricarum & axem communem  
XCII. habentium dividantur spatia  $DPF$ ,  
PROBL.  $EGCB$  in particulas, hæ omnes  
XLV. utrinque æqualiter trahent corpus



$P$  in partes contrarias. Æquales igitur sunt vires conii  $DPF$  & segmenti conici  $EGCB$ , & per contrarietatem se mutuo destruunt. Et par est ratio virium materiæ omnis extra sphæroidem intimam  $PCBM$ . Trahitur igitur corpus  $P$  à sola sphæroide intimâ  $PCBM$ , & propterea (per corol. 3. prop. LXXII.) attractio ejus est ad vim, quâ corpus  $A$  trahitur à sphæroide totâ  $AGOD$ , ut distantia  $PS$  ad distantiam  $AS$ . Q. E. D.

### PROPOSITIO XCII. PROBLEMA XLVI.

*Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium.*

E corpore dato formanda est sphaera vel cylindrus aliave figura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per prop. LXXX. LXXXI. & XCI.) (a) inveniri potest. Dein factis experimentis invenienda est vis attractionis in diversis

æquales, erunt ut distantia  $DP$ ,  $EP$ , Sed quoniam evanescentibus angulis  $DPF$ ,  $EPG$ , lineæ  $DH$ ,  $FK$  &  $GL$ ,  $EL$  sunt parallelæ, erit superficies  $DHKF$ , ad superficiem  $GLIE$ , ut rectangulum  $p \times DH + FK$ , ad rectangulum  $p \times GL + EI$ , hoc est, (ob  $DH + FK = LG + EI$ ) ut  $p$  ad  $P$ , seu ut  $DP$  ad  $EP$ . Quare si  $DPF$ ,  $EPG$  conos vel pyramides in sphæroide  $AGO$  designent, solida  $DHKF$ ,  $GLIE$  erunt ut superficies prædictæ in perpendicularibus  $p$ ,  $P$ , similia ductæ, hoc

est, ut quadrata distantiarum  $DP$ ,  $EP$ . Quoniam igitur vis quâ particula solida  $DHKF$  trahit corpusculum  $P$  est ad vim quâ illud trahitur à particula solida  $GLIE$ , ut solidum  $DHKF$ , ad solidum  $GLIE$ , hoc est,  $\frac{DP^2}{EP^2}$ , ad  $\frac{EP^2}{EP^2}$ , manifestum est corpusculum  $P$  utrinque æqualiter trahi.

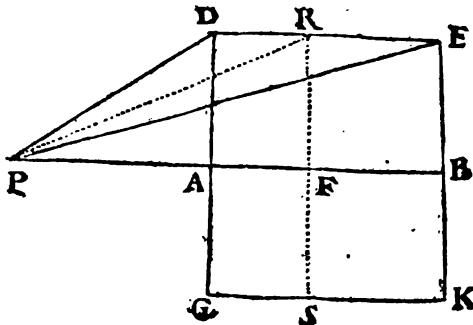
(a) *Inveniri potest.* Hoc est per propositiones citatas inveniri potest generalis expressio seu formula attractionis corpusculi

## PRINCIPIA MATHEMATICA. 521

fit distantius, & lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium singularum, quam invenire oportuit.

**PRO-**

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XCII.  
PROB.  
XLVI.



pulculi in sphaeram vel cylindrum aliamve figuram regularem, & lex attractionis corporculi in eandem figuram experimentis inventa conferri debet cum generali illa formula, & inde habebitur æquatio cujus ope determinari poterit formulæ generalis exponens indeterminata, quæ exhibebit attractionem in singulas particulas materiæ.

*Exemplum.* In cylindrum ADEKG trahatur corpusculum P, frum in ejus axe AB, ut in prop. XCI; supponaturque vis in singulas cylindri particulas tendens reciproce ut distantie dignitas cujus index n, & dicatur PA = a, PD = b, PB = c, PE = e, RF = g, PF = x, PR = y, eritque  $yy = xx + gg$ , et ideoque  $y dy = x dx$ . Quare fluxio vis qua corpusculum P in cylindrum A D R S G trahitur, erit ( § 41 )

ut  $\frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{x dx}{y^{n-1}} = \frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{y dy}{y^{n-1}} =$   
 $\frac{x^2 - n dx - y^2 - n dy}{x^{1-n} y^{1-n}} + Q \text{ const.}$ ; hanc autem eva-

$Q = b; - \frac{n}{a} - a; - \frac{n}{a}, \& \text{fluens accurata} =$   
 $b; - \frac{n}{a} - a; - \frac{n}{a} + c; - \frac{n}{a} - e; - \frac{n}{a}, \text{ubi } x$

3 — n

= c, & y = e. Iam verò vis quæ corpusculum P in totum cylindrum A D E K G trahitur, experimentis inventa sit ut  $b - a + c - e$ , & habebitur æquatio  $b - a + c - e = \frac{b}{1} - \frac{a}{1} + \frac{c}{1} - \frac{e}{1}$ , ex

quā determinandus est valor indicis generalis  $n$ . Porro posito  $n = 2$ , æqualia fiunt æquationis membra, ergo vis in singulas cylindri particulas tendens erit reciproce ut quadratum distantie à particulâ, quemadmodum in *cor. 1. præp. XCI.* positum est. Verùm si hac ratione, varios tentando numeros, non potest indicis generalis  $n$  valor inveniri, ponatur  $3 - n = z$ , & vis corpusculi in cylindrum experimentis reperta sit ut quantitas  $q$ ; & erit  $q z = b^z - a^z + c^z - e^z$ . Fiat  $a^z = p$ ,  $b^z = v$ ,  $c^z = r$ ,

**Tona. I.**

$e^z = r$ , & erit (  $L$  significante Logarithmura  
quantitatis cui præfigitur )  $L. a^z = L. p$ ,  
 $L. b^z = L. v$ ,  $L. c^z = L. r$ ,  $L. e^z = L. s$ , adeo-  
que  $z L. a = L. p$ , &  $z = \frac{L. p}{L. a} = \frac{L. v}{L. b} = \frac{L. r}{L. c}$

$$= \frac{L.s}{L.e}. \text{ Unde } \frac{L.a \times L.v}{L.b} = L.p, \text{ aique}$$

adeo  $L. v \frac{L. b}{L. a} = L. p$ , proindeque  $v \frac{L. b}{L. a}$

$\equiv p$ , & simili modo invenietur  $\overline{vL.b} \equiv r$ ;  
L. 6

&  $v \frac{L. s}{L. a} = s.$  Quare æquatio erit  $\frac{q. L. v}{L. b}$

$= v - v.L.b + v.L.b - v.L.b$ , quæ ab  
 exponente indeterminata libera est. Ut au-  
 tem tollatur etiam  $L.v$ , ponatur  $v = 1 + \frac{1}{2}x$ ,  
 & (383) erit  $L.v = L.1 + 1 = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x$   
 $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 - \&c.$  in infinitum. Si ita-  
 que in æquatione modo inventa loco  $v$  scri-  
 batur  $1 + \frac{1}{2}x$ , & loco  $L.v$  series  $1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x$   
 $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 - \&c.$  obinebitur æquatio ab expo-  
 nentibus & logarithmibus indeterminatis li-  
 bera, ex quâ per reversionem ferierum in-  
 veniatur valor quantitatis  $x$ , & inde repe-  
 rietur  $L.v$ , atque per  $L.v$  habebitur va-

**Y y y**

10

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

LIBER

PRIMUS.

PROP.

XCIII.

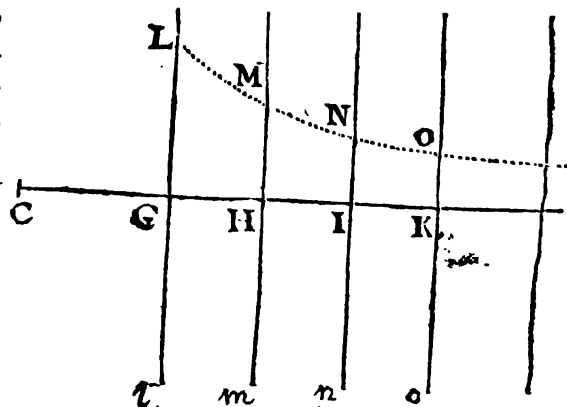
THEOR.

XLVII.

## PROPOSITIO XCIII. THEOREMA XLVI

*Si solidum ex unâ parte planum ex reliquis autem partibus in-  
tum, constet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, q-  
rum vires in recessu à solido decrescunt in ratione potestatis  
jusvis distantiarum plusquam quadraticæ, & vi solidi totius c-  
pusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: d-  
quod solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie pl-  
nâ, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia co-  
pusculi à plano, & index ternario minor quam index potesta-  
distantiarum.*

*Cas. 1. Sit  $LGL$  planum quo solidum terminatur. Jace  
solidum autem ex parte plani hujus versus  $L$ , inque plana innumeri  
 $m HM$ ,  $n IN$ ,  $o KO$ ,  
&c. ipsi  $GL$  parallela  
resolvatur. Et primo  
collocetur corpus attrac-  
tum  $C$  extra solidum.  
Agatur autem  $CGHI$   
planis illis innumeri  
perpendicularis, & de-  
crescant vires attracti-  
væ punctorum solidi in  
ratione potestatis distan-  
tiarum, cujus index sit numerus  $n$  ternario non minor. Ergo  
(per*



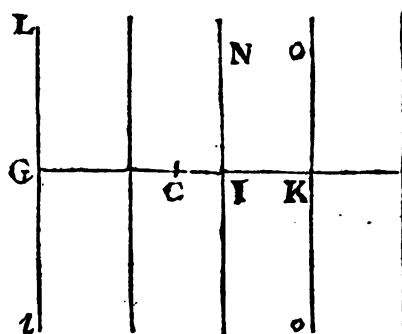
lor indicis  $x$ , & inde valor ipsius  $n$ . Nam  
cum sit  $z = \frac{L \cdot v}{L \cdot a}$ , &  $L \cdot v = L \cdot t + 1$ , erit  
 $z = \frac{L \cdot t + 1}{L \cdot a}$ , &  $n = 3 - z = 3 - \frac{L \cdot t + 1}{L \cdot a}$ .

Si in æquatione vel quantitate exponen-  
tiali proposita, indeterminata  $x$  in solis

quantitatum datarum exponentibus reperire-  
tur, hæc æquatio vel quantitas superiori  
methodo posset ad aliam reduci numero  
terminorum finitam, in qua nulla esset an-  
plius exponents vel logarithmus indetermina-  
ta. Nam si  $q = f a^x + g b^x + h c^x$   
+ &c., sitque  $v = a^z$  erit  $b = f v +$   
 $2 L$ .

(per corol. 3. prop. xc.) vis, quâ planum quodvis  $mHM$  tra- DE Mo-  
hit punctum  $C$ , (b) est reciprocè ut  $CH^n - 2$ . In plano  $mHM$  TU COR-  
capiatur longitudo  $HM$  ipsi  $CH^n - 2$  reciproce proportionalis, PORUM.  
& erit vis illa ut  $HM$ . Similiter in planis singulis  $lGL$ , LIBER  
 $nIN$ ,  $oKO$ , &c. capiuntur longitudines  $GL$ ,  $IN$ ,  $KO$ , PRIMUS.  
&c. ipsis  $CG^{n-2}$ ,  $CI^{n-2}$ ,  $CK^{n-2}$ , &c. reciprocè proportio- PROP.  
nales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudines cap- THEOR.  
tæ, ideoque summa virium ut summa longitudinum, hoc est, XLVII.  
vis solidi totius ut area  $GLOK$  in infinitum versus  $OK$  pro-  
ducta. Sed area illa (per notas quadraturarum methodos) est  
reciprocè ut  $CG^n - 3$ , & propterea vis solidi totius est recipro-  
cè ut  $CG^n - 3$ . Q. E. D.

Def. 2. Collocetur jam cor-  
pusculum  $C$  ex parte plani  $lGL$   
intra solidum, & capiatur distan-  
tia  $CK$  æqualis distantiae  $CG$ .  
Et solidi pars  $LGloKO$ , planis  
parallelis  $lGL$ ,  $oKO$  termina-  
ta, corpusculum  $C$  in medio situm  
nullam in partem trahet, con-  
trariis oppositorum punctorum  
actionibus se mutuò per æquali-  
tatem tollentibus. Proinde corpusculum  $C$  solâ vi solidi ultra pla-  
num



$$\begin{aligned} & \frac{2Lb}{L.a} + \frac{4Lc}{L.v} + \&c. \text{ erit enim } x = \\ & \frac{L.v}{L.a} \& b^2 = b^2 \frac{L.v}{L.a} \& Lb^2 = \frac{2L.v}{L.a} L.b \\ & = \frac{2L.b}{L.a} L.v, \text{ unde est } b^2 = \frac{L.b}{L.a} \\ & \& \text{ sic de cæteris.} \end{aligned}$$

(b) Est reciprocè &c. Sit  $CH = x$ , erit  
 $MH$  ut  $\frac{1}{x^{n-2}}$ , (Hyp.) & areæ  $GLMH$ ,  
elementum ut  $\frac{dx}{x^{n-2}}$ , adeoque (165) area

ipsa ut  $Q \text{ const. } \frac{1}{(n-3)x^{n-1}}$ , quæ evanescit  
ubi  $x = CG$ , Quare  $Q = \frac{1}{(n-3)CG^{n-1}}$ ,  
& area  $GLMH$ , ut  $\frac{1}{(n-3)CG^{n-1}}$   
 $= \frac{1}{(n-3)CH^{n-1}}$ . At cum  $CH$  infi-  
nita evadit, terminus  $\frac{1}{(n-3)GH^{n-1}}$   
evanescit sitque area infinita  $GLOK$ , ut  
 $\frac{1}{(n-3)CG^{n-1}}$ , seu ob datam  $n - 3$   
ut  $CG = -1$ , reciprocè.  
V.V.V.



DE MO- num  $OK$  siti trahitur. Hæc au-  
TU COR- tem vis ( per casum primum ) est  
FORUM. reciprocè ut  $CK^n - 3$ , hoc est  
LIBER ( ob æquales  $CG$ ,  $CK$  ) recipro-  
PRIMUS. cè ut  $CG^n - 3$ . Q. E. D.  
PROP. Corol. 1. Hinc si solidum

XCIII.  $LGIN$  planis duobus infinitis pa-

THEOR. rallelis  $LG$ ,  $IN$  utrinque termi-  
XLVII. netur; (c) innotescit ejus vis attra-

ctiva, subducendo de vi attra-  
ctivâ solidi totius infiniti  $L G K O$  vim attractivam partis ulterio-  
ris  $NIKO$ , in infinitum versus  $KO$  productæ.

Corol. 2. Si solidi hujus infiniti pars ulterior, quando at-  
tractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius pe-  
ne est momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris au-  
gendo distantiam (d) decrescet quàm proximè in ratione po-  
testatis  $CG^n - 3$ .

Corol. 3. Et hinc si corpus quodvis finitum & ex unâ par-  
te planum trahat corpusculum è regione medii illius plani, &  
distantia inter corpusculum & planum collata cum dimensionibus  
corporis attrahentis perexigua sit, constet autem corpus attra-  
hens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decref-  
cunt in ratione potestatis cujusvis plusquam quadrupl. catæ distan-  
tiarum; vis attractiva corporis totius decrescet quàmproximè in

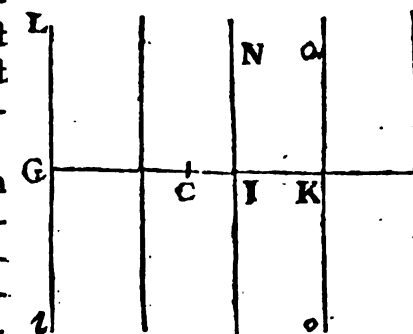
ra-

(c) \* Innotescit ejus vis &c. Ex demon-  
stratis attractio solidi totius  $L G K O$ , in  
infinitum versus  $O$  producti, est ut  $\frac{1}{CG^n - 3}$ .

solidi verò infiniti  $NIKO$ , ut  $\frac{1}{CI^n - 3}$ .  
Quare attractio solidi  $L G I N$ , est ut

$$\frac{1}{CG^n - 3} - \frac{1}{CI^n - 3}.$$

(d) \* Decrescet quàm proximè &c. Vis  
enim attractiva, si corpus infinitum sit, est  
ut  $\frac{1}{CG^n - 3} - \frac{1}{CI^n - 3}$ ; sed si perexi-  
gua sit distantia  $CQ$  respectu  $CI$ , ter-



minus  $\frac{1}{CI^n - 3}$ , minimus erit respectu

termini  $\frac{1}{CG^n - 3}$  & negligi poterit, ideo-  
que attractio erit quàm proximè ut  $CG^n - 3$ ,  
reciproce. Quod tamen verum esse non  
potest, si fuerit  $n = 3$ ; Nam in hoc casu

$$\frac{1}{CH^n - 3} = \frac{1}{CH}, \text{ ideoque } MH \text{ erit ut } \frac{1}{CH}.$$

& rectangulum  $MH \times CH$  datum, proin-  
deque curva  $LMO$  hyperbola, cujus as-  
ymptotus  $CK$ , & area illius finita  $LMNIG$ .  
vim exponit solidi  $LGIN$ ; area verò in-  
finita  $NQKI$ , vim solidi infiniti  $NIKO$ .

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XCIII.  
THEOR.  
XLVII.

**XLVII.**

mo-

The diagram shows a square QVWS. A vertical line segment SN is drawn from the top vertex S to the bottom edge QV. A curve QP starts at vertex Q and ends at vertex S. A point T is located on the curve QP. A point L is located on the vertical line segment SN. A line segment connects point L and point T.

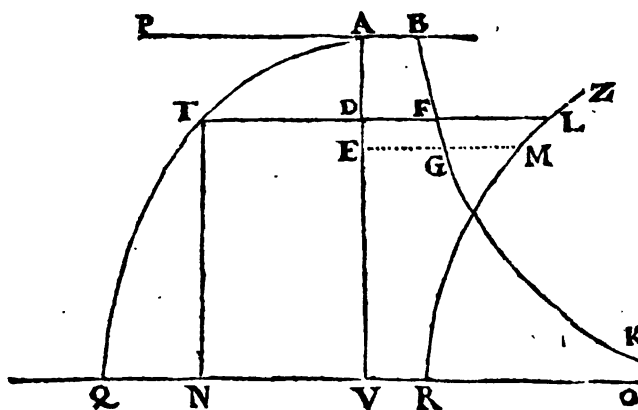
**В. В. 3:**

### Exemp-

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

LIBER  
PRIMUS  
PROP.  
XCIII.  
THEOR.  
XLVII.

Ope-



*Exemplum.* Exeat corpus de loco A secundum directionem A P plano trahenti V Q parallelam, & ducta D T eidem plano parallelâ, sit vis trahens in totâ lineâ D T, ut D V cubus reciprocè. De loco D, erigatur semper D F perpendicularis ad A V & vi trahenti in lineâ D T proportionalis, sitque BFG lineâ curvâ quam punctum G perpetuò tangit. In DF capiatur D L lateri quadrato areæ ABFD reciprocè proportionalis, & punctum L sit semper in lineâ curvâ Z L K, prorsus ut in prop. 39. Jam dicatur A V = a, D V = x, T D = y,

erit area A B F D ut  $\frac{a^2 - x^2}{x^2}$  (430) &

proinde D L, ut  $\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$  adeoque ele-

mentum D L M E, ut  $\frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ , & area

V D L R, ut hujus elementi fluens  $\frac{a^2 - x^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}}$  —

$\sqrt{a^2 - x^2}$  (165. 166), evanescit autem

area V D L R ubi x = 0. Quare Q = a, &

area V D L R, ut a —  $\sqrt{a^2 - x^2}$ . Hinc

posita x = a, erit area V A B Z R, ut a, &

area D A B Z L, ut  $\sqrt{a^2 - x^2}$ . Porro si punctum T est in trajectoriâ A T Q erit D T seu y proportionalis tempori quò

uniformiter describitur D T, & quò motu accelerato percurritur A D seu (per prop. 39.) erit y, ut  $\sqrt{a^2 - x^2}$ , adeoque y y ut a a — x x. Undè patet trajectoriâ A T Q esse ellipsim cujus centrum V, semiaxis unus V A, alter conjugatus V Q. Iisdem positus & vi ad planum V Q trahente in vim repellentem mutatâ corpus describet hyperbolam cujus centrum V semiaxis V A vertex A.

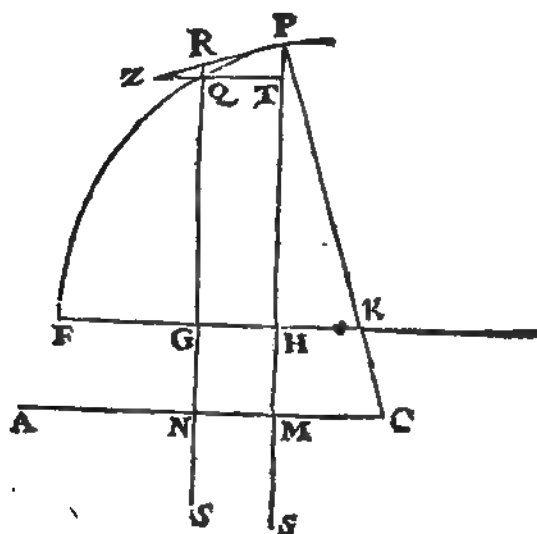
(b) 547. *Solvetur problema &c.* Moveatur corpus P in curvâ P Q F vi perpendiculariter tendente ad planum F K, sint P & Q puncta infinitè propinqua, P Z tangens in P, P C radius circuli curvâ P Q F osculantis in P; P H, Q G perpendiculara ex punctis P, Q in planum F K demissa, C A recta lineâ F K parallela & secans perpendiculara P H, Q G producta in M & N; producat G Q, ut tangenti P Z occurrat in R, & per Q agatur recta Z Q T plano F K parallela, ac tangenti occurrens in Z rectæ verò P H in T. Jam ob similia triangula CPM, PZT & KZQ, est  $CP^2 : PM^2 = PR : QT^2$ , & ex naturâ circuli osculatoris  $PR^2 = QR \times RN + QN$  (per prop. 36. lib. 3. Elem.) sive coeuntibus punctis P & Q,  $PR^2 = QR \times 2 PM$ . Ex-

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 527

Operationes autem contrahi solent resolvendo ordinatim ap-  
plicatas in series convergentes. Ut si ad basem A in angulo  
lo quovis dato ordinatim applicetur longitudo B, quæ sit ut ba-

fis dignitas quælibet  $A^{\frac{m}{n}}$ ; & quærat vis quâ corpus, secun-  
dum positionem ordinatim applicatæ, vel in basem attractum  
vel à basi fugatum, moveri possit in curvâ lineâ, quam ordina-  
tim applicata termino suo superiore semper attingit: Suppono  
basem augeri partem quàm minimâ O, & ordinatim applicatam

A +



Ergo  $CP^2, PM^2 = QR \times 2PM : QT^2$ ;  
ideoque  $\frac{QT^2}{QR} = \frac{2PM}{CP^2}$ , consideretur  
vis centripeta ut tendens ad centrum S  
infinite distans, & erit SP quantitas con-  
stans, ac  $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR} = \frac{2PM \times SP^2}{CP^2}$ . Est  
igitur (per cor. 1. & 5. prop. 6.) vis cen-  
tripeta reciproce ut  $\frac{2PM \times SP^2}{CP^2}$ , hoc  
est, ob constantem quantitatem  $2SP^2$ ,

reciproce ut  $\frac{PM}{CP^2}$ , seu in ratione com-  
positâ ex duplicatâ ratione radii oscula-  
toris CP directè & triplicatâ perpendiculari  
PM inversè. Porro datâ curvâ PQF in-  
venietur in singulis locis radius osculi CP  
(214) & punctum K ubi plano occurrit  
ac proinde invenietur PM, per propor-  
tionem: PK:PH=PC:PM, vel etiam  
per proportionem PR vel PQ:QT=PC:  
PM. Quare dabitur lex vis centripetæ.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XCIII.

$A + O \sqrt[n]{n}$  resolvo  $(\dagger)$  in seriem infinitam  $A \frac{m}{n} + \frac{m}{n} O A \frac{m-n}{n}$   
 $+ \frac{m m - m m}{2 n n} O O A \frac{m-2 n}{n} \&c.$  arque hujus termino in quo

THEOR.  $(\dagger)$  548. Resolvo in seriem infinitam  $Ox$ .  
 Ut hæc liqueant sequentia de dignitatum  
 & LVII. formulis sunt memoriz revocanda.

Lemma. Binomii  $a + b$ , dignitas  $a + b$   
 cujus index  $n$ , est  $a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n \times n - 1}{1 \times 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \times n - 1 \times n - 2}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3} b^3 + \frac{n \times n - 1 \times n - 2 \times n - 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} a^{n-4} b^4$   
 $+ \&c.$  Satis patet ex potentiarum for-  
 matione. Si enim binomium  $a + b$ , ad  
 2<sup>am</sup>, 3<sup>am</sup>, 4<sup>am</sup>, &c. dignitates evehatur,  
 in singulis dignitatis cujusque terminis,  
 index litteræ  $a$  unitate perpetuo decre-  
 scit, dum contra index litteræ  $b$  unitate  
 crescit, & coefficientes seu unciz singulo-  
 rum terminorum progrediuntur ut numeri  
 $\frac{n}{1}, \frac{n \times n - 1}{1 \times 2}, \frac{n \times n - 1 \times n - 2}{1 \times 2 \times 3}, \frac{n \times n - 1 \times n - 2 \times n - 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4}, \&c.$

549. Cor. 1. Si ponatur  $a = P$ , &  $Q$   
 $= \frac{b}{a}$ , adeoque  $a^n = P^n$ ,  $\frac{b^2}{a^2} = Q^2$ ,  $\frac{b^3}{a^3} = Q^3$ ,  
 $\frac{b^4}{a^4} = Q^4$ , his valoribus in lem-  
 matis formulâ substitutis erit  $a + b = P + P Q = P + \frac{n}{1} P Q + \frac{n \times n - 1}{1 \times 2} P^2 Q^2 + \frac{n \times n - 1 \times n - 2}{1 \times 2 \times 3} P^3 Q^3 + \frac{n \times n - 1 \times n - 2 \times n - 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} P^4 Q^4 + \&c.$   
 & si rursus ponatur  $P = A$ ,  
 $\frac{n}{1} P = Q = B$ ,  $\frac{n \times n - 1}{1 \times 2} P = Q^2 = C$ ,  
 $\frac{n \times n - 1 \times n - 2}{1 \times 2 \times 3} P = Q^3 = D$ , & ita por-  
 ro, erit  $a + b = P + P Q = P + \frac{n}{1} A Q$   
 $= \frac{n-1}{1} B Q + \frac{n-2}{2} C Q + \frac{n-3}{4} D Q + \&c.$

550. Cor. 2. Eisdem formulis uti pos-  
 sumus pro polynomio quovis ad datam

dignitatem evehendo, si pars una polyno-  
 mii litteræ  $a$  binomii ponatur æqualis,  
 cæteræ verò partes omnes supponantur æ-  
 quales litteræ  $b$ . Exempli causa. Sic tri-  
 nomium  $d + e + f$  ad tertiam dignitatem  
 elevandum, pone  $n = 3$ ,  $d = a$ ,  $e + f = b$ ,  
 & formula  $a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n \times n - 1}{1 \times 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \times n - 1 \times n - 2}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3} b^3$   
 mutabitur in seriem  $d + 3 d^2 (e + f) + 3 d (e + f)^2 + (e + f)^3$ ; cum enim  
 perventum est ad coefficientem in quâ est  
 $n - 3$ , abruptitur series ob  $n - 3 = 0$ . Por-  
 ro per eandem formulam generalem  $(e + f)^2 = e^2 + 2 e f + f^2$ , &  $(e + f)^3 = e^3 + 3 e^2 f + 3 e f^2 + f^3$ .  
 Quare tandem  $(d + e + f)^3 = d^3 + 3 d^2 e + 3 d^2 f + 3 d e^2 + 3 d f^2 + 3 d e f + e^3 + 3 e^2 f + 3 e f^2 + f^3$ .

Ita etiam formulam pro dignitate infi-  
 nitononii possumus obtinere, sit enim se-  
 ries  $A + B Z + C Z^2 + D Z^3 + E Z^4 + \&c.$   
 ad dignitatem  $p$  evehenda sub ducto cal-  
 culo invenietur.

$$A + p A B Z + p A C Z^2 + p A D Z^3 + p A E Z^4 + \&c.$$

$$+ p \times \frac{p-1}{2} A B^2 Z^2 + p \times \frac{p-2}{2} A B C Z^3 + p \times \frac{p-3}{3} A B^3 Z^3 + p \times \frac{p-4}{4} A B^2 C Z^4 + \&c.$$

551. Cor. 3. Si ex binomio  $a + b$ , ex-  
 trahenda sit radix cujus index  $\frac{m}{p}$ , loco  $n$ ,  
 in formulâ generali scribatur  $\frac{m}{p}$ , & erit  
 $a + b \sqrt[p]{\frac{m}{p}} = a \sqrt[p]{\frac{m}{p}} + \frac{m}{p} a \sqrt[p]{\frac{m-p}{p}} b + \frac{m \times m - p}{1 \times 2 \times p^2} a \sqrt[p]{\frac{m-2p}{p}} b^2 + \frac{m \times m - p \times m - 2p}{1 \times 2 \times 3 p^3} a \sqrt[p]{\frac{m-3p}{p}} b^3 + \frac{m \times m - p \times m - 2p \times m - 3p}{1 \times 2 \times 3 \times 4 p^4} a \sqrt[p]{\frac{m-4p}{p}} b^4 + \&c.$  vel etiam erit  $a + b \sqrt[p]{\frac{m}{p}} = P$

O duarum est dimensionum, id est, termino  $\frac{mm-mm}{2nn}$  OOA  $\frac{m-2n}{n}$  DE Mo. TU COR. PORUM.

$$= P + PQ \frac{m}{p} = PP + \frac{m}{p} A Q + \frac{m-p}{2p} B Q + \frac{m-2p}{3p} C Q + \frac{m-3p}{4p} D Q + \&c.$$

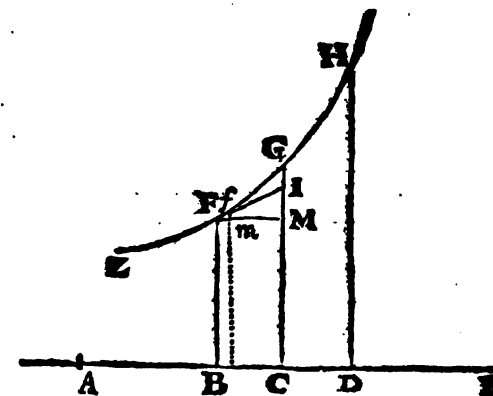
Nam sit Radix quævis  $a + b \frac{m}{p}$  æqualis seriei infinite  $A + BZ + CZ^2 + DZ^3 + \&c.$  erit  $a + b \frac{m}{p}$  æqualis huic seriei ad dignitatem  $p$  evectæ, sumatur ergo seriei potentie  $a + b \frac{m}{p}$  quæ erit  $a^m + m a^{m-1} b + m \times \frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} a^{m-3} b^3 + \&c.$  conferantur cum terminis dignitatis infinitinonii  $A + BZ + CZ^2 + DZ^3 + \&c.$  ad dignitatem  $p$  evecti, (n<sup>a</sup>. 550) invenieturque  $A = a^m$ ;  $p A = m a^{m-1} B Z$   $= m a^{m-1} b$ ;  $p A = m a^{m-1} C Z^2 + p \times \frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2$

$$A = a^{m-2} B^2 Z^2 = m \times \frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2; p A = m a^{m-1} D Z^3 + p \times \frac{m-1}{2} A = m a^{m-1} \times 2 B C Z + p \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} A = m a^{m-1} B Z; m \times \frac{m-2}{3} a^{m-2} b^3 + \&c.$$

$$\text{Unde invenietur } A = a^m, B Z = \frac{m}{p} \times \frac{a^{m-1} b}{a^m} = \frac{m}{p} a^{m-1} b; CZ^2 = \frac{m \times m-1}{1 \times 2 \times p^2} a^{m-2} b^2 + \&c.$$

552. Lemma. Si in rectâ A E positio- ne datâ, ad quam curva Z F H refertur, capiatur abscissa quævis A B, sitque ordi- nata correspondens F B æqualis dignitati abscissæ A B, in datam quantitatem i ductæ, & deindè capiantur intervalla æ- qualia B C, C D, & agantur ordinatæ C G, D H, ac per punctum F ducatur tan- gens F I ordinatæ C G occurrens in I, & Tom. I.

recta F M parallela lineæ A E, eidem or- dinatæ occurrens in M, ac tandem ordi- nata C G, seu A B + B C, elevetur ad dignitatem cujus est index  $q$  atque itâ in seriem infinitam convergentem resolvatur, hujus seriei primus terminus erit semper



æqualis ordinatæ F B, insistenti ad initium quantitatis constantis B C; secundus ter- minus æqualis erit differentie inter F B & C I, id est, lineæ M I, & tertius ter- minus unâ cum sequentibus in infinitum æ- quabitur lineæ C I quæ jacet inter tangen- tem & curvam. ... Dem. Sit A B = x, F B = y, data B C = o, ducta intelligatur or- dinata f b, alteri F B infinite propinqua quæ lineam F M secet in m, & punctis F, f, coeuntibus erit F m = d x, f m = d y, ac triangula F m f, F M I similia, ideo- que d x : d y = O : M I, sed quoniam y = x q (ex hyp.) & proindè d y = q x q-1 d x, est d x : d y = 1 : q x q-1, ergo M I = q x q-1 x O & C I = F B + M I = x + q x q-1 x O. Præterea (ex hyp.) est G C = x + O q =

$$x + q x q-1 O + \frac{q \times q-1}{1 \times 2} x q-2 O^2 + \frac{q \times q-1 \times q-2}{1 \times 2 \times 3} x q-3 O^3 + \&c. \text{ in infi- nitum (548). Quare erit } G I = G C - C I = \frac{q \times q-1}{1 \times 2} x q-2 O^2 + \frac{q \times q-1 \times q-2}{1 \times 2 \times 3} x q-3 O^3 + \&c.$$

DE MO- $x^1 - 10^1 + \&c.$  in infinitum. Ergò seriei

TU COR- inquam resolvitur  $x + 0^1$ , terminus primus  
FORUM  $x^1$ , æqualis est ordinatæ F B, secundus

LIBER terminus  $q x^1 - 10^1$ , æqualis differentiæ  
PRIMUS. inter F B & C I, & tertius terminus unâ cum

PRO P. Eadem est demonstratio, si curva Z F H  
XCIII. concavitatem lineæ A E obvertat. Q. E. D.

THEOR. 553. Cor. 1. Si quantitas O, seu B C,  
XLVII. in infinitum minuatur ut fiat  $= dx$ , termi-

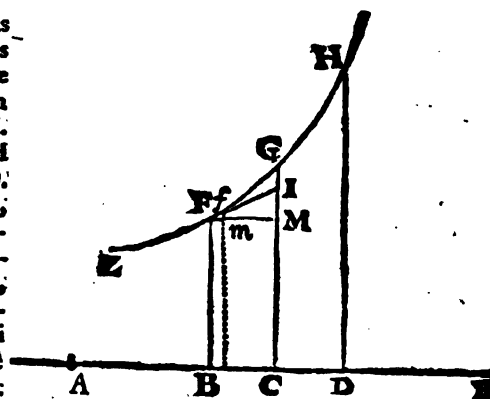
ni omnes in serie subsequentes sunt infi-  
nitè minores quovis termino antecedente;  
quod quantitatis O index in singulis ter-  
minis unitate crescat, ideòque termini illi  
subsequentes negligi possunt, & proinde  
in hac hypothesi  $M I = dy = MG$ ,  $GI =$   
 $\frac{q \times q - 1}{1 \times 2} x^1 - 2 O^2 = \frac{q \times q - 1}{1 \times 2} x^1 - 2 dx^2$

$= \frac{1}{2} dy$ . Nam cum sit  $dy = q x^1 - 1 dx$   
&  $dx$ , constans, erit sumptis fluxioni-  
bus,  $ddy = q \times q - 1 x^1 - 2 dx^2$ .

554. Cor. 2. In eadem Hypothesi erit  
 $ddy$  ut quartus seriei terminus,  $ddd dy$ ,  
ut quintus, & ita porro in infinitum. Nam  
quia est  $ddy = q \times q - 1 x^1 - 2 dx^2$ , erit  $ddd dy$   
 $= q \times q - 1 \times q - 2 x^1 - 3 dx^3$ , &  $ddd dy$   
 $= q \times q - 1 \times q - 2 \times q - 3 x^1 - 4 dx^4$ , &  
ita deinceps. Quartus autem seriei termi-  
nus posita  $O = dx$ , est  $\frac{q \times q - 1 \times q - 2}{1 \times 2 \times 3}$

$x^1 - 1 dx$ . Quintus  $\frac{q \times q - 1 \times q - 2 \times q - 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$   
 $x^1 - dx^4$ ; Ergò ob datos numeros  $1 \times 2 \times 3$   
&  $1 \times 2 \times 3 \times 4$ . &c. patet corollarium.

555. Cor. 3. Eadem omnia vera sunt,  
si fuerit ordinata B F seu y æqualis seriei  
cuius potentiarum quarumlibet abscissæ  
A B in datas quantitates ductarum, hoc  
est  $y = ex^k + fx^m + gx^p + \&c.$  Eadem  
enim demonstratio. Observandum  
tamen est in hoc casu primum seriei ter-  
minum dici in quo quantitas O, seu B C,  
non extat, secundum terminum in quo  
quantitas illa est unius dimensionis, tertium  
in quo extat duarum dimensionum & sic  
in infinitum, licet in singulis terminis ita  
definitis plures contineantur quantitates fi-  
gnis + vel - conjunctæ. Exempli cau-  
sâ. Posita  $y = ex^k + fx^m = BF$ , erit GC  
 $= e(x + O)^k + f(x + O)^m = ex^k + fx^m$   
 $+ \frac{m}{x} ex^{k-1} \cdot 0 + \frac{m}{x} ex^{m-1} \cdot 0 + \&c.$



in infinitum. Primus seriei terminus est

$ex^k + fx^m$ , secundus  $\frac{n}{1} ex^{k-1} \cdot 0 +$

$\frac{m}{1} ex^{m-1} \cdot 0$  & ita de cæteris.

556. Cor. 4. Hinc sequitur eadem omnia  
valere, si fuerit ordinata B F seu y  
æqualis cuilibet functioni ipsius abscissæ  
A B, seu x, hoc est  $y = Q$ , & Q quanti-  
tas ex abscissâ x, ipsiusque potentis ac  
aliis quantitatibus datis quomodolibet com-  
posita. Nam quantitas illa Q poterit sem-  
per vel (per Lemma 548.) ejusque co-  
rollaria vel per divisionem in seriem ali-  
quam resolvi, cujus singuli termini erunt  
vel ipsius abscissæ x potentie in quantita-  
tes datas ductæ, vel quantitates omnino  
datæ, omnis verò quantitas data  $e = ex^k$ .  
Quare æquatio  $y = Q$ , semper reduci po-  
terit in formam æquationis cor. 3. (555.)  
 $y = ex^k + fx^m + gx^p + \&c.$  Exempli

causâ: Sit  $y = g + \frac{ee}{b+x} + (ff + xx)^{\frac{1}{2}}$ .

Peracta divisione in infinitum, erit

$\frac{ee}{b+x} = \frac{ee}{b} - \frac{ee x}{b^2} + \frac{ee x^2}{b^3} - \frac{ee x^3}{b^4} +$

$\frac{ee x^4}{b^5}$  &c. in infinitum; &  $ff + xx^{\frac{1}{2}} =$

$f + \frac{x^2}{2f} - \frac{x^4}{8f^3} + \frac{x^6}{16f^5}$  &c. in infinitum.

Nam in hoc casu erit in formulâ P  $\frac{m}{p}$

$+ \frac{m}{p} A Q + \frac{m-p}{2p} B Q$  &c. (551.)

$m =$

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 531

vim proportionalem esse suppono. (c) Est igitur vis DE Mo-  
TU COR-  
quæsitæ ut  $\frac{m m - n n}{n n} A \frac{m - 2 n}{n}$ , vel quod perinde est, ut PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XCIII.  
THEOR.  
LVII.  
modum

$$m = 1; p = 1; P = f f, Q = \frac{x^2}{f f} A = P \frac{m}{p} =$$

$$f f^{\frac{1}{2}} = f B = \frac{m}{p} \times A Q = \frac{x^2}{2 f}, \text{ \& sic deinceps; ergo erit } y = g + \frac{e e}{b} + f - \frac{e e x}{b}$$

$$+ \left( \frac{e e}{b} + \frac{1}{2} f \right) x^2 - \frac{e e x}{b} + \left( \frac{e e}{b} - \frac{1}{2} f \right) x^4,$$

\&c. in infinitum.

(c) 157. \* Est igitur vis quæsitæ &c.  
Moveatur corpus in curvâ P Q F, vi ten-  
dente ad planum seu basim A F, secun-  
dum lineas P B, Q C cum basi A F an-  
gulum datum constituentibus. Producat  
ordinata C Q ut tangenti per P ductæ  
occurrat in R, & ex puncto curvæ Q ad  
ordinatam P B agantur Q L parallela A F,  
& Q T ad P B perpendicularis. Jam si  
vis centripeta fingatur ad punctum S infi-  
nitè distans tendere, coeuntibus punctis  
P & Q vis illa in puncto P erit ( per

cor. 2. prop. 6. ) directè ut  $\frac{Q R}{S P^2 \times Q T},$

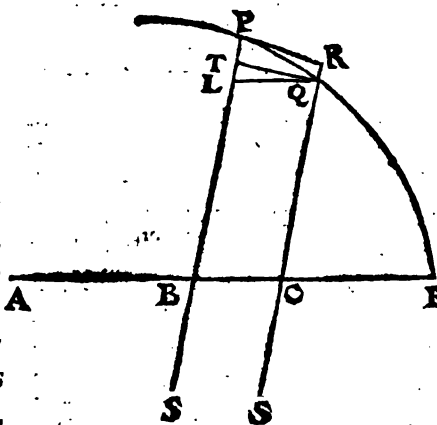
hoc est, ob constantem S P, ut  $\frac{Q R}{Q T}.$

Porrò ob angulum Q L T datum, & angu-  
lum Q T L rectum, datur specie triangu-  
lum Q T L, & ideo datâ Q L, datur etiam  
Q T, ergo datâ B C seu Q L, vis erit  
ut Q R. Sed si abscissa A B dicatur = A,  
ordinata B P = B, & B C = O; cum sit

(ex Hyp.) B, ut  $A \frac{m}{n}$ , erit ordinata C Q,

ut  $A + O \frac{m}{n}$ , & (153), Q R, ut æquius

terminus seriei in quam resolvitur  $A + O \frac{m}{n},$   
hoc est, (150) ut  $\frac{m \times m - n}{1 \times 2 \times n^2} A \frac{m - 2 n}{n} \times O O,$   
 $= \frac{m m - m n}{2 n^2} A \frac{m - 2 n}{n} \times O O,$  seu ut  $\frac{m m - m n}{n^2}$   
 $\times A \frac{m - 2 n}{n},$  ob datam quantitatem



$\frac{O O}{2}.$  Est igitur vis quæsitæ ut  $\frac{m m - m n}{1 \times 2 \times n^2}$   
 $\times A \frac{m - 2 n}{n}$  vel ut  $\frac{m m - m n}{n n} B \frac{m - 2 n}{n}$   
quia cum sit B, ut  $A \frac{m}{n}$ , erit B  $\frac{m}{n}$  ut A, &  
X x x 2 B



# 532 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM. 2 A — 3 seu 2 B 3 : ideoque vi, quæ sit ut cubus ordinatim ap-  
PLICATA, corpus movebitur in hyperbolâ. Sed missis hujusmodi  
PRIMUS. PROPOSITIONIBUS, pergo ad alias quasdam de motu, quas nondum  
XCIII. attingi.  
THEOR.  
XLVII.

SEC

$B \frac{n}{m} \times \frac{m-2n}{n}$ , seu  $B \frac{m-2n}{m}$ , ut  $A \frac{m-2n}{n}$ .  
Itaque si ponatur  $m = 2$ ,  $n = 1$ , erit  $B$ ,  
ut  $A^2$ , & curva PF parabola, &  $\frac{mm-mn}{n n}$

$B \frac{m-2n}{m} = 2 B^*$ , adeoque vis ut data

$2 B^* = 2$ . Quod si ponatur  $m = -1$ , &

$n = 1$ , erit  $B$ , ut  $\frac{1}{A}$  hoc est  $B \times A$  rectan-

gulum datum, & proinde curva PF hy-  
perbola cujus asymptotus AF, & centrum

$A$ ; &  $\frac{mm-mn}{n n} A \frac{n}{n} = 2 A - 1 = \frac{2}{A}$ ,  
 $2 B$ , & ideo vis ut cubus ordinatæ B. Sed

quoniam hyperbola convexitatem obver-  
tis asymptoto AF, vi illâ corpus à basi  
AF repellitur.

Si curva PQF, est ellipsis cujus cen-  
trum A, semidiameter AF = C, erit PB<sup>2</sup>

seu B<sup>2</sup>, ut rectangulum AF + AB x BF

= C + A x C - A = CC - AA, & ponen-

do BC = O, erit QC<sup>2</sup>, ut CC - AA

= 2 AO - OO, fiat CC - AA = DD,

erit QC<sup>2</sup>, ut DD - 2 AO + OO, & radi-

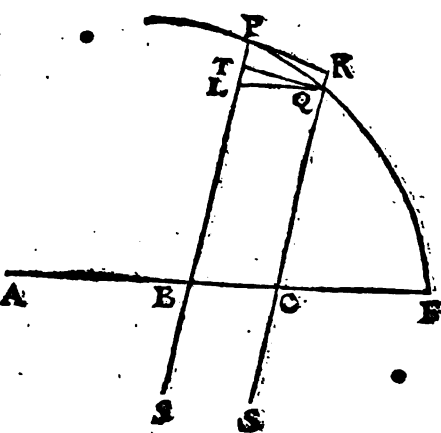
ce per formulam generalem extractâ (550.

551) erit QC, ut  $D - \frac{AO}{D} - \frac{OO}{2D}$

$\frac{AAOO}{2D} - \frac{AO}{2D} - \frac{OO}{2D}$ , &c. tertius

seriei terminus est  $\frac{OO}{2D} + \frac{AAOO}{2D}$  =

$\frac{DD + AA \times OO}{2D} = \frac{CCOO}{2D}$ , erit igitur



ut QR (552. 553) seu vis ut  $\frac{CC}{2D}$ , hoc

est, ob datam quantitatem  $\frac{CC}{2}$ , ut  $\frac{1}{D}$ , &

ac proinde quoniam BE est ut QC - AA

seu DD, vis erit ut  $\frac{1}{B}$ , hoc est,

ut cubus ordinatim applicatæ reciprocè,

quod convenit cum solutione Problematis

III. Eodem modo demonstratur vim à pla-

no AF repellentem, decreverit in ratione

triplicatâ ordinatim applicatæ PB si cor-  
pus moveatur in hyperbolâ, cujus diame-  
ter una sit in plano AF, altera conjugata  
in lineâ parallelâ ordinatis PB, QC, &c.  
convexitus plano AF obvertit.

# PRINCIPIA MATHEMATICA.

## SECTIO XIV.

533

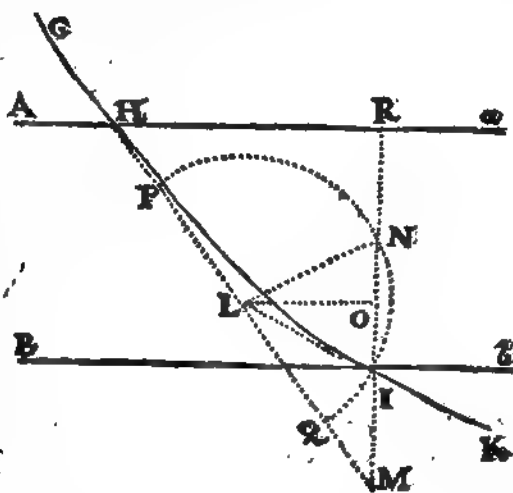
*De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad singulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.*

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XCIV.  
THEOR.  
XLVIII.

### PROPOSITIO XCIV. THEOREMA XLVIII.

*Si media duo similia, spatio planis parallelis utrinque terminato, distinguantur ab invicem, & corpus in transitu per hoc spatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter versus medium alterutrum; neque ullâ aliâ vi agitetur vel impediatur; sit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano distantis ad eandem ipsius partem capitis, ubique eadem: dico quod sinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad sinum emergentiæ ex plano altero in ratione datâ.*

*Cas. 1.* Sunto  $Aa$ ,  $Bb$  plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius  $Aa$  (d) secundum lineam  $GH$ , ac toto suo per spatium intermedium transitu attrahatur vel impellatur versus medium incidentiæ, eâque actione describat lineam curvam  $HI$ , & emergat (e) secundum lineam  $IK$ . Ad planum emergentiæ  $Bb$  erigatur perpendicularum  $IM$ , occurrens tum lineæ incidentiæ  $GH$  productæ in  $M$ , tum plano incidentiæ  $Aa$  in  $R$ ; & lineæ emergentiæ  $KI$  producta occurrat  $HM$  in



*L. Cent-*

(d) 558. \* Secundum lineam  $GH$ . Angulus incidentiæ hic dicitur complementum anguli  $GHA$  ad rectum, seu angulus quem linea  $GH$  constituit cum rectâ ad planum incidentiæ  $Aa$  perpendiculariter erectâ in  $H$ . Angulus emergentiæ est etiam angulus  $KIM$ , quem linea directio-

nis corporis emergentiæ, efficit cum rectâ  $IM$  ad planum emergentiæ  $Bb$ , perpendiculari in  $I$ .

(e) \* Et emergat secundum lineam. Patet rectas  $GH$ ,  $IK$  seu corporis in  $H$  &  $I$  directiones, curvam  $HI$  in punctis  $H$ ,  $I$  contingere.

X x x 3

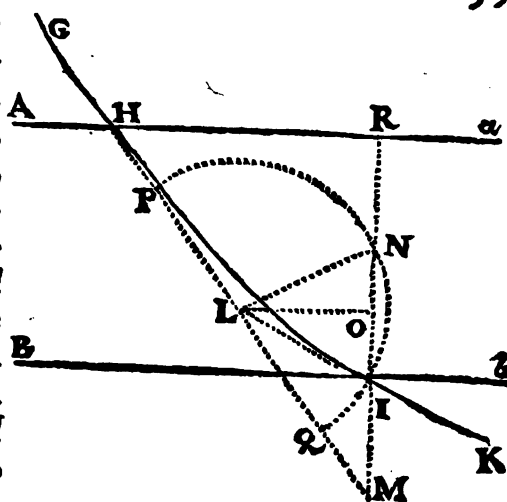


ad  $M I$  demittatur perpendicularum  $L O$ , <sup>(h)</sup> æquales erunt  $M O, O R$ ; & additis <sup>(i)</sup> æqualibus  $O N, O I$ , fient totæ æquales  $M N, I R$ . Proinde cum  $I R$  datur, datur etiam  $M N$ ; estque rectangulum  $N M I$  ad rectangulum sub latere recto &  $I M$ , hoc est, ad  $H M q$ , in datâ ratione.

(\*) Sed rectangulum  $NMI$  æquale est rectangulo  $PMQ$ , id est, differentiæ

quadratorum  $MLq$ , &  $PLq$  seu  $LIq$ ; &  $HMq$  datam rationem habet ad sui ipsius quartam partem  $MLq$ : ergo datur ratio  $MLq - LIq$  ad  $MLq$ , (<sup>1</sup>) & convertendo ratio  $LIq$  ad  $MLq$ , & ratio dimidiata  $LI$  ad  $ML$ . Sed in omni triangulo  $LMI$ , sinus angulorum sunt proportionales lateribus oppositis. Ergo datur ratio sinus anguli incidentiæ  $LMR$  ad sinum anguli emergentiæ  $LIR$ . Q. E. D.

**Caf. 2.** Transeat jam corpus successive per spatia plura pa-  
ral-



tro  $HT$  datum; agatur ordinatim applicata  $XE$  parabolæ occurrens in  $E$ , & per  $E$  ducatur  $ED$  parallela  $XH$  & tangenti  $HM$  occurrens in  $D$ ; ac proinde æqualis datæ  $XH$ . Jam verò  $HX$  seu  $DE$ , est spatium quod corpus vi attractrice describit eodem tempore dato quo motu uniformi projectionis percurrit  $HD$ , ideoque datis vi attractrice & velocitate projectionis, data quoque erit linea  $HD$  in quovis incidentiæ angulo  $GHT$ . Est autem latus rectum diametri  $HT$  tertia proportionalis ad abscissam  $HX$ , & ordinatam  $XE$  seu  $HD$ . Ergo datis vi attractrice & velocitate projectionis, datum seu constans est latus rectum diametri  $HT$ . Q. E. D.

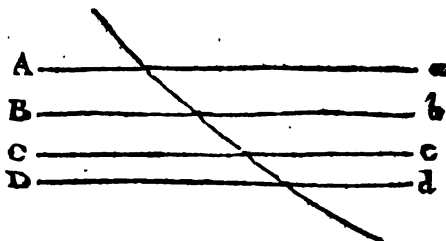
(h) \* *Aequales erunt*  $\overline{MO}$ ,  $\overline{OR}$  (per  
prop. 2. lib. 6. Elem.)

(i) \* *Aequalibus*  $ON$ ,  $OI$ . Per prop;  
3. lib. 3. Elem.

(k) \* *Sed reſtangleulum N M I aequale eſt reſtangleulo P M Q*, (per cor. 1. prop. 36. lib. 3. Elem.) *id eſt, differentia quadratorum*  $ML^2$  &  $PL^2$ , *eſt enim*  $PM = ML + PI$ , &  $QM = ML - LQ = ML - PL$ ; Quare  $PM \times QM = ML^2 - PL^2$ . (Per. Corol. 6. 2<sup>a</sup>. Elem.)

(1) \* *Es convertendo.* Sint enim  $A$  &  $B$ , quantitates datæ, &  $ML^2 = LI^2$ :  $ML^2 = A^2 : B^2$ : erit  $ML^2 : LI^2 = B^2 : B^2 = A^2$ , quæ est ratio datæ,

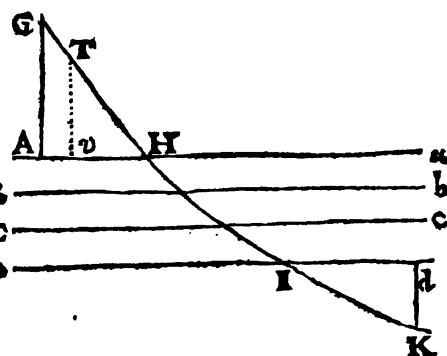
DE MO- rallelis planis terminata,  $AabB$ ,  $BbcC$ , &c. & agitetur vi qua  
TU COR- sit in singulis separatim unifor-  
PORUM. mis, at in diversis diversa; &  
LIBER per jam demonstrata, sinus in-  
PRIMUS. cidentiae in planum primum  $Aa$   
PROP. erit ad sinum emergentiae ex  
XCIV. plano secundo  $Bb$ , in datâ ra-  
THEOR. tione; & hic sinus, qui est si-  
XLVIII. nus incidentiae in planum secundum  $Bb$ , erit ad sinum emergen-  
tia ex plano tertio  $Cc$ , in datâ ratione; & hic sinus ad sinum emer-  
gentiae ex plano quarto  $Dd$ , in datâ ratione; & sic in infinitum:  
& (m) ex æquo, sinus incidentiae in planum primum ad sinum  
emergentiae ex plano ultimo in datâ ratione. Minuantur jam  
planorum intervalla, & augeatur numerus in infinitum, eò ut at-  
tractionis vel impulsus actio, secundum legem quamcunque assi-  
gnatam, continua reddatur, & ratio sinus incidentiae in planum  
primum ad sinum emergentiae ex plano ultimo, semper data exi-  
stens, etiamnum dabitur. Q. E. D.



PROPOSITIO XCV. THEOREMA XLIX.

*Lisdem positis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam est ad ejus ve-  
locitatem post emergentiam, ut sinus emergentiae ad sinum incidentiae.*

Capiantur  $AH$ ,  $Id$  æqua-  
les, & erigantur perpendicu-  
la  $AG$ ,  $dK$  occurrentia li-  
neis incidentiae & emergen-  
tiae  $GH$ ,  $IK$ , in  $G$  &  $K$ .  
In  $GH$  capiatur  $TH$  æqualis  
 $IK$ , & ad planum  $Aa$  de-  
mittatur normaliter  $Tv$ . Et  
(per legum corol. 2.) distin-  
guatur motus corporis in duos,



unum

(m) \* Et ex æquo. Sint quantitates  
datæ  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , &c. Sinus inciden-  
tiae in planum primum  $S$ , sinus emergentiae  
ex secundo plano, idem qui sinus inciden-

tiae in secundum planum  $T$ , & ita porro  
sinus sint  $S$ ,  $T$ ,  $V$ ,  $X$ , &c. ponaturque  
 $S:T=A:B$ ,  $T:V=B:C$ ,  $V:X=C:D$ ,  
& erit, ex æquo,  $S:X=A:D$ .

unum planis  $Aa$ ,  $Bb$ ,  $Cc$ , &c. perpendicularem, alterum De Mo-  
iisdem parallelum. Vis attractionis vel impulsus, agendo se-  
cundum lineas perpendiculares, nil mutat motum secundum <sup>TU COR-</sup>  
parallelas, & propterea corpus hoc motu conficiet æquali-  
bus temporibus æqualia illa secundum parallelas intervalla, quæ <sup>LIBER</sup>  
sunt inter lineam  $AG$  & punctum  $H$ , interque punctum  $I$  & <sup>PRIMUS.</sup>  
lineam  $dK$ ; (<sup>n</sup>) hoc est, æqualibus temporibus describet lineas <sup>PROP.</sup>  
 $GH$ ,  $IK$ . Proinde velocitas ante incidentiam est ad velocitatem <sup>THEOR.</sup>  
post emergentiam, ut  $GH$  ad  $IK$  vel  $TH$ , id (<sup>o</sup>) est, ut  $AH$   
vel  $Id$  ad  $vH$ , hoc est (respectu radii  $TH$  vel  $IK$ ) (<sup>p</sup>) sinus  
emergentiæ ad sinum incidentiæ. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XCVI. THEOREMA L.

*Isdem positis, & (<sup>q</sup>) quod motus ante incidentiam velocior sit  
quam postea, dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ,  
refleſſetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo in-  
cidentiæ.*

Nam concipe cor-  
pus inter parallela pla-  
na  $Aa$ ,  $Bb$ ,  $Cc$ ,  
&c. describere arcus  
parabolicos, ut su-  
pra; sintque arcus illi



$HP$ ,  $PQ$ ,  $QR$ , &c. Et si ea lineæ incidentiæ  $GH$  obli-  
quitas ad planum primum  $Aa$ , ut sinus incidentiæ sit ad ra-  
diū circuli, cujus est sinus, in eā ratione quam habet idem  
sinus

(<sup>n</sup>) \* Hoc est, æqualibus temporibus.  
Quoniam motu composito corpus fertur  
per lineas  $GH$  &  $IK$ , eodem tempore de-  
scribit  $GH$  quo  $AH$ , &  $IK$  quo  $Id$ , sed  
(ex Dem.) tempora quibus conficiuntur  
intervalla parallela & æqualia  $AH$ ,  $Id$   
æquantur, ergo corpus æqualibus tempo-  
ribus describit lineas  $GH$  &  $IK$ .

(<sup>o</sup>) \* Id est ut  $AH$  vel  $Id$  ad  $vH$ .  
Per prop. 2. lib. 6. Elem.

(<sup>p</sup>) \* Ut sinus emergentiæ. Est enim  
Tam. I.

angulus  $vTH$  anguli  $THv$ ; & angulus  
 $IKd$  anguli  $KId$ , complementum ad re-  
ctum, & proinde (<sup>q</sup>) prior est æqualis  
angulo incidentiæ, posterior est æqualis  
angulo emergentiæ.

(<sup>q</sup>) \* Et quod motus ante incidentiam  
&c. Ut angulus emergentiæ semper cres-  
cat (prop. 95.) & ipsius proinde comple-  
mentum ad rectum semper decreſcat in  
transitu corporis per diversa media.

DE MO  
TU COR-  
PORUM.

LIBER

PRIMUS.

PROPO-

XCVI.

THEOR.

LI.

sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ ex plano  $Dd$ , in spa-  
tium  $DdeE$ : & ob sinum emergentiæ jam factum æqualem  
radio, angulus emergentiæ erit rectus, ideoque linea emergen-  
tiæ coincidet cum plano  $Dd$ . Perveniat corpus ad hoc pla-  
num in puncto  $R$ ; &

quoniam linea emer-

gentiæ coincidit cum

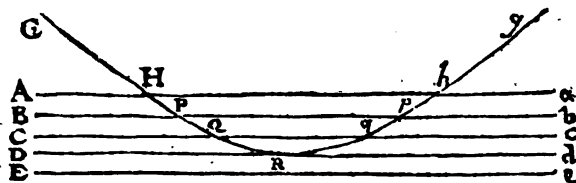
eodem plano, perspi-

cuum est quod corpus

non potest ultra perge-

re versus planum  $Ee$ .

Sed nec potest idem pergere in lineam  
emergentiæ  $Rd$ , propterea quod perpetuò attrahitur vel impel-  
litur (  $r$  ) versus medium incidentiæ. Revertetur itaque inter  
plana  $Cc$ ,  $Dd$ , describendo arcum parabolæ  $QRq$ , (  $f$  ) cu-  
jus vertex principalis ( juxta demonstrata *Galilæi* ) est in  $R$ ;  
secabit planum  $Cc$  in eodem angulo in  $q$ , ac prius in  $Q$ ;  
dein pergendo in arcubus parabolicis  $qp$ ,  $ph$ , &c. arcubus  
prioribus  $QP$ ,  $PH$  similibus & æqualibus, secabit reliqua  
plana in iisdem angulis in  $p$ ,  $h$ , &c. ac prius in  $P$ ,  $H$ ,  
&c. emergetque tandem eadem obliquitate in  $h$ , quâ inci-  
dit in  $H$ . Concipe jam planorum  $Aa$ ,  $Bb$ ,  $Cc$ ,  $Dd$ ,  $Ee$ ,  
&c. intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eo ut  
actio attractionis vel impulsus secundum legem quamcunque af-  
signatam continua reddatur: & angulus emergentiæ semper an-  
gulo incidentiæ æqualis existens, eidem etiamnum manebit æ-  
qualis. *Q. E. D.*



Scho-

(  $r$  ) \* Versus medium incidentiæ v. gr.  
Cc.

(  $f$  ) \* Cujus vertex principalis. Quo-  
niam enim ( ut patet ex not. 40. ) omnes  
diametri parabolæ  $QRq$  sunt ad basim  
 $Qq$  perpendiculares, erit  $Qq$  ad axem  
ordinatim applicata, cumque recta  $DRd$   
ipsi  $Qq$  parallela parabolam tangat in  $R$ ,  
( 40 ) erit  $R$  vertex principalis ( per lem.  
4. de Conic. ) & propterea velocitates cor-

poris in locis  $Q$  &  $q$  à vertice  $R$  æque re-  
motis æquales erunt, & directiones illius.  
ad lineam  $Qq$  æque inclinæ. Insuper  
velocitas perpendicularis quâ corpus ex  
solâ vi attractrice ad planum  $Pp$  urgetur,  
iisdem gradibus crescit per totum spatium  
 $qp$ , quibus antè decreverat per spatium  
æquale  $PQ$ . Quare corpus pergendo in ar-  
cubus parabolicis &c.

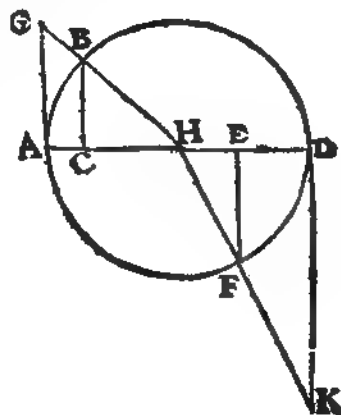
*Scholium.*

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS  
PROP.  
XCVI.

Harum attractionum haud multum dissimiles sunt lucis reflexiones & refractiones, factæ secundum datam secantium rationem, ut invenit *Snellius*, (¹) & per consequens secundum datam sinuum rationem, ut exposuit *Cartesius*. Namque lucem successivè propagari & spatio quasi septem vel octo minutorum primorum à sole ad terram venire, (²) jam constat per phænomena satellitum *Jovis*, observationibus diversorum astronomorum confirmata. Radii autem in aëre existentes (uti dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebrosum cubiculum admisâ, invenit, & ipse quoque expertus sum) in transitu suo prope cor-

(¹) \* Et per consequens. Lucis radius  $GH$  incidat in planum refringens  $AD$ , sitque radius refractus  $HK$ . Centro  $H$  & radio quovis  $HA$ , circulus describatur planum secans in  $A$  &  $D$  radiosque lucis in  $B$  &  $F$ . Erigantur ad planum perpendiculara  $AG$ ,  $CB$ ,  $EF$ ,  $DK$ . *Villebrordus Snellius*, referente *Isaaco Vossio* in sua dissertatione de lucis naturâ & proprietate, invenerat secantes  $GH$ ,  $HK$  angulorum  $GHA$ ,  $KHD$ , esse in datâ ratione. Verùm iadè sequitur quod *Cartesius* postea vulgavit, datam quoque esse rationem linearum  $CH$ ,  $HE$  quæ sunt sinus angulorum incidentiæ  $CBH$ , & emergentiæ  $HFE$  (558). Nam  $BH:GH = CH:AH$  (seu  $BH$ ) &  $KH:FH$  (seu  $BH$ ) =  $HD$  (seu  $BH$ ): $HE$ , & ex æquo,  $KH:GH = CH:HE$ . Quare datâ ratione  $GH$  ad  $KH$ , datur quoque ratio  $HE$  ad  $CH$ .

(²) \* Jam constat per phænomena. Jupiter cum suis quatuor satellitibus circa solem eadè centrum revolvitur in trajectory quæ tellurem ambitu suo complectitur, undè fit ut perpetuò mutetur *Jovis* à tellure distantia, quæ, cæteris paribus, minima est, tellure solem inter & *Jovem* positâ, maxima verò, sole inter *Jovem* & tellurem locato, atque harum distantiarum differentia orbis magni diametro, seu duplicæ distantie solis à terrâ æqualis est. Si igitur lucis propagatio instantanea non est, sed successiva, & per orbis magni diame-



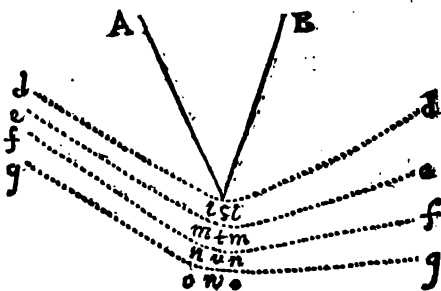
trum sensibili aliquo tempore diffundatur; necesse est ut satellitis *Ecclipsis*, quæ contingit dum *Jovis* umbram subit, tardius à nobis videatur in majori illâ *Jovis* distantia, citius in minori, atque ita rem se habere, *Ramus* aliique deinde plures Astronomi observarunt. Cæterum alii causæ præter successivam lucis propagationem inæqualitatem illam satellitam tribuendam esse contendit *Clariss. Maraldi* in *Comm. Paris. 1707.* quod etiam jam antea *Magnus Cassini* visum fuerat. Sed *Clarissimus Grasse* ejus argumentis respondet in *Comm. Paris. 1732.* Horum Dissertationes videbis.



DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
xcvi.  
THEOR.  
L.

porum vel opacorum vel perspicuorum angulos ( quales sunt  
nummorum ex auro, argento & ære cusorum termini rectan-  
guli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum  
acies ) incurvantur circum corpora, quasi attracti in eadem; &  
ex his radiis, qui in transitu illo propius accedunt ad corpora  
incurvantur magis, (\*) quasi magis attracti, ut ipse etiam di-  
ligenter observavi. Et qui transeunt ad majores distantias mi-  
nus incurvantur; & ad distantias adhuc majores incurvantur ali-

quantulum ad partes contrarias, & tres colorum fascias efformant.  
In figura designat s aciem cultri vel cunei cujusvis *As B;* & *g o w o g;*  
*f n u n f,* *e m t m e,* *d l s l d* sunt  
radii, arcubus *o w o,* *m t m,*  
*l s l* versus cultrum incurvati;  
idque magis vel minus pro di-  
stantia eorum à cultro. Cum  
autem talis incurvatio radio-  
rum fiat in aere extra cultrum,  
debeant etiam radii, qui inci-  
dunt in cultrum, prius incur-  
vari in aere quam cultrum attingunt. Et par est ratio in-  
cidentium in vitrum. (y) Fit igitur refractio, non in puncto in-  
cidentiæ, sed paulatim per continuam incurvationem radiorum,  
factam



(x) \* *Quasi magis attracti.* Alia egregia experimenta vide in *Newtoni Optica* initio lib. 3. & quæst. 29.

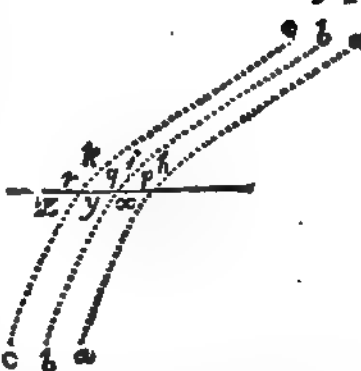
(y) \* *Fit igitur refractio & reflexio.* Vide *Prop. 8. & 9. Partis 3. Lib. Optices Newtoni.* Sed ut res clariùs intelligatur, sint media duo contigua, *A a b B,* *B b c C,* planis parallelis terminata, & quorum talis sit attractionis lex ut ultrà distantiam *p R* à medio alterutro evanescat ejus medii attractio. Itaque centro *p* & radio *p R* (*fig. 1.*) describatur circulus vel potius sphaera *R Z V X* quæ planum *B b* non attingat, corpus *p* versus omnia hujus sphaeræ puncta æqualiter attractum, nullam in partem inflectetur, sed manebit in lineâ rectâ *G C,* secundum quam moveri supponitur. Si in eadem rectâ *G C,* capia-

tur punctum *C,* à plano *B b* remotum distantia  $CV = PR$ , sitque vis attractiva versus medium *B b c C,* major vi attractiva medii *A a b B,* in eo ipso loco *c* corpus a rectâ viâ *G c* deflectere curvamque lineam describere incipiet. Perveniat (*2.*) corpus en *C in e,* per curvam *c e,* & ductâ *H M* ad planum *A a,* *B b* perpendiculari, ac per punctum *e,* rectâ *e T,* quæ curvam *c e* tangat in *e,* & perpendiculo *H M* occurrat in *T,* erit angulus *e T c* minor angulo incidentiæ *G H M;* nam cum segmentum *K V L,* in hemisphaerio *X V Z* magis trahatur versus planum *B b,* quam segmentum ipsi æquale in hemisphaerio *X R Z,* (*ex hyp.*) versus planum *A a;* manifestum est curvam deorsum inflecti, ideòque tangentem *e T* à radio inciden-

# PRINCIPIA MATHEMATICA.

541

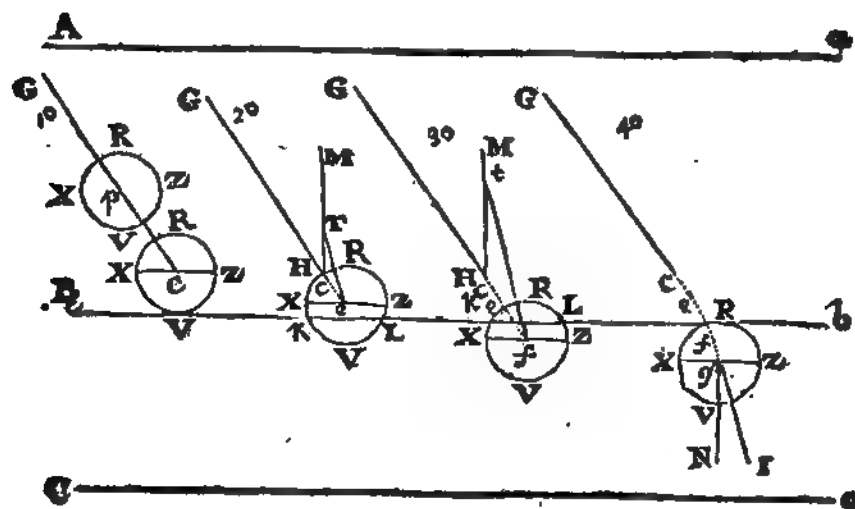
factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim ( ni fallor ) in vitro, postquam illud ingressi sunt: uti in radiis  $ckzc$ ,  $biyb$ ,  $ahxa$  incidentibus ad  $r$ ,  $q$ ,  $p$ , & inter  $k$  &  $z$ ,  $i$  &  $y$ ,  $h$  &  $x$ , incurvatis, delineatum est. Igitur ob analogiam quæ est inter propagationem radiorum lucis & progressum corporum, visum est propositiones



DE MOTU CORPORUM.  
LIBER PRIMUS  
PROP. XCVI.  
THEOR. I.

sequentes in usus opticos subungere; interea de naturâ radiorum ( utrum sint corpora necne ) nihil omnino disputans, sed trajectorys corporum trajectorys radiorum perfimiles solummodo determinans.

PRO-



GC, versùs superiora M recedere. Similiter ubi corpusculum C est in  $f$  ( 3° ) intra medium B o c C, magis trahitur versùs planum C c, ab hemispherio X V Z, quam retrahitur versùs planum B b, ab altero hemispherio X R Z, cujus segmentum  $k R L$ , minus trahit, quam æquale segmentum in hemispherio X V Z; quare angulus

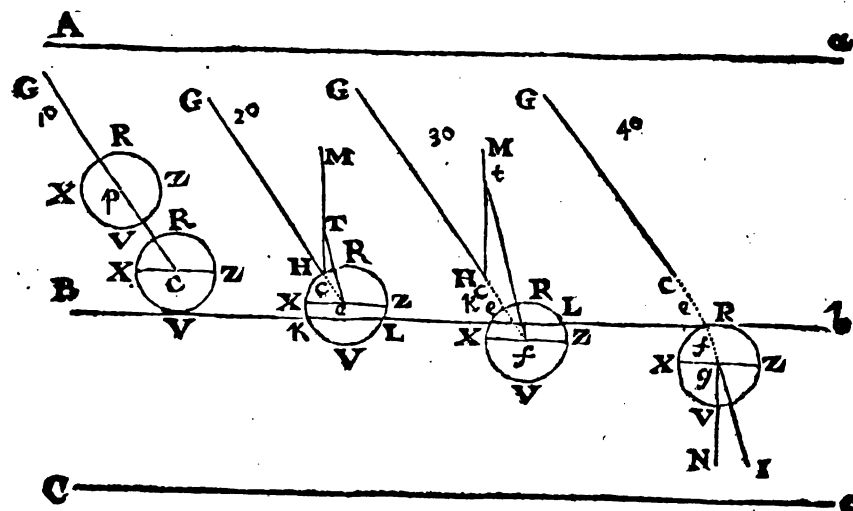
$H t f$ , quem tangens  $f t$  cum perpendiculari  $H M$  efficit, adhuc minor est quam angulus  $H T e$  ( 1° ). Sed cum tandem corpusculum c pervenit in  $g$  ( 4° ), locum à plano B b remotum distantia maxima  $g R = p R$ , tum corpus p, æqualiter undique attractum ( ex hypothesis ) semitatu non amplius mutat, sed rectâ movetur per

$Y y y$ , 3,  $g l$ ,

## PROPOSITIO XCVII. PROBLEMA XLVII.

*Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad sinum emergentiæ in datâ ratione; quodque incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerari possit: determinare superficiem, quæ corpuscula omnia de loco dato successivè manantia convergere faciat ad alium locum datum.*

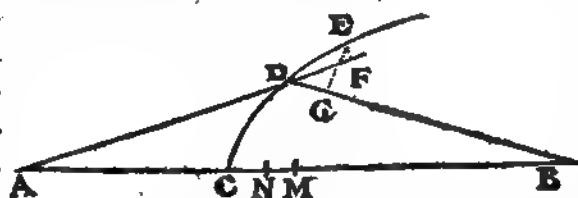
Sit *A* locus à quo corpuscula divergunt; *B* locus in quem convergere debent; *CDE* curva linea quæ circa axem *AB* revolvatur.



*g I*, quæ curvam *cefg* tangit in *g*, estque angulus *NgI*, quem *gI* cum *gN* ad *Bb* perpendiculari constituit, seu angulus emergentiæ minor adhuc angulo *Htf* ( $3^\circ$ ). Oppositum eveniet, si medium *BbcC*, minus trahat quam medium *AaBb*, & refractione in reflexionem mutari poterit. Fit igitur refractione & reflexio non in puncto incidentiæ *R* ( $4^\circ$ ). Sed paulatim per continuam incurvationem radiorum, ut *NEWTONUS* docet. Quod si itaque certissimis experimentis constet radios lucis à corporibus quasi attrahi in minimis distantibus, *NEWTONUS* veram hic demonstravit causam illarum lucis affectionum, quibus contingit ut radii incidentes in superficiem corporis resiliant in plano ad eam verticali, sub angulis reflexionis æqualibus an-

gulis incidentiæ, atque ut ex uno medio in aliud diversæ densitatis aut diversæ vis trahentis, oblique penetrantes refrangantur in plano ad superficiem, quæ duo media dirimit itidem recto, ita ut sinus incidentiæ & emergentiæ datam servant rationem. Satis enim liquet plana linearum *GHI* & *GHRh*, in superioribus propositionibus, perpendicularia esse ad plana *Aa*, *Bb*, ut planum parabolæ quam gravia in hypothesi Galilæi describunt perpendicularare est ad horizontem. Quænam verò causa sit attractionis aut tendentiæ vel impulsus radiorum lucis in corpora: alia quæstio est quam hic agitare minimè necesse est, quæque seposita, interim ex certis experimentis mathematica demonstratione, ostensa est reflexionis & refractionis lex & causa; quem-

revolutâ describat superficiem quæsitam;  $D$ ,  $E$  curvæ illius puncta duo quævis; &  $EF$ ,  $EG$  perpendiculara in corporis vias  $AD$ ,  $DB$  demissa. Accedat punctum  $D$  ad punctum  $E$ ; & lineæ  $DF$ , quâ  $AD$  augetur, ad lineam  $DG$ , quâ  $DB$  diminuitur, ( $2^a$ ) ratio ultima erit eadem, quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ. Datur ergo ratio incrementi lineæ  $AD$  ad decrementum lineæ  $DB$ ; & propterea si in axe  $AB$  sumatur



ubivis punctum  $E$ , per quod curva  $CDE$  transire debet, & capiatur ipsius  $AC$  incrementum  $CM$  ad ipsius  $BC$  decrementum  $CN$  in datâ illâ ratione, centrique  $A$ ,  $B$ , & intervallis  $AM$ ,  $BN$  describantur circuli duo se mutuo secantes in  $D$ ; ( $2^a$ ) punctum illud  $D$  tanget curvam quæsitam  $CDE$ , eandemque ubivis tangendo determinabit. *Q. E. I.*

*Corol. 1.* Faciendo autem ut punctum  $A$  vel  $B$ ; nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti  $C$ ,

quemadmodum semel cognitis (per experientiam) gravitate atque elaterio aëris, rectè quis ascensus & descensus liquorum in tubis vacuis causam atque legem demonstrasse censetur, dum ex iis aëris proprietatibus quarum causas ignorat, hæc phenomena accuratè deduxit. Nam juxta rectam philosophandi rationem, in naturæ phenomena primum debemus diligenter inquirere, ut postea motus corporum eorumque leges, & causas accuratius investigare & cognoscere possimus. Ceterum in phenomena reflexionis ac refractionis locis eorumque causas inquisierunt Philosophi ac Mathematici celeberrimi, *Cartesius* cap. 2<sup>o</sup>. *Dioptricus* per leges generales resolutionemque motuum, & supponendo luminis minorem resistentiam in densioribus quam in rarioribus mediis obijci; *Leibnizius* in Actis Eruditorum Lipsiensibus An. 1682. pag. 185. hæc factâ hypothesi, quod lumen à puncto radiante ad punctum illustrandum viâ omnium facillimâ perveniat, quæ etiam usus erat antea *Bernardus*; *Hugenius* in tractatu de lumine per penuriam

undulationis luminis rem totam explicat; & *Joannes Bernoullius* in Actis Lips. an. 1701. ex æquilibrii fundamento eam ingeniosissime deduxit.

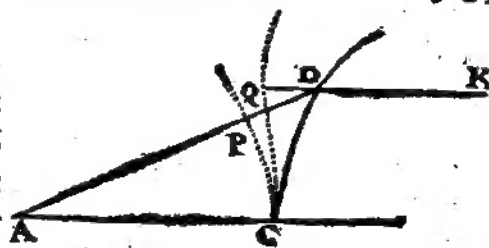
(2) \* *Ratio ultima erit eadem.* Nam lineolæ  $DE$  pro radio seu sinu toto usurpata, lineolæ  $DF$ ,  $DG$  sunt sinus angulorum  $DEF$ ,  $DEG$ ; sed angulus  $DEF$  est complementum ad rectum anguli  $EDF$ , seu  $ADC$ , ideoque æqualis est angulo incidentiæ, & angulus  $DEG$  est complementum ad rectum anguli  $EDG$ , ideoque æqualis est angulo emergentiæ (158). Ergo lineæ  $DF$  ad lineam  $DG$  ratio ultima erit eadem quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ, ideoque data. Et hinc (per cor. 4.) datur ratio incrementi totius finiti lineæ  $AD$ , ad decrementum totum finitum lineæ  $DB$ .

(\*) \* *Punctum illud D.* Atque eodem modo, assumendo varia incrementa  $CM$ , & decrementsa  $CN$ , puncta diversa lineæ  $CDE$  determinabuntur. Si verò cedat  $B$  & radio quovis describatur circulus, curvam  $CB$  secantem in  $E$ , & lineam  $A$   $B$  in

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XCVII.  
PROBL.  
XLVII.

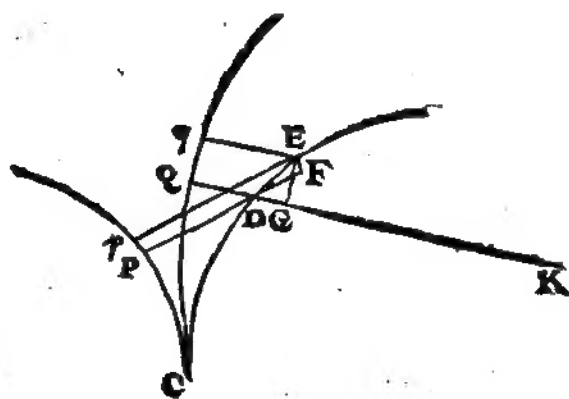


telligantur lineæ curvæ  $CP$ ,  
 $CQ$  ipsis  $AD$ ,  $DK$  sem-  
 per perpendiculares: (c) erunt  
 incrementa linearum  $PD$ ,  
 $QD$ , atque ideo lineæ ip-  
 sæ  $PD$ ,  $QD$ , incremen-  
 tis istis genitæ, ut sinus inci-  
 dentię & emergentię ad invicem: & contra;



DE MO-  
 TU COR-  
 PORUM.  
 LIBER  
 PRIMUS.  
 PROP.  
 XCVII.  
 PROBL.  
 XLVII.

PROQ.



(c) scilicet. \* Erunt incrementa &c.  
 Nam si capiatur arcus quàm minimus  $DE$ ,  
 atque ex puncto  $E$  in curvas  $CP$ ,  $CQ$ ,  
 & in rectas  $PD$ ,  $QK$ , demittantur per-  
 pendicula  $Ep$ ,  $Eq$  &  $EF$ ,  $EG$ , coeunti-  
 bus punctis  $E$  &  $D$ , erunt  $EF$ ,  $Pp$  &  
 $EG$ ,  $Qq$  sibi mutuo parallelæ, & proin-  
 de  $PF$ ,  $pE$  &  $QG$ ,  $qE$ , æquales, ideo-  
 que  $DF$  &  $DG$  erunt rectarum  $PD$ ,  
 $QD$  incrementa nascentia. Sed, (ex  
 demonstratis supra)  $DF$  est ad  $DG$ , ut  
 sinus incidentię ad sinus emergentię,

quare incrementa linearum  $PD$ ;  $QD$ ,  
 atque adeo (cor. Lem. 4.) lineæ ipsæ  $PD$ ,  
 $QD$ , (quæ simul nascuntur in puncto  $C$ )  
 incrementis istis genitæ, erunt ut sinus in-  
 cidentię & emergentię ad invicem, & con-  
 trā, si lineæ  $PD$ ,  $QD$  curvis  $CP$ ,  $CQ$   
 perpendiculares sint ut sinus incidentię &  
 emergentię, erunt earum incrementa nas-  
 centia in eadem semper ratione, ac proin-  
 de si corpus in superficiem  $CD$  secundum  
 lineam  $PD$  incidat, emerget secundum li-  
 nearum  $QD$  seu  $DK$ .

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

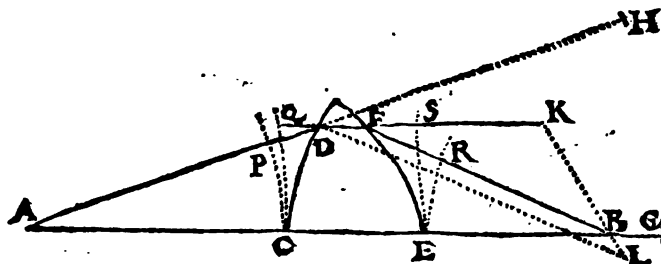
PROPOSITIO XCVIII. PROBLEMA XLVIII.

LIBER  
PRIMUS.

PROP.  
XCVIII.  
PROBL.  
XLVIII.

*Isdem positis, & circa axem AB descriptâ superficie quâcunque at-  
tractivâ CD, regulari vel irregulari, per quam corpora de loco  
dato A exeuntia transire debent: invenire superficiem secundam  
attractivam EF, quæ corpora illa ad locum datum B conver-  
gere faciat.*

Juncta AB fecet superficiem primam in C & secundam in E, puncto D utcunque assumpto. Et posito sinu incidentiæ in superficiem primam ad sinum emergentiæ ex eadem, & (d) sinu emergentiæ è superficie secundâ ad sinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N: pro-



duc tum AB ad G, ut sit BG ad CE ut M—N ad N; tum AD ad H, ut sit AH æqualis AG; tum etiam DF ad K, ut sit DK ad DH ut N ad M. Junge KB, & centro D intervallo DH describe circulum occurrentem KB productæ in L, ipsique DL parallelam age BF: & punctum F tanget lineam EF, quæ circa axem AB revoluta describet superficiem quæsitam. Q. E. F,

Nam

(d) \* Ex sinu emergentiæ è superficie secunda &c. Est enim sinus emergentiæ è superficie secundâ EF, ad sinum incidentiæ in eandem, ut sinus incidentiæ in superficiem primam CD, ad sinum emergentiæ ex eadem. Nam si radius incidens AD

refrangitur per DF, ob eandem rationem radius FB, incidens in D refrangetur per DA, & qui sinus erat incidentiæ in primo casu, sit sinus emergentiæ in secundo.





